

УДК 539.3

## ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ СТІЙКОСТІ ОБОЛОНКИ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ НА ПРЯМОКУТНОМУ КОНТУРІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

**О.О. Кошевий<sup>1</sup>,**

д-р філософії (Ph.D.), доцент

**С.В. Завацький<sup>2</sup>,**

канд. фіз.-мат. наук, доцент

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ*<sup>2</sup>*Національний університет «Чернігівська політехніка», м. Чернігів*

DOI: 10.32347/2410-2547.2026.116.470-480

В статті розглянуто дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні на прямокутному плані. Цільові функції представлені у вигляді ваги оболонки мінімальної поверхні та стійкості, а саме коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$ . Змінні проектування представлені у вигляді товщини оболонки мінімальної поверхні від 1 до 200 мм. Обмеження та ліміти оптимізаційного розрахунку були напруження по Мізесу та коефіцієнт  $\lambda \geq 1$ , що дає змогу максимального використання конструкційного матеріалу.

Результатами дослідження є зменшення ваги на 23.12%, а коефіцієнт  $\lambda=1.06$ . Оптимізаційний розрахунок проводився з урахуванням геометричної нелінійності, що дало змогу додатково зменшити вагу конструкції за рахунок значень дійсних вузлових переміщень. Дана методика використовується вперше і є цікавою задачею для області оптимального проектування.

**Ключові слова:** оптимізація, параметрична оптимізація, багатокритеріальна оптимізація, оптимізація цільової функції, змінні проектування, обмеження, оболонки мінімальних поверхонь, геометрична нелінійність, метод скінчених елементів, оптимальне проектування.

**Вступ.** Оптимальне проектування просторових тонкостінних конструкцій розвивається з 50-х років ХХ ст. Важливе значення в підході оптимального проектування, розглядати даний вид дослідження з різних точок зору. В загальному випадку, при дослідженні оптимального проектування, є визначення всіх оптимізованих міцнісних характеристик, за II групами граничних станів [1-3]. До таких міцнісних характеристик відносяться: міцність, стійкість, прогини, деформації в просторових тонкостінних конструкціях. Реалізація оптимального проектування, з такими міцнісними характеристиками, відбувається одночасно з вагою просторової тонкостінної конструкцією. Вага та об'єм є фундаментальними цільовими функціями в оптимальному проектуванні, для оболонок. Вони дають можливість розкрити економічну складову оптимального проектування, що веде до одночасної оптимізації на ряду з міцнісними характеристиками. Це дає поштовх до створення задач будівельної механіки багатокритеріальної параметричної оптимізації [7].

Багатокритеріальна параметрична оптимізація формується, за рахунок врахування в математичному апараті, та методики дослідження просторової тонкостінної конструкції, одразу двох цільових функцій. До яких відноситься вага або об'єм, та міцнісна характеристика. Такі цільові функції відносяться: вага і міцність, вага і стійкість, вага і прогини, вага та вимушені чи власні частоти коливання просторової тонкостінної конструкції. Специфіка таких досліджень полягає в тому, що при дослідженні цільових функцій, необхідно залучати 3 різні види розрахунку. В розрахунковому комплексі Femap with Nastran за вагою і міцністю, чи вагою та прогинами, стоїть вид розрахунку Static. Для ваги і стійкості, за рахунок коефіцієнта  $\lambda$ , стоїть вид розрахунку Bucking. Для ваги та власних, чи вимушених коливань, стоїть розрахунок Normal Modes. Під кожний вид розрахунку, необхідно створити, окремий вид математичного апарату, та програмування, у власному програмному забезпеченні, що представлено додатковим модулем в розрахунковому комплексі Femap with Nastran [8]. Після дослідження всіх типів

розрахунку, виводиться загальна порівняльна таблиця, яка і дає якісний кінцевий результат, в якій буде зрозуміла кінцева товщина просторової тонкостінної конструкції, та буде виконуватися критерії за II групами граничних станів.

В даному чисельному дослідженні, об'єктом дослідження, є оболонка мінімальної поверхні на прямокутному контурі, при термосиловому навантаженні. Цей вид унікальних просторових тонкостінних конструкцій, дає можливість одразу досліджувати два типи оптимізації [12]. До першого типу відносить оптимізація форми, або морфологічна оптимізація. До другого типу задачі, відноситься багатокритеріальна параметрична оптимізація, яка має можливість використовувати дві цільових функцій вага і міцнісні характеристики.

Задачі оптимального проектування, можна використовувати в лінійній, так і в нелінійних постановках. До нелінійної постановки відносяться геометрична та фізична. В даній науковій статті розглядається геометрична нелінійна постановка, яка дає можливість врахувати дійсні переміщення та напруження, під час знаходження точки біфуркації. Коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$  – це фактично точка біфуркації оболонки мінімальної поверхні. Вона може бути глобальною, або місцевою. Знайти глобальний оптимум, при дослідженні стійкості такого виду конструкцій фактично не можливо, але в сучасному чисельному моделюванні місцевої втрати стійкості є достатньою, для врахування її, при оптимального проектуванні.

Використання такого алгоритму, веде до нового підходу, при оптимальному проектуванні будівельних конструкцій. Даний вид оптимального проектування є важливим економічних ефектом, при створенні майбутньої конструкції. Такий підхід, дає можливість використовувати не тільки для оболонок, а і для стержневих та плоских конструкцій. Важливим аспектом є матеріал, який повинен бути ізотропним, до них відносяться метали та композити. Для дерев'яних та залізобетонних конструкцій даний вид оптимізації, поки що непридатний до використання, а врахування анізотропності матеріалів, при багатокритеріальній параметричній оптимізації, є безумовним поштовхом, для наукового дослідження в цій області.

Підхід такої багатокритеріальної оптимізації, в оптимальному проектуванні, дає можливість розробки системності рішень, де головними характеристиками є вага та відповідна міцнісна характеристика. Вона веде до знаходження повної оптимізації будівельної конструкції, з урахуванням основної методики граничних станів, які є поки єдиним варіантом у ДБН України, та Єврокодів. Результати показують різні відсотки оптимізації, від 7% до 35%, але дають можливість побачити оптимальність конструкції, по всім міцнісним критеріям. Це пов'язано, з універсальністю підходу оптимального проектування, на прикладі оболонки мінімальної поверхні, який дає можливість починати оптимізацію з будь-якої точки. Автоматизованість такого процесу, та його універсальний початок розкриває незалежність, від частини вихідних умов, та створює зручність для будь-якого інженера проектувальника.

**Система розв'язувальних рівнянь з урахуванням геометричної нелінійності оболонки мінімальної поверхні методом скінченних елементів [16].** Систему розв'язувальних рівнянь методу скінченних елементів формують, використовуючи варіаційний принцип Лагранжа, у відповідності з яким повна потенціальна енергія  $\Pi$  скінчено-елементної моделі тіла знаходиться в стані стійкості і рівноваги має мінімальне значення.

Умова мінімуму буде використано, коли частинні похідні від потенціальної енергії  $\Pi$  по всім вузлом переміщенням  $\{\bar{u}\}$  дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\bar{u}\}} = 0. \quad (1)$$

Повна потенціальна енергія скінчено-елементної моделі дорівнює:

$$\Pi = U - A = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [\bar{k}] \{\bar{u}\} - \{u\}^T \{Q\}. \quad (2)$$

Після диференціювання згідно (1) отримаємо систему розв'язувальних рівнянь методу скінченних елементів:

$$[\bar{k}] \{\bar{u}\} - \{Q\} = 0. \quad (3)$$

В системі рівнянь (3) не враховані граничні умови відносно переміщень. Для приведення рівняння у відповідність із заданими значеннями вузлових переміщень необхідно виконати

наступні зміни матриці жорсткості  $[\bar{k}]$  і вектора вузлових навантажень  $\{Q\}$  скінчено-елементної моделі. В першому варіанті в  $[\bar{k}]$  і  $\{Q\}$  записуються нулі в рядках, які відповідають відомим переміщенням, за виключенням діагональних членів матриці  $[\bar{k}]$ , які прирівнюються до одиниці. В другому варіанті стовпці матриці  $[\bar{k}]$ , які відповідають відомим переміщенням, множаться на ці переміщення і зі зворотнім знаком додається з відповідними компонентами вектора  $\{Q\}$ , після чого у вказаному стовпці матриці  $[\bar{k}]$  (крім діагональних елементів) записуються нулі. Перетворена система рівнянь приймає вигляд

$$[\bar{k}]\{\bar{U}\} - \{Q\} = 0. \quad (4)$$

Рішення системи рівнянь (4), як правило, виконується прямими методами, враховуючи особливості структури матриці (лінійність і симетрію відносно головної діагоналі).

Величини деформації і напружень в скінченому елементі визначається за формулами:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u\} = [B]\{u\}, \quad (5)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{u\}. \quad (6)$$

Попередньо із вектора переміщення скінчено-елементної моделі  $\{\bar{u}\}$  виділяється вектор переміщення  $\{\bar{u}\}_{(l)}$  скінченого елемента за допомогою матриці інцидентції

$$\{\bar{u}\}_{(l)} = [i]_{(l)} \{\bar{u}\}. \quad (7)$$

Викладена методика отримання співвідношення методу скінчених елементів з урахуванням геометричної нелінійності не залежить від форми і властивостей скінчених елементів, тому може бути впроваджена для пластинчастого скінченого елемента оболонки мінімальної поверхні [17].

Нижче представлені значення матриці для тонкої пластини, яка працює на згин чотирикутного тонкого скінченного елемента **plate**

$$[N] = [N_{11}N_{12}N_{13}N_{21}N_{22}N_{23}N_{31}N_{32}N_{33}N_{41}N_{42}N_{43}], \quad (8)$$

$$N_{i_1} = \frac{1}{8} \left( \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right) \left( 2 + \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} \right) - \left( \frac{x_1^{(2)}}{a_1^2} \right) - \left( \frac{x_2^{(2)}}{a_2^2} \right) \right) \right) \right), \quad (9)$$

$$N_{i_2} = \left( \frac{x_1^{(i)}}{8} \right) \left( \left( \frac{x_1^{(2)}}{a_1^2} - 1 \right) \left( \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right) \right) \right), \quad (10)$$

$$N_{i_3} = \left( \frac{x_2^{(i)}}{8} \right) \left( \left( \frac{x_2^{(2)}}{a_2^2} - 1 \right) \left( \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right) \right) \right). \quad (11)$$

$N_{ij}$  ( $j=1,2,3$ ) - функції форми  $i$ -го вузла чотирикутного плоского скінченного елемента **plate** в розрахунковому комплексі **Femap with Nastran** [3].

### Аналіз чутливості параметричної оптимізації для оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі

В рамках аналізу чутливості обчислюються градієнти змінних проектування конструкції, переміщень у вигляді частинних похідних від цих характеристик по змінним проектуванням та товщини оболонки. Інформація про чутливість служить основою побудови алгоритму оптимального проектування методом градієнтного спуску функції цілі. Матриця чутливості

$$G = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X_j}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m} \right\} \quad (12)$$

і градієнт цільової функції  $\nabla \bar{f}(X)$  використовується для побудови матриці проектування, обчислення множників Лагранжа і визначення напрямку спуску по градієнту. Тут  $n$  – кількість змінних проектування,  $m$  – кількість обмежень. Крім того, при проведенні аналізу чутливості з'являється кількісна інформація про вплив зміни змінних проектування на функціонування системи [18].

З математичної точки зору, залежність реакцій оболонки у вигляді переміщень і напружень від змінних проектування є товщина оболонки. Такі рівняння лінійні відносно змінних станів, але якщо врахувати вплив змінних проектування на коефіцієнти лінійних операторів, рівняння стану є нелінійним відносно функціональної залежності змінних станів і змінних проектування.

Аналіз чутливості реакцій конструкцій на зміну змінних проектування можливо провести без обчислення похідної матриці жорсткості. Для цього виконуємо диференціювання по  $i$ -й складовій  $X_i$  рівняння стану [19]

$$K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i} + \frac{\partial K}{\partial X_i} \times \bar{z} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i}. \quad (13)$$

Цей вираз можливо перетворити до вигляду:

$$K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} \times \bar{z}. \quad (14)$$

Праву частину рівняння (14) можливо розглядати як вектор псевдо навантаження  $\bar{p}$ . Тоді для системи похідних переміщень вираз можна переписати як:

$$K \times \left[ \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_1}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_n} \right] = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_k^*], \quad (15)$$

де  $k$  – кількість навантажень конструкції.

Оскільки вирішення системи рівнянь статки можливо при багатьох варіантах правих частин рівняння [20], то рішення (15) формується одночасно з вирішенням рівняння стану методу скінченних елементів. Як показують дослідження, така схема вирішення задачі при розгляді до 100 вантажних векторів потребує всього на 15% більше часу роботи процесору в порівнянні з вирішенням задачі на один вантажний вектор. Ефект досягається за рахунок виключення  $K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i}$  із виразу градієнтів цільової функції і обмежень.

Матриця (15) легко обчислюється при відомій функціональній залежності зовнішніх навантажень від змінних проектування. Якщо  $\bar{p}(\bar{X})$  – вектор зовнішніх навантажень, який є постійним, то  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i} = 0$  [4]

$$P = \left\{ \frac{\partial p_j}{\partial X_i}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m} \right\}. \quad (16)$$

Розглянемо визначення похідної  $K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i}$ , для цього ведемо наступні позначення  $K_g$  і  $K_l$  – матриця жорсткості відповідного елемента в загальній локальній системі координат;  $\bar{z}_g$  і  $\bar{z}_l$  – вузлові переміщення в локальній системі координат;  $T$  – матриця перетворення локальної системи координат в глобальну [21].

Основні співвідношення методу скінченних елементів при перетворенні координат:

$$K = T^T \times K^l \times T, \quad (17)$$

$$\bar{z}_l = T \times \bar{z}_g. \quad (18)$$

Так як в якості змінних проектування прийнята товщина оболонки, то координати вузлів конструкції похідна  $K_g$  по  $\bar{X}$  дорівнює [6, 19]:

$$\frac{\partial K_g}{\partial \bar{X}} = \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \right) \times K_l \times T + T^T \times K_l \times \frac{\partial T}{\partial \bar{X}}. \quad (19)$$

Приймаємо до уваги рівність (18), маємо:

$$\frac{\partial K_g}{\partial \bar{X}} \bar{z}_g = \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \right)^T \times (K \times \bar{z}_l) + T^T \times \left( \frac{K_l}{\partial \bar{X}} + K_l \times \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g \right). \quad (20)$$

Можемо показати, що

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} K \times \bar{z} = \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left( \sum_{i=1}^{NE} K_g^i \times \bar{z} \right) = \sum_{i=1}^{NE} \left( \frac{\partial K_g^i}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g^i \right), \quad (21)$$

де  $NE$  – число скінченних елементів;  $K_g^i$  – матриця жорсткості  $i$ -го елемента в глобальній системі координат.

Звідси матриця  $\frac{\partial K}{\partial \bar{X}} \times \bar{z} = \frac{\partial K_g^i}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g^i$  може бути сформована шляхом обчислення вектору  $\frac{\partial K_g^i}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g^i$  для кожного скінченного елемента конструкції і подальшої їх суми.

Вектор  $K_l \times \bar{z}_l$  в першому складеному рівнянні (17) представляє собою внутрішні зусилля в елементі в локальній системі координат, які можуть бути визначені як [5]

$$\bar{p}_l = K_l \times \bar{z}_l = \left( \int_0^l (B^T \times D \times B) dx \right) \times \bar{z}_l = \int_0^l (B^T \times \bar{\sigma}) dx, \quad (22)$$

де  $\bar{\sigma} = D \times B \times \bar{z}_l$ .

Вектор  $K_l \times \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g$  із останнього члена (21) може бути отриманий аналогічно із визначенням внутрішніх зусиль, відповідно фіктивним вузловим локальним переміщенням (22)

$$\bar{z}_l = \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g. \quad (23)$$

Вектор  $\frac{K_l}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_l$  апроксимується за допомогою скінченної різниці шляхом перерахунку матриці  $K_l$  для малих відшкодувань змінних проектування  $X_i$ . З урахуванням (23) знаходження вектора  $\frac{K_l}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_l$  зводиться до ряду векторних операцій, і при малих змінах  $\bar{X}$  дорівнює:

$$\frac{K_l}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_l = \frac{(K_l \times \bar{z}_l)_{\bar{X} + \delta \bar{X}} - (K_l \times \bar{z}_l)_{\bar{X}}}{\delta \bar{X}}. \quad (24)$$

Таким чином, аналіз чутливості реакцій оболонки для кожного пластинчастого скінченного елемента до варіацій змінних проектування зводиться до визначення вектору  $\frac{\partial K}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}$ , шляхом знаходження двох додаткових векторів внутрішніх зусиль в локальній системі координат і перетворення результативних векторів в загальну координатну систему.

Визначивши чутливість  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{X}}$ , є можливість перейти від знаходження чутливості внутрішніх зусиль в скінченних елементах до зміни змінних проектування, оскільки для реалізації алгоритму вирішення задачі оптимізації потрібно побудова матриці чутливості обмежень  $G$  [4].

Чутливість обмежень на напруження по Мізесу може бути також представлена у вигляді [5]:

$$\frac{\partial g_i}{\partial X} = - \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_i^2} \frac{\partial \Delta_i}{\partial X}. \quad (25)$$

**Вихідні дані для чисельного дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на прямокутному контурі [9-11].** Перед дослідженням оптимального проектування виконується побудова скінчено-елементної моделі, яка налічує 3200 пластинчастих скінченних елементів та 3321 вузлів. Задається комбінація

зовнішнього несеміричного термосилового навантаження на оболонку мінімальної поверхні. Виконуються перевірочні розрахунки, в режимі Static та Normal Modes, назначаються унікальні property на кожен скінченний елемент. Розрахункова модель представлена на рис. 1.

Для налаштування чисельного дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації вводяться вихідні дані [10]. Цільова функція – вага і стійкість через коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$ . Змінні проектування – товщина оболонки від 1 до 200 мм. Обмежені показані, як розрахунковий опір сталі на розтяг  $R_y=260$  МПа, та  $1.1 \geq \lambda \geq 1$  нерівність, яка повинна виконуватися, щоб максимально використовувати матеріал при розрахунку на стійкість, якщо буде більше, з'являється запас, якщо  $\lambda < 1$  оболонка мінімальної поверхні втратить стійкість. Врахування геометричної нелінійності відбувається через нелінійний розрахунок Bucking, який відповідає за стійкість в геометричній нелінійній постановці, за допомогою якого при кожній ітерації відбувається перенесення дійсних вузлових переміщень на оболонку за допомогою напружено-деформованого стану [13-16].

На рис. 2-11 показані форми втрати стійкості після багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні.

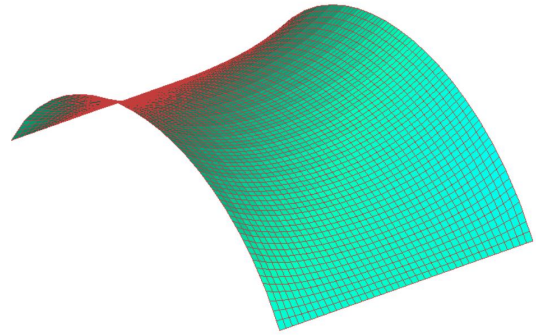


Рис 1.1 Скінчено-елементна модель оболонки мінімальної поверхні на прямокутному плані.

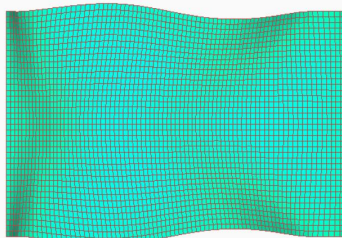


Рис. 2 Перша форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 1 1.064575

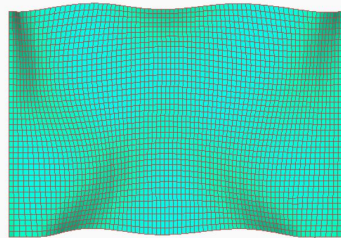


Рис. 3 Друга форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 2 1.45876

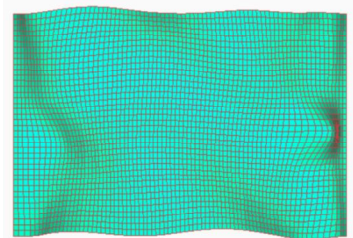


Рис. 4 Третя форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 3 1.766789

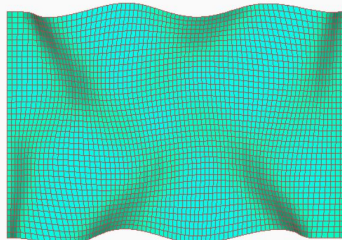


Рис. 5 Четверта форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 4 2.372464

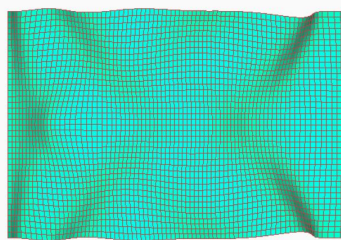


Рис. 6 П'ята форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 5 2.912275

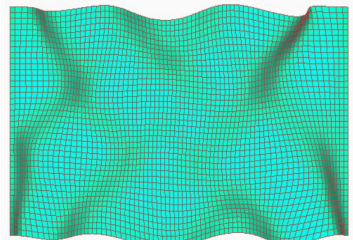


Рис. 7 Шоста форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 6 3.247316

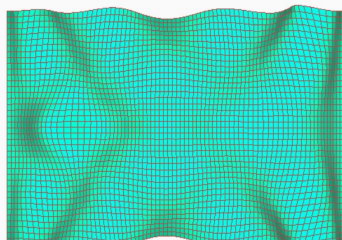


Рис. 8 Сьома форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 7 3.494616

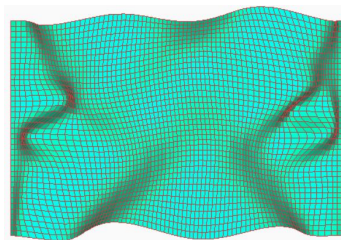


Рис. 9 Восьма форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 8 3.501654

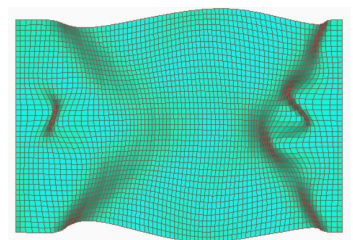


Рис. 10 Дев'ята форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 9 3.634063

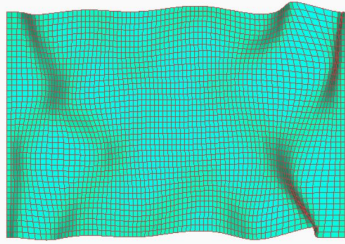


Рис. 11 Десята форма втрата стійкості.  
Eigenvalue 10 3.743928

**Результати дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на прямокутному контурі при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності.** На рис. 2-11 показано 10 форм втрати стійкості після процесу оптимального проектування оболонки мінімальної поверхні. Перша втрата стійкості настає, коли коефіцієнт  $\lambda=1.064575$ , що є фактичним обмеженням, яке відрізняється на 6.5%. Остання форма втрати стійкості показує значення  $\lambda=3.743928$ . Точка біфуркації оболонки мінімальної поверхні є фактичною

першою формою втрати стійкості. При цьому максимальні напруження по Мізесу становлять 183.7 МПа (рис. 12), що менше межі міцності в 260 МПа, для даного виду сталі.

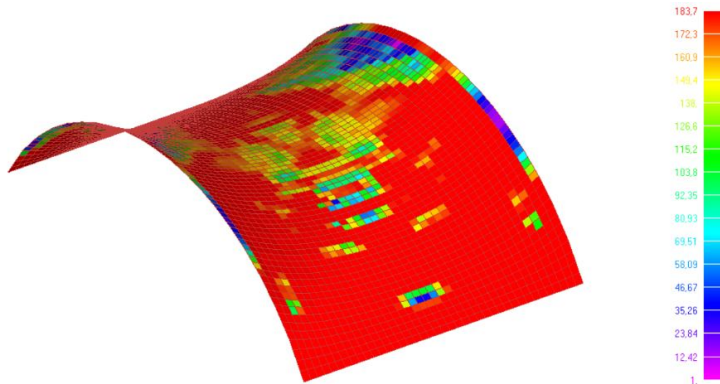


Рис. 12. Напруження по Мізесу після багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні

Дослідження цільової функції показано на рис. 13 і рис. 14. Вдалося зменшити вагу оболонки мінімальної поверхні з 52593 кг до 40391 кг, що у відсотковому еквіваленті становить 23.12%. Паралельно вдалося перерозподілити товщину оболонки мінімальної поверхні в навантажені зони, що дало можливість зменшити коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$  з 2.58 до 1.06. Такий значний результат вдалося досягти за рахунок геометрично нелінійної постановки задачі.

Початкова товщина оболонки мінімальної поверхні на прямокутному контурі становила 60 мм, після процесу оптимального проектування, товщина оболонки мінімальної поверхні коливається від 68 мм до 12 мм в залежності від області завантаженості (рис. 13). Після розгляду всіх оптимальних міцнісних характеристик приймається остаточна товщина оболонки мінімальної поверхні.

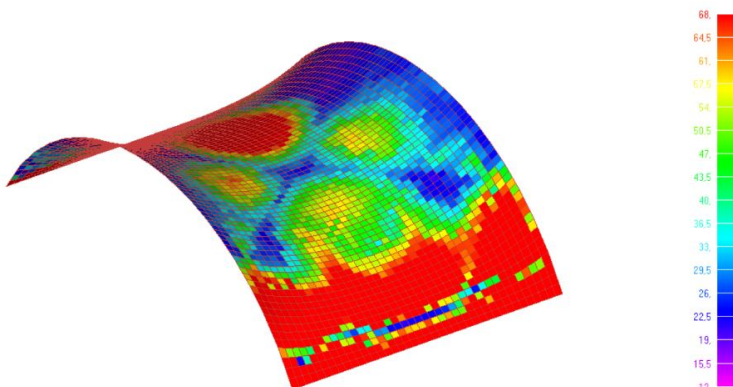


Рис. 13. Розподіл товщини оболонки після багатокритеріальної параметричної оптимізації від 68 до 12 мм

Дане чисельне дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на прямокутному контурі дає можливість до підходу оптимального проектування просторових тонкостінних конструкцій. Даний вид чисельного дослідження показує наявну можливість використання двох видів оптимізації: параметричну і морфологічну на одному досліджуваному об'єкті. Автоматизація, в підході оптимального проектування, дає можливість, з товщини 60 мм, виходити на необхідну товщину оболонки мінімальної поверхні. Високий рівень спектру застосування дає можливість дану методику використовувати для багатьох видів будівельних конструкцій із сталі та композитних матеріалів.

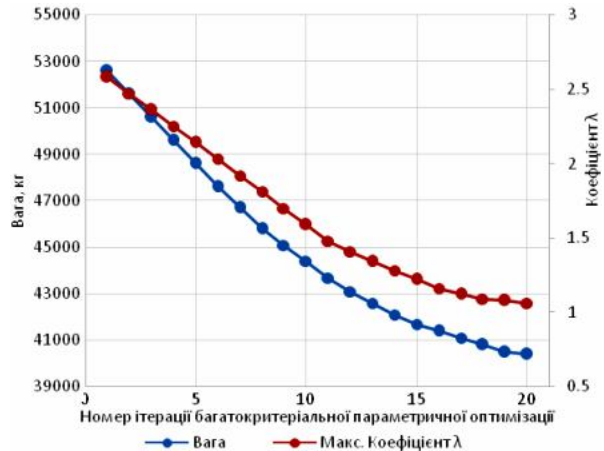


Рис. 14. графік зміни цільових функцій ваги і коефіцієнта  $\lambda$

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П. Чисельна реалізація багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на квадратному контурі при термосиловому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 109. – С. 50-65.
2. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П., Григор'єва Л.О. Чисельне дослідження параметричної оптимізації вимушених частот коливання оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі при термосиловому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 110. – С. 430-446.
3. Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Енергетична оцінка граничного стану фізично нелінійної конструкції // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 113. – С. 56-62.
4. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Затилюк Г.А. Багатокритеріальна параметрична оптимізація переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 251-271.
5. Кошевий О.О. Оптиміальне проектування циліндричних резервуарів з жорсткими оболонками покриття // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 253-265.
6. Рожок Л.С., Онищенко А.М., Крук Л.А., Найдонова З.М. Чисельний аналіз напруженого стану нетонких гофрованих циліндричних оболонок з неперервно-неоднорідних матеріалів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 113. – С. 108-115.
7. Гоцуляк С.О., Кошевий О.П., Морсков Ю.А. Чисельне моделювання оболонок, утворених мінімальними поверхнями. // Прикладна геометрія та інженерна графіка: наук.-техн. збірник. К.: КНУБА, 2001. Вип. 69. – С.47-51.
8. Лізунов П.П., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Оптимізація конструкції віброударного демпфера за допомогою інструментарію MATLAB // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 3-18.
9. Лізунов П.П., Лук'яненко О.О., Палій О.М., Костіна О.В. Власні частоти і форми параметричних коливань оболонки резервуару з недосконаlostями форми // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 58-66.
10. Дзюба А.П., Сафронова І.А., Левітіна Л.Д. Числове та експериментальне моделювання поведінки гнучких оболонкових елементів конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 110. – С. 3-20.
11. Кошевой А.П. Устойчивость пластин и оболочек сложной формы // Сопротивлению материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборник. – К.: КИСИ, 1991. – Вип. 59. – С. 65–71.
12. Мантша, Л.А. Условие оптимизации в конечномерных нелинейных задачах оптимизации. – М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2010. – 81 с.
13. Мелькумова Е.М. О некоторых подходах к решению многокритериальных задач. // Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии. – В.: ВГУ – №2 – 2010 – 3 с.
14. Пелешко І.Д., Юрченко В.В. Оптиміальне проектування металевих конструкцій на сучасному етапі (огляд праць). // Металеві конструкції: збірник наукових праць. – 2009. – №15 – С. 13–21.
15. Пелешко І.Д., Балук І.М. Оптимізація поперечних перерізів стрижнів сталевих конструкцій. // Збірник наукових праць УкрНДІПСК ім. В. М. Шимановського. – К.: Сталь, Вип. 4. – 2009. – С. 142–151.
16. Пелешко І.Д., Лисоцький Р.В., Балук І.М. Оптиміальне проектування сталевих стрижневої конструкції покриття торгово-розважального комплексу. // Збірник наукових праць УкрНДІПСК ім. В. М. Шимановського. – К.: Сталь, Вип. 5. – 2010. – С. 181–191.

17. Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кепплер Х., Кочык З. Метод конечных элементов в механике твердых тел // Издательство Вища школа. Головное издательство – Киев – 1982. – 480 с.
18. Bazenov V.A., Gaidachuk V.V., Koshevoy A.P. Stability of multiply connected ribbed shells and plates in a magnetic field // Journal of Soviet Mathematics 66(6). – 1993. – С. 2631–2636.
19. Cheung Y. K. The Finite Strip Method. Them. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p.
20. Guest J.K., Priovost J., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. – 61(2) – P.238–254.
21. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. — New York: John Wiley and Sons, 2011. — 772 p.

## REFERENCES

1. Ivanchenko H.M., Koshevyi O.O., Koshevyi O.P. Chyselna realizatsiia bahatokryterialnoi parametrychnoi optymizatsii obolonky minimalnoi poverkhni na kvadratnomu konturi pry termosylovomu navantazhenni (Numerical implementation of multicriteria parametric optimization of minimum surface shell on a square contour under thermal loading) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 109. – P. 50-65.
2. Ivanchenko H.M., Koshevyi O.O., Koshevyi O.P., Grigoryeva L.O. Chyselne doslidzhennia parametrychnoi optymizatsii vymushenykh chastot kolyvannia obolonky minimalnoi poverkhni na trapetsyevdomu konturi pry termosylovomu navantazhenni (Numerical study of the parametric optimization of the force oscillation frequencies of the shell of a minimal surface on a trapezoidal contour under thermal and power loading) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 430-446.
3. Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. Enerhetychna otsinka hranychnoho stanu fizychno nelineinoi konstruksii (Energy-Based Assessment of the Ultimate Limit State of a Physically Nonlinear Structure) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUCA, 2024. – Issue 113. – P. 56-62.
4. Ivanchenko H.M., Koshevyi O.O., Zatyliuk Gh.A. Bahatokryterialna parametrychna optymizatsiia peremishchennia i vahy obolonky minimalnoi poverkhni na kruhlomu konturi, sheho skladaetsia iz dvokh pokhylykh elipsiv pry termosylovomu navantazhenni z urakhuvanniam heometrychnoi nelineinosti (Multi-criteria parametric optimization of the displacement and weight of a shell of a minimum surface on a circular contour consisting of two inclined ellipses under thermal and power loading with consideration of geometric nonlinearity) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 209-221.
5. Koshevyi O.O. Optymalne proektuvannia tsylindrychnykh rezervuariv z zhorstkymy obolonkami pokryttia. (Optimal design of cylindrical tanks with rigid coating shells) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUCA, 2019. – №. 103. – P. 253-265.
6. Rozhok L.S., Onishchenko A.M., Kruk L.A., Naidonova Z.M. Chyselnyi analiz napruzhenoho stanu netonykh hofrovanykh tsylindrychnykh obolonok z nepererвно-neodnorodnykh materialiv (Numerical analysis of the stress state of non-thin corrugated cylindrical shells made of continuous-inhomogeneous materials) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 108-115.
7. Hotsulyak Ye.O., Koshevyi O.P., Morskoy Yu.A. Chyselne modelivannia obolonok, utvorenykh minimalnymy poverkhniamy.. (Numerical modeling of shells formed by minimal surfaces) // Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika: nauk.-tekhn. zbirnyk. K.: KNUBA. 2001. №. 69. - P.47-51.
8. Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. Optymizatsiia konstruksii vibroudarnoho dempera za dopomohoiu instrumentarii MATLAB (Optimization of a vibro-impact damper design using MATLAB tools) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA. 2024. – Issue 112. – P. 3-18.
9. Lizunov P.P., Lukianchenko O.O., Paliy O.M., Kostina O.V. Vlasni chastoty i formy parametrychnykh kolyvan obolonky rezervuaru z nedoskonalostiamy formy (Natural frequencies and modes of parametric vibrations of reservoir shell with shape imperfections) // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2024. – Issue. 112. – P. 58-66.
10. Dzyuba A.P., Safronova I.A., Levitina L.D. Chyslove ta eksperymentalne modelivannia povedinky hnuchkykh obolonkovykh elementiv konstruksii (Numerical and experimental modeling of the behavior of flexible shell elements of structures) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUCA, 2023. – Issue 110. – P. 3-20.
11. Koshevoy A.P. Ustoychivost plastin i obolochek slozhnoy formi (Stability of plates and shells of complex shape) // Soprotivleniye materialov i teoriiy sooruzheniy: nauch.-tekhn. zbornik. – K.: KISI, 1991. – Vip. 59. – P. 65–71.
12. Manyta L.A. Uslovia optimizatsii v konechnomernykh nelineynykh zadachakh optimizatsii (Optimization condition in finite-dimensional nonlinear optimization problems). – M.: Moskovskiy gosudarstvenniy instytut élektroniky i matematiki, 2010. – 81 p.
13. Melkumova E.M. O nekotorykh podkhodakh k resheniiu mnogokryterialnykh zadach. (About some approaches to solving multicriteria problems). // Vestnyk VHU. Seriya Systemnyi analiz i informatsionniye tekhnologii. – V.: VHU – №2– 2010–3 p.
14. Peleshko I.D., Yurchenko V.V. Optymalne proektuvannia metalevykh konstruksii na suchasnomu etapi (ohliad prats). (Optimal design of metal structures at the present stage (review of works)). // Metalevi konstruksii: zbirnyk naukovy kh prats. – 2009. – №15 – P. 13–21.
15. Peleshko I.D., Baluk I.M. Optymizatsiia poperechnykh pereriziv stryzhniv stalevykh konstruksii (Optimization of cross-sections of rods of steel structures). // Zbirnyk naukovy kh prats UkrNDIPSKim. V. M. Shymanovskoho. – K.: Stal, №. 4. – 2009. – P. 142–151.
16. Peleshko I.D., Lisotskyy R.V., Baluk I.M. Optymalne proektuvannia stalevoi stryzhnevoi konstruksii pokryttia torhovoro-zvazhalnogo kompleksu. (Optimal design of a steel rod cover structure of a shopping and entertainment complex). // Zbirnyk naukovy kh prats UkrNDIPSKim. V. M. Shymanovskoho. – K.: Stal, №. 5. – 2010. – P. 181–191.

17. *Sakharov A.S., Kyslookyy V.N., Kyrychevskyy V.V., Altenbakh Y., Habbert U., Dankert YU., Keppler KH., Kochyk Z.* Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel (Finite element method in solid mechanics). // Vydavnytstvo Vysshcha shkola. Holovnoe izdatelstvo – Kiev – 1982. – 480 p.
18. *Bazenov V.A., Gaidaichuk V.V., Koshevoy A.P.* Stability of multiplyconnected ribbed shells and plates in a magnetic field. // Journal of Soviet Mathematics 66(6). – 1993. – С. 2631–2636.
19. *Cheung Y. K.* The Finite Strip Method. Them. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p.
20. *Guest J.K., Priovost J., Belytschko T.* Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. – 61(2) – P.238–254.
21. *Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I.* Hand book of Monte Carlo Methods. — New York: John Wiley and Sons, 2011. — 772 p.

Стаття надійшла 23.03.2026

*Косшевий О.О., Заватський С.В.*

### **ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ СТІЙКОСТІ ОБОЛОНКИ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ НА ПРЯМОКУТНОМУ КОНТУРІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Оптимальне проектування просторових тонкостінних конструкцій розвивається з 50-х років ХХ століття. В загальному випадку, при дослідженні оптимального проектування, є визначення всіх оптимізованих міцнісних характеристик за II групами граничних станів. До таких міцнісних характеристик відносяться: міцність, стійкість, прогини, деформації в просторових тонкостінних конструкціях. Реалізація оптимального проектування з такими міцнісними характеристиками відбувається одночасно з вагою просторової тонкостінної конструкцією.

Багатокритеріальна параметрична оптимізація формується за рахунок врахування в математичний апарат, та методики дослідження просторової тонкостінної конструкції одразу двох цільових функцій. До яких відносяться вага або об'єм, та міцнісна характеристика. До таких цільових функцій відносяться: вага і міцність, вага і стійкість, вага і прогини, вага та вимушені чи власні частоти коливання просторової тонкостінної конструкції. Специфіка таких досліджень полягає в тому, що при дослідженні таких цільових функцій необхідно залучати 3 різні види розрахунку.

Задачі оптимального проектування, можна використовувати в лінійній, так і в нелінійних постановках. До нелінійної постановки відносяться геометрична та фізична. В даній науковій статті розглядається геометрична нелінійна постановка, яка дає можливість врахувати дійсні переміщення та напруження, під час знаходження точки біфуркації. Коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$  – це фактично точка біфуркації оболонки мінімальної поверхні.

Використання такого алгоритму веде до нового підходу, при проектуванні будівельних конструкцій. Даний вид оптимального проектування є важливим економічним ефектом при створенні майбутньої конструкції. Такий підхід дає можливість використовувати не тільки для оболонок, а і для стержневих та плоских конструкцій. Важливим аспектом є матеріал, який повинен бути ізотропним, до них відносяться метали та композити.

Дослідження цільової функції показано на графіку 1.14. Вдалося зменшити вагу оболонки мінімальної поверхні з 52593 кг до 40391 кг, що у відсотковому еквіваленті становить 23.12%. Паралельно вдалося перерозподілити товщину оболонки мінімальної поверхні в навантажені зони, що дало можливість зменшити коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$  з 2.58 до 1.06. Такий значний результат вдалося досягти за рахунок геометрично нелінійної постановки задачі. Автоматизація, в підході оптимального проектування, дає можливість виходити на необхідну товщину оболонки мінімальної поверхні.

**Ключові слова:** оптимізація, параметрична оптимізація, багатокритеріальна оптимізація, оптимізація цільової функції, змінні проектування, обмеження, оболонки мінімальних поверхонь, геометрична нелінійність, метод скінченних елементів, оптимальне проектування.

*Kosheviy O.O., Zavatskiy S.V.*

### **OPTIMAL DESIGN OF THE STABILITY OF A MINIMUM SURFACE SHELL ON A RECTANGULAR CONTOUR WITH ACCOUNTING FOR GEOMETRIC NONLINEARITY UNDER THERMO-STRESS LOADING**

The field of optimal design for spatial thin-walled structures has been developing since the 1950s. In general, when studying optimal design, one must determine all optimized strength characteristics based on the second group of limit states. These strength characteristics include: strength, stability, deflections, and deformations in spatial thin-walled structures. The implementation of optimal design with these strength characteristics occurs simultaneously with the weight of the spatial thin-walled structure.

Multi-criteria parametric optimization is achieved by incorporating two objective functions simultaneously into the mathematical framework and research methodology for spatial thin-walled structures. These include weight or volume, and strength characteristics. Such objective functions include: weight and strength, weight and stability, weight and deflections, and weight and forced or natural frequencies of vibration of a spatial thin-walled structure. The specificity of such studies lies in the fact that when investigating these objective functions, it is necessary to employ three different types of calculations.

Optimal design problems can be formulated in both linear and nonlinear settings. Nonlinear formulations include geometric and physical ones. This scientific article examines the geometric nonlinear formulation, which allows for the consideration of actual displacements and stresses when determining the bifurcation point. The instability coefficient  $\lambda$  is, in fact, the bifurcation point of the minimal surface.

The use of this algorithm leads to a new approach in the design of building structures. This type of optimal design offers significant economic benefits when creating future structures. This approach can be applied not only to shell structures but also to beam and plate structures. An important aspect is the material, which must be isotropic; this includes metals and composites.

The analysis of the objective function is shown in Figure 1.14. We were able to reduce the weight of the minimal surface shell from 52,593 kg to 40,391 kg, which represents a 23.12% reduction. At the same time, we were able to redistribute the thickness of the minimal surface shell to the loaded zones, which made it possible to reduce the buckling coefficient  $\lambda$  from 2.58 to 1.06. This significant result was achieved through a geometrically nonlinear formulation of the problem. Automation, in the optimal design approach, makes it possible to determine the required thickness of the minimal surface shell.

**Keywords:** optimization, parametric optimization, multicriteria optimization, objective function optimization, design variables, constraints, minimum surface envelopes, geometric nonlinearity, finite element method, optimal design.

УДК 539.3

*Kosheviy O.O., Zavaцький С.В.* **Оптимальне проектування стійкості оболонки мінімальної поверхні на прямокутному контурі з урахуванням геометричної нелінійності при термосиловому навантаженні** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2026. – Вип. 116. – С. 470-480. Таб. 0. Іл. 13. Бібліогр. 21 назв.

UDS 539.3

*Kosheviy O.O., Zavaцьkyi S.V.* **Optimal design of the stability of a minimum surface shell on a rectangular contour with accounting for geometric nonlinearity under thermo-stress loading** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2026. – Issue 116. – P. 470-480. Tabl. 0. Il. 13. Ref. 21.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор філософії (Ph.D.), доцент, доцент кафедри теоретичної механіки КОШЕВИЙ Олександр Олександрович

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітряних Сил проспект, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОШЕВому Олександр Олександровичу

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-36

**E-mail:** a380982070137@gmail.com.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-1903-2905>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри архітектури та дизайну ЗАВАЦЬКИЙ Сергій Володимирович

**Адреса:** 14030 Україна, м. Чернігів, вул. Шевченка 95, Національний університет «Чернігівська політехніка», ЗАВАЦЬКОМУ Сергію Володимировичу

**Робочий тел.:** +38(044) 248-32-37

**E-mail:** s.zavatski@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-8307-1554>