

УДК 004.942:539.3:69.04

МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗМОМЕНТНИХ ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ВЕКТОРНИМИ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРИЧНИМИ КРИВИМИ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

М.О. Терещук¹,
канд. техн. наук

Г.А. Вірченко²,
д-р техн. наук, професор

В.І. Савенко¹,
д-р техн. наук (ФРН), професор

Т.А. Гончаренко¹,
д-р техн. наук, професор

¹ Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

² Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ

DOI: 10.32347/2410-2547.2026.116.450-459

Розглянуто моделювання безмоментних тонкостінних оболонок обертання з використанням векторних раціональних параметричних кривих другого степеня, які реалізують ефективне комп'ютерне визначення складних архітектурних форм. Запропонований підхід проілюстровано на прикладі куполів православних храмів і каплиць, що особливо актуально в нинішніх умовах війни в Україні, коли все більше людей звертаються за допомогою до всевишніх сил. Акцентовано на важливості вирішення питань належного забезпечення міцності створюваних будівельних конструкцій під час ескізного проєктування, розв'язання зазначених задач у поєднанні з виконанням інших відповідних завдань.

Ключові слова: міцність будівельних конструкцій, тонкостінні оболонки обертання, осесиметричне навантаження, меридіональні та кільцеві зусилля, векторні раціональні параметричні криві, моделювання куполів православних храмів і каплиць.

Вступ. Нинішній історичний етап існування України характеризується тяжкими випробуваннями, пов'язаними з воєнними діями на її території. Це стосується загибелі та каліцтва людей, знищення інфраструктури міст і сіл. Значні руйнування зачіпають також сакральні архітектурні об'єкти. У такі скрутні часи громадяни часто звертаються за допомогою до всевишніх сил. За віросповіданням більшу частину населення нашої держави становлять православні християни. Тому актуальною проблемою є відбудова пошкоджених та зведення нових храмів. Через обмежені матеріальні можливості парафіян зараз доволі популярне спорудження різноманітних каплиць, зокрема, меморіальних, поминальних, придорожніх тощо. Куполи – це найголовніші компоненти вказаних будівель, оскільки уособлюють собою небесну святість. Акцентовані конструкції, з одного боку, повинні відповідати існуючим релігійним канонам, а з другого, мати естетичну привабливість, виключати повторюваність своїх форм і розмірів. Остання вимога обумовлює потребу в гнучких засобах геометричного моделювання. У літературних джерелах розглядаються сферичні, конічні, еліпсоїдні, параболоїдні, гіперболоїдні та торові поверхні куполів, визначені в алгебраїчному вигляді. Наявний досвід проєктування складних технічних об'єктів у вітчизняній авіаційній галузі свідчить про продуктивне застосування для цього векторних раціональних параметричних кривих другого степеня. Поширення зазначеного підходу на архітектурно-будівельне формоутворення куполів та дефініцію меридіональних і кільцевих зусиль при осесиметричному навантаженні становить предмет даної наукової праці.

Аналіз публікацій. Базові положення стосовно розрахунків на міцність оболонок перенесення та обертання (циліндричних, конічних, сферичних, еліпсоїдних, параболоїдних, гіперболоїдних, торових) докладно викладено в дослідженнях [1-3]. Це стосується діючих навантажень, внутрішніх зусиль і деформацій, безмоментної та моментної теорій. У виданні [4] наведено основні відомості з архітектурного проєктування православних храмів, зокрема щодо

багатоманітних куполів (шатрових, конусних, яйце- і грушоподібних, цибульчастих, півциркульних і т.д.). Статті [5-7] присвячено структурно-параметричному формоутворенню зазначених будівельних конструкцій, перевагами якого є забезпечення ефективного комп'ютерного варіантного геометричного моделювання вказаних об'єктів для здійснення їхньої оптимізації. При цьому використовуються складені твірні з векторних раціональних параметричних кривих другого степеня, що при обертанні навколо вертикальної осі реалізують потрібні конічні, яйце- і грушоподібні, цибульчасті та інші контури. Подано належний математичний апарат визначення відповідних поверхонь, обчислення площ й обмежуваних об'ємів. Окреслені характеристики суттєво впливають не тільки на естетичний вигляд та індивідуальність проєктованих храмів, а й на їхню міцність, вартість зведення, подальшу експлуатацію, довговічність тощо. Зазвичай акцентовані властивості доволі суперечливі, тому вимагають комплексної оптимізації, яка пов'язана з проведенням багатьох ітерацій. Як правило узгодження вимог різних дисциплін здійснюється завдяки спільному застосуванню геометричних моделей у середовищі сучасних комп'ютерних інформаційних технологій.

Мета та завдання дослідження полягають у розробці математичного апарату використання векторних раціональних параметричних кривих другого степеня для підвищення гнучкості та продуктивності моделювання безмоментних тонкостінних оболонок обертання. Бажану ціль досягнуто шляхом узагальнення методології формоутворення цих об'єктів. Напрацьовані теоретичні здобутки продемонстровано на конкретних практичних прикладах.

Отримані результати. Для ілюстрації запропонованого підходу формоутворення серединних поверхонь тонкостінних оболонок обертання за початковий варіант взято наведений у виданні [3] розрахунок меридіональних та кільцевих зусиль півсфери під дією її власної ваги (рис. 1).

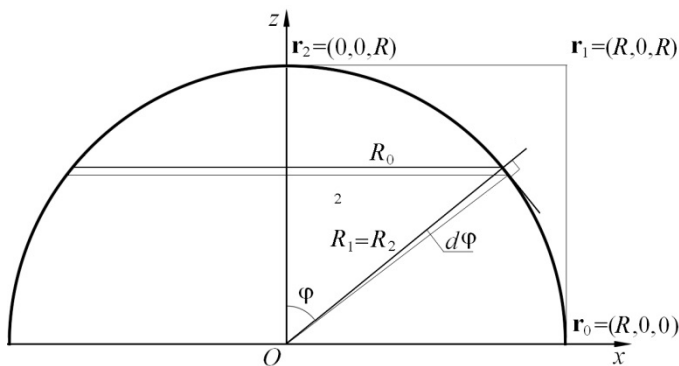


Рис. 1. Геометрія сферичної оболонки

Дана поверхня визначається радіусом R . Її центр знаходиться в початку прямокутної системи координат $Oxyz$. Для довільної точки цієї фігури у площині Oxz маємо: R_0 , R_1 – відповідно радіус кривини паралелі та меридіана, R_2 – довжина нормалі поверхні до осі обертання z , φ – кут між нею та R_2 . Двома близькими паралелями зображено елементарну ділянку поверхні. Для геометричного моделювання

будемо застосовувати векторну раціональну параметричну криву другого степеня

$$\mathbf{r}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2wu(1-u)\mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2}{(1-u)^2 + 2wu(1-u) + u^2}, \quad (1)$$

де $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (R, 0, 0)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (R, 0, R)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, R)$ – радіус-вектори вершин характеристичної ламаної; $w \geq 0$ – ваговий коефіцієнт вершини \mathbf{r}_1 ; $u \in [0, 1]$ – параметр.

Лінія (1) починається в \mathbf{r}_0 , закінчується в \mathbf{r}_2 . Відрізки $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1$ – це дотичні у вказаних її кінцевих точках. Дуга кола кутової величини γ , де $0 < \gamma < \pi$, реалізується при $w = \cos(\gamma/2)$. У нашому випадку

$$w = \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\pi/2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Якщо \mathbf{r}_1 лежить на $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_2$ або $w=0$, то лінія (1) буде відрізком прямої. Для $0 < w < 1$, $w=1$, $w > 1$ маємо відповідно дугу еліпса, параболи та гіперболи.

Згідно з роботою [3] меридіональне зусилля на одиницю довжини

$$N_\varphi = -\frac{W}{2\pi R_2 \sin^2 \varphi} = -\frac{W}{2\pi R_0 \sin \varphi}, \quad (3)$$

де W – вертикальне навантаження на оболонку на горизонтальному рівні, визначеному кутом φ , обчислюється (див. рис. 1) як

$$W = q \int_0^{\varphi} 2\pi R_0 R_1 d\varphi = 2\pi q \int_0^{\varphi} R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi, \quad (4)$$

де q – вага одиниці площі оболонки.

Кільцеве зусилля N_{θ} знаходиться з рівняння Лапласа

$$\frac{N_{\varphi}}{R_1} + \frac{N_{\theta}}{R_2} + Z = 0, \quad (5)$$

де Z – це навантаження всередину поверхні нормально до неї на одиницю площі,

$$Z = q \cos \varphi. \quad (6)$$

На підставі співвідношень (3) ... (6), беручи до уваги рівність $R_1=R_2=R$,

$$N_{\varphi} = -\frac{qR}{1 + \cos \varphi}, \quad (7)$$

$$N_{\theta} = qR((1 + \cos \varphi)^{-1} - \cos \varphi). \quad (8)$$

Графіки формул (7) і (8) показано на рис. 2.

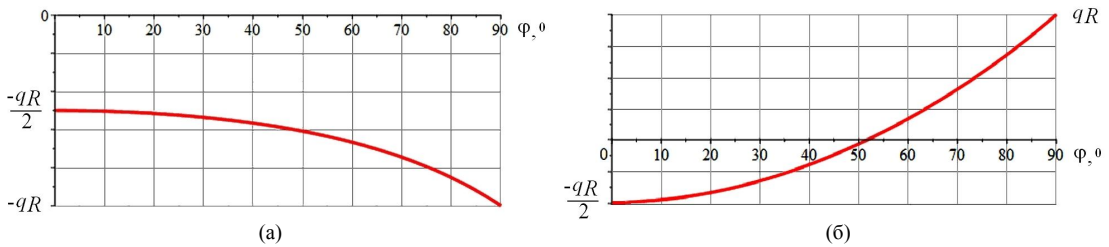


Рис. 2. Зусилля оболонки: (а) – меридіональні; (б) – кільцеві

Нульова величина кільцевих зусиль реалізується кутом

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 51,827^\circ. \quad (9)$$

Для розрахунку радіусів R_1 кривини ліній (1) та величин R_2 застосуємо

$$x'(u) = \frac{2(1-2u)w(x_1-x_0) + u(u(w-1)+1)(x_2-x_0)}{p^2(u)}, \quad (10)$$

$$z'(u) = \frac{2(1-2u)w(z_1-z_0) + u(u(w-1)+1)(z_2-z_0)}{p^2(u)}, \quad (11)$$

$$p(u) = 2u(1-u)(w-1) + 1. \quad (12)$$

Тоді

$$R_1(u) = \frac{ds(u)^3}{|x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u)|}, \quad (13)$$

$$R_2(u) = \frac{ds(u)}{|z'(u)|}, \quad (14)$$

де $ds(u) = \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}$.

Навантаження на оболонку від її ваги

$$W(u) = 2\pi q \int_u^1 x(u) ds(u) du. \quad (15)$$

Далі

$$N_{\varphi}(u) = -\frac{W(u)}{2\pi x(u)|z'(u)|/ds(u)}, \quad (16)$$

$$N_{\theta}(u) = R_2(u)(-q|x'(u)|/ds(u) - N_{\varphi}(u)/R_1(u)). \quad (17)$$

Кут φ для поточної величини u

$$\varphi(u) = \arctg(|z'(u)|/|x'(u)|). \quad (18)$$

Співвідношення (1), (10) ... (18) забезпечують дефініцію меридіональних і кільцевих зусиль еліпсоїдних, параболоїдних, гіперболоїдних та інших тонкостінних оболонок обертання під дією осесиметричних навантажень. Виконаємо це за допомогою чисельних методів. Порівняємо результати згідно з методикою [3] та запропонованим підходом для сталеві півсферичної оболонки товщиною $\delta=0,001$ м і радіусом $R=1$ м, що являє собою купол православної каплиці або храму. Маємо вагу одиниці її площі

$$q \approx 77 \text{ Н/м}^2. \quad (19)$$

Формули (16), (17) апроксимовані поліномами четвертого степеня методом найменших квадратів

$$\begin{aligned} N_{\varphi}(\varphi) &= a_4\varphi^4 + a_3\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0 = \\ &= -5,4418 \cdot 10^{-7} \varphi^4 + 4,6765 \cdot 10^{-5} \varphi^3 - 4,8276 \cdot 10^{-3} \varphi^2 + 2,708 \cdot 10^{-2} \varphi - 38,58, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N_{\theta}(\varphi) &= b_4\varphi^4 + b_3\varphi^3 + b_2\varphi^2 + b_1\varphi + b_0 = \\ &= 3,3956 \cdot 10^{-7} \varphi^4 - 5,6534 \cdot 10^{-5} \varphi^3 + 1,6921 \cdot 10^{-2} \varphi^2 - 3,202 \cdot 10^{-2} \varphi - 38,4, \end{aligned} \quad (21)$$

де $\varphi \in [0^{\circ}, 90^{\circ}]$, N_{φ} і N_{θ} в Н/м.

Для виразу (20) максимальна похибка дорівнює 0,142 Н/м при $\varphi=90^{\circ}$ (-76,858 Н/м замість -77 Н/м), $\approx 0,18\%$, для співвідношення (21) – 0,156 Н/м при $\varphi=90^{\circ}$ (76,844 Н/м проти 77 Н/м), тобто $\approx 0,2\%$. У точці $\varphi=0^{\circ}$ величина (20) -38,58 Н/м, не -38,5 Н/м, відхилення 0,08 Н/м, похибка $\approx 0,21\%$, для залежності (21) маємо -38,4 Н/м замість -38,5 Н/м, тобто відхилення 0,1 Н/м або $\approx 0,26\%$. Нульове кільцеве зусилля (21) реалізується кутом $\varphi=51,847^{\circ}$. Порівняно з величиною (9) похибка $0,02^{\circ}$ або $\approx 0,04\%$. Рис. 3 ілюструє проаналізовану інформацію.

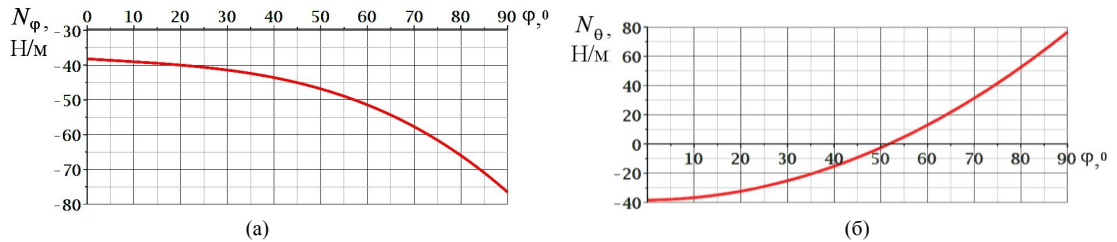


Рис. 3. Зусилля сталеві півсферичної оболонки товщиною $\delta=0,001$ м та радіусом $R=1$ м:
(а) – меридіональні; (б) – кільцеві

Розглянемо ще один приклад, наведений у дослідженні [3]. Це стосується розрахунку меридіональних і кільцевих зусиль конічних безмоментних тонкостінних оболонок під дією осесиметричних навантажень від власної ваги. У серединній поверхні, яка визначена кутом α між віссю обертання і твірною, для параметра s уздовж останньої діють зусилля

$$N_s = -\frac{qs}{2 \cos \alpha}, \quad N_{\theta} = -\frac{qs \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, \quad (22)$$

де N_s – меридіональні зусилля, N_{θ} – кільцеві зусилля, q – вага одиниці площі згідно з (19).

Порівняємо результати (22) та запропонованого методу для сталеві конічної оболонки товщиною $\delta=0,001$ м, радіусом $R=1$ м основи, висотою $H=2$ м, що може бути куполом православної сакральної будівлі. Маємо наступну геометрію:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{R}{H}\right) = \arctg\left(\frac{1 \text{ м}}{2 \text{ м}}\right) \approx 26,565^{\circ}, \quad (23)$$

$$L = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{(1\text{ м})^2 + (2\text{ м})^2} \approx 2,236\text{ м}, \quad (24)$$

де L – довжина твірної.

З використанням залежностей (22) ... (24)

$$N_s = -\frac{qs}{2 \cos \alpha} = -\frac{77\text{ Н/м}^2}{2 \cos 26,565^0} \cdot s \approx -43,044 \cdot s\text{ Н/м}, \quad (25)$$

$$N_\theta = -\frac{qs \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{77\text{ Н/м}^2 \cdot \sin^2(26,565^0)}{\cos 26,565^0} \cdot s = -17,218 \cdot s\text{ Н/м}, \quad (26)$$

де параметр s у метрах.

Співвідношення (25) і (26) є лінійними функціями від s . У характерних кінцевих точках належні впорядковані трійки (s ; N_s ; N_θ)

$$(0\text{ м}; 0\text{ Н/м}; 0\text{ Н/м}), (2,236\text{ м}; -96,25\text{ Н/м}; -38,5\text{ Н/м}). \quad (27)$$

Для збереження запропонованого узагальненого підходу до формоутворення застосуємо апроксимацію прямолінійної твірної конічної поверхні лінією (1). Тоді для радіус-векторів $\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2=(x_2, y_2, z_2)$ вершин її характеристичної ламаної (див. рис. 1) маємо

$$x_0 > 0, x_2 = 0, x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2} + x_\Delta = \frac{x_0}{2} + x_\Delta, \quad (28)$$

$$y_0 = y_1 = y_2 = 0, \quad (29)$$

$$z_0 = 0, z_2 > 0, z_1 = \frac{z_0 + z_2}{2} = \frac{z_2}{2}, \quad (30)$$

де x_Δ – достатньо мале число, порівняно з $0,5 \cdot x_0$, яке керує розміром області розташування твірної.

Прийемо, що $x_0=R$ – це радіус основи, а $z_2=H$ є висотою конічної поверхні. На підставі залежностей (28) ... (30)

$$\mathbf{r}_0 = (R, 0, 0), \mathbf{r}_1 = (R/2 + x_\Delta, 0, H/2), \mathbf{r}_2 = (0, 0, H). \quad (31)$$

Для величин $R=1\text{ м}$, $\Delta=1^{-6}\text{ м}$, $H=2\text{ м}$, $q=77\text{ Н/м}^2$ (сталева оболонка товщиною $\delta=0,001\text{ м}$) за допомогою математичного апарату (1), (10) ... (18), (28) ... (31) отримано зусилля

$$N_\varphi(\varphi) = -1,40963215 \cdot 10^4 \varphi^4 - 8,20078723 \cdot 10^1 \varphi^3 + 1,087018874 \cdot 10^6 \varphi^2 + 2,735631 \cdot 10^2 \varphi + 6,07507, \quad (32)$$

$$N_\theta(\varphi) = -0,563743549 \varphi^4 - 3,28165832 \cdot 10^1 \varphi^3 + 4,34848767 \cdot 10^3 \varphi^2 + 1,0943562 \cdot 10^2 \varphi + 2,43026, \quad (33)$$

де $\varphi \in [\varphi_{\min}=63,43490299^0; \varphi_{\max}=63,43499466^0]$, N_φ та N_θ в Н/м.

З формули (23) видно, що точний кут $\varphi=90^0-26,565^0=63,435^0$. Для виразу (32) максимальна похибка апроксимації дорівнює $0,068\text{ Н/м}$ при $\varphi=63,434948^0$ ($-46,96\text{ Н/м}$ замість $-47,028\text{ Н/м}$), тобто $\approx 0,14\%$, а для співвідношення (33) становить $0,033\text{ Н/м}$ при $\varphi=63,434976^0$ ($-30,759\text{ Н/м}$ проти $-30,792\text{ Н/м}$), тобто $\approx 0,11\%$. Замість значень (27) вихідні величини $N_\varphi(\varphi_{\min})=-0,0096\text{ Н/м}$, $N_\theta(\varphi_{\min})=-0,0039\text{ Н/м}$, $N_\varphi(\varphi_{\max})=-96,25\text{ Н/м}$, $N_\theta(\varphi_{\max})=-38,5\text{ Н/м}$. Згідно із залежностями (32) та (33) маємо $N_\varphi(\varphi_{\min})=-0,01\text{ Н/м}$, $N_\theta(\varphi_{\min})=0,00\text{ Н/м}$, $N_\varphi(\varphi_{\max})=-96,25\text{ Н/м}$, $N_\theta(\varphi_{\max})=-38,49\text{ Н/м}$. Для φ_{\max} відхилення меридіональних зусиль $\approx 0\%$, а кільцевих $\approx 0,026\%$. Зауважимо, що дефініція оптимальної апроксимації не становить предмет досліджень даної статті. Графіки зусиль оболонки показано на рис. 4.

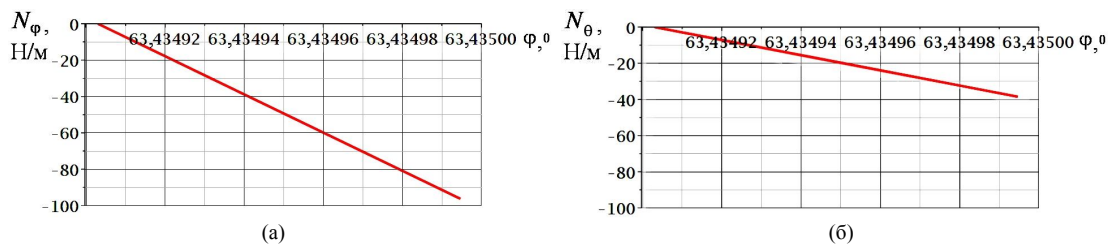


Рис. 4. Зусилля сталєї конічної оболонки товщиною $\delta=0,001\text{ м}$, радіусом $R=1\text{ м}$ основи та висотою $H=2\text{ м}$:
(а) – меридіональні; (б) – кільцеві

Розглянемо ще проектування сталеві тонкостінної параболоїдної оболонки. Нехай (див. рис. 1) радіус її основи $R=1$ м, а висота $H=2$ м. З метою спрощення подальших математичних викладок вважатимемо, що тепер початок системи координат $Oxyz$ розташований у максимально високій точці, а вісь z направлена вертикально вниз. Тоді рівняння твірної, яка лежить у площині Oxz , для опрацьовуваної серединної поверхні має вигляд

$$z(x) = \frac{H}{R^2} x^2. \quad (34)$$

Радіус кривини цієї параболи

$$R_1 = \frac{(1 + z'(x)^2)^{3/2}}{|z''(x)|}. \quad (35)$$

З виразу (34) та рис. 1

$$z'(x) = \frac{2H}{R^2} x = \operatorname{tg} \varphi, \quad (36)$$

$$z''(x) = \frac{2H}{R^2}. \quad (37)$$

Із застосуванням залежностей (35) ... (37)

$$R_1 = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{3/2} R^2}{2H}. \quad (38)$$

Оскільки

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 / \cos^2 \varphi, \quad (39)$$

то співвідношення (38) перетворюється в

$$R_1 = \frac{R^2}{2H \cos^3 \varphi}. \quad (40)$$

З рис. 1 видно, що

$$R_2 = \frac{x}{\sin \varphi} = \frac{x}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi}. \quad (41)$$

На підставі виразу (36) радіус (41) записується як

$$R_2 = \frac{R^2}{2H \cos \varphi}. \quad (42)$$

Меридіональні зусилля N_φ на горизонтальному рівні кута φ (див. рис. 1) отримуємо з умови рівноваги належної частини оболонки вагою $W(\varphi)$. Тоді

$$N_\varphi(\varphi) = -\frac{W(\varphi)}{2\pi x \sin \varphi}. \quad (43)$$

Далі

$$W(\varphi) = q \cdot S(\varphi), \quad (44)$$

де $S(\varphi)$ – площа оболонки вище горизонтального рівня, який відповідає поточній величині φ ; q – вага одиниці площі згідно з (19).

З використанням співвідношень (40) та (42)

$$S(\varphi) = 2\pi \int_0^\varphi R_2 \sin \varphi R_1 d\varphi = 2\pi \int_0^\varphi \frac{R^2}{2H \cos \varphi} \sin \varphi \frac{R^2}{2H \cos^3 \varphi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2H^2} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi. \quad (45)$$

Обчислюємо цей інтеграл за допомогою заміни

$$t = \cos \varphi. \quad (46)$$

Тоді

$$dt = -\sin \varphi d\varphi. \quad (47)$$

З виразу (45), враховуючи залежності (46) і (47), маємо

$$\int \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi = - \int t^{-4} dt = \frac{t^{-3}}{3} = \frac{\cos^{-3} \varphi}{3}. \quad (48)$$

Визначений інтеграл (48) для проміжку від 0 до φ дорівнює

$$(\cos^{-3} \varphi - 1)/3. \quad (49)$$

Із застосуванням формул (48), (45), (44) та (36) меридіональні зусилля (43)

$$N_{\varphi}(\varphi) = - \frac{\frac{q\pi R^4}{6H^2} (\cos^{-3} \varphi - 1)}{2\pi \frac{R^2}{2H} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi} = - \frac{qR^2 \cos \varphi}{6H \sin^2 \varphi} (\cos^{-3} \varphi - 1). \quad (50)$$

Згідно з рівняннями (5), (6) і (50) кільцеві зусилля

$$N_{\theta}(\varphi) = - \frac{qR^2}{2H} + \frac{qR^2 \cos^3 \varphi}{6H \sin^2 \varphi} (\cos^{-3} \varphi - 1) = - \frac{qR^2}{2H} - N_{\varphi} \cos^2 \varphi. \quad (51)$$

При $\varphi=0$ у виразах (50) та (51) виникає невизначеність 0/0. Її розкриття забезпечує дефініцію навантажень у вершині параболоїда. У цій точці

$$\cos \varphi \approx 1, \sin \varphi \approx \varphi, \cos^{-3} \varphi \approx (1 - \frac{\varphi^2}{2})^{-3} \approx 1 + \frac{3\varphi^2}{2}. \quad (52)$$

Останню властивість (52) отримано спочатку за допомогою ряду Маклорена, а потім залежності $(1+a)^n \approx 1+na$ для достатньо малих a , де $n \in \mathbb{Z}$. Підстановкою розглянутих наближень у співвідношення (50) і (51) одержуємо

$$N_{\varphi}(0) \approx - \frac{qR^2 \cdot 1}{6H \cdot \varphi^2} \left(1 + \frac{3\varphi^2}{2} - 1\right) = - \frac{qR^2}{4H} = - \frac{77 \text{ Н/м}^2 \cdot (1 \text{ м})^2}{4 \cdot 2 \text{ м}} = -9,625 \text{ Н/м}, \quad (53)$$

$$N_{\theta}(0) \approx - \frac{qR^2}{2H} + \frac{qR^2 \cdot 1^3}{6H \cdot \varphi^2} \left(1 + \frac{3\varphi^2}{2} - 1\right) = - \frac{qR^2}{4H} = -9,625 \text{ Н/м}. \quad (54)$$

Оскільки φ дорівнює куту нахилу дотичної до параболи, то на підставі формули (36) для $x=R$ маємо належне максимальне значення

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \left(\frac{2H}{R^2} R \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2H}{R} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot 2 \text{ м}}{1 \text{ м}} \right) \approx 75,964^\circ. \quad (55)$$

Побудовані відповідно до математичного апарату (50) ... (55) меридіональні та кільцеві зусилля в розглянутій параболоїдній безмоментній тонкостінній оболонці представлено на рис. 5.

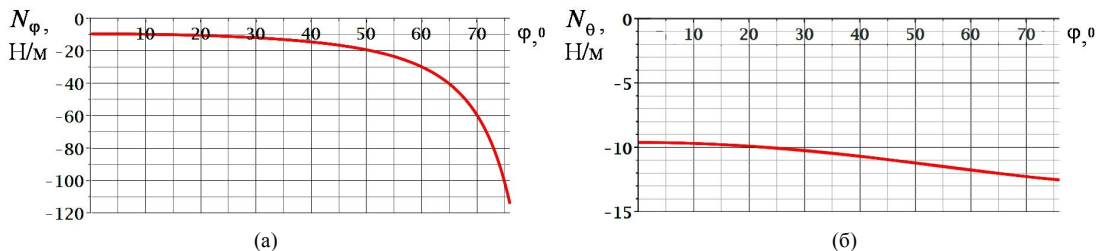


Рис. 5. Зусилля сталеві параболоїдній оболонки товщиною $\delta=0,001$ м, радіусом $R=1$ м основи та висотою $H=2$ м: (а) – меридіональні; (б) – кільцеві

При цьому

$$N_{\varphi}(\varphi_{\max}) \approx -114,25 \text{ Н/м}, \quad (56)$$

$$N_{\theta}(\varphi_{\max}) \approx -12,53 \text{ Н/м}. \quad (57)$$

У даному випадку в системі координат $Oxyz$, наведеній на рис. 1, радіус-вектори вершин характеристичної ламаної (1)

$$\mathbf{r}_0 = (R, 0, 0), \mathbf{r}_1 = (x_1, 0, H), \mathbf{r}_2 = (0, 0, H). \quad (58)$$

Абсциса x_1 обчислюється як перетин дотичної до параболи (34) в точці $x=R$ та вказаної координатної осі. З використанням виразу (36) рівняння зазначеної дотичної

$$z(x) = \frac{2H}{R}x - H, \quad (59)$$

звідки

$$x_1 = R/2 = 1\text{ м} / 2 = 0,5\text{ м}. \quad (60)$$

Для підвищення точності апроксимації для кожного зусилля можна застосовувати кілька поліномів. За допомогою запропонованого підходу (1), (10) ... (18), (34) ... (60) для сталевий параболоїдній оболонки товщиною $\delta=0,001$ м, радіусом $R=1$ м основи, висотою $H=2$ м, вагою $q=77$ Н/м² одиниці площі та двох поліномів для меридіональних зусиль отримано

$$N_\varphi(\varphi_1) = -3,7279 \cdot 10^{-6} \varphi_1^4 + 2,81884 \cdot 10^{-4} \varphi_1^3 - 1,02786 \cdot 10^{-2} \varphi_1^2 + 8,15761 \cdot 10^{-2} \varphi_1 - 9,81, \quad (61)$$

$$N_\varphi(\varphi_2) = -1,065905 \cdot 10^{-3} \varphi_2^4 + 2,684872 \cdot 10^{-1} \varphi_2^3 - 2,5469521 \cdot 10^1 \varphi_2^2 + 1,07610267 \cdot 10^3 \varphi_2 - 1,708476 \cdot 10^4, \quad (62)$$

$$N_\theta(\varphi) = 5,35645 \cdot 10^{-8} \varphi^4 - 1,781 \cdot 10^{-6} \varphi^3 - 6,6593 \cdot 10^{-4} \varphi^2 - 9,0405 \cdot 10^{-4} \varphi - 9,622, \quad (63)$$

де $\varphi_1 \in [0^0; 58^0]$, $\varphi_2 \in [58^0; \varphi_{\max}]$, $\varphi \in [0^0; \varphi_{\max}]$, N_φ і N_θ в Н/м.

Вираз (61) має максимальну похибку 0,2 Н/м при $\varphi_1=58^0$ (-26,85 Н/м замість -27,05 Н/м), $\approx 0,74\%$, співвідношення (62) – 0,44 Н/м при $\varphi_2=58^0$ (-27,49 Н/м проти -27,05 Н/м), $\approx 1,63\%$. Для $\varphi=0^0$ залежність (61) реалізує -9,81 Н/м замість -9,625 Н/м, різниця 0,185 Н/м, $\approx 1,92\%$, а формула (63) – -9,622 Н/м замість -9,625 Н/м, відхилення 0,003 Н/м, $\approx 0,03\%$. При $\varphi_2=\varphi_{\max}$ меридіональні зусилля -113,83 Н/м замість -114,25 Н/м, похибка 0,42 Н/м, тобто $\approx 0,37\%$, а кільцеві зусилля -12,53 Н/м без недоліків.

На завершення викладу матеріалу акцентуємо, що докладно висвітлені вади точності моделювання обумовленні тільки виконуваною апроксимацією, є наслідком прагнення одержати прості аналітичні описи у вигляді невеликого числа поліномів для зручного використання. Зауважимо, що збільшення кількості останніх покращує точність. Тому це питання вирішується згідно з конкретними наявними умовами проектування. Попередньо отримувана числова інформація про меридіональні та кільцеві зусилля, яка ефективно унаочнюється комп'ютерними графічними засобами, визначається практично без недоліків і становить основу для подальших необхідних розрахунків на міцність будівельних конструкцій.

Таким чином, нами розглянуто моделювання сферичних, конічних та параболоїдних оболонок за допомогою векторних раціональних параметричних кривих другого степеня. Опрацювання еліпсоїдних і гіперболоїдних оболонок здійснюється аналогічно, в даній статті не подано через обмежений її обсяг. Наведені вище результати засвідчують відповідність розробленої математичної моделі відомим дефініціям меридіональних та кільцевих зусиль безмоментних тонкостінних оболонок під дією власної ваги. Головна перевага запропонованого підходу полягає в уніфікованому математичному апараті. Це не тільки узагальнює наявні аналітичні описи, а й забезпечує гнучке та продуктивне комп'ютерне варіантне архітектурне формоутворення на стадії ескізного проектування, сприяє ефективній взаємодії різних фахівців під час здійснення комплексної оптимізації будівельних об'єктів. Перспективами розвитку розглянутої тематики можна вважати опрацювання більш складних форм оболонок та діючих на них навантажень у процесі експлуатації.

Висновки. Розроблено математичний апарат використання векторних раціональних параметричних кривих другого степеня для моделювання безмоментних тонкостінних оболонок обертання для підвищення гнучкості та продуктивності автоматизованого проектування архітектурно-будівельних об'єктів. Отримані теоретичні здобутки продемонстровано на конкретних практичних прикладах дефініції меридіональних і кільцевих зусиль сталевих куполів православних храмів та каплиць з метою виконання розрахунків їх на міцність. Окреслено перспективи проведення подальших належних наукових досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959. 580 p.
2. *Ventsel E., Krauthammer T.* Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications. New York: Marcel Dekker, 2001. 658 p.
3. *Bhavikatti S.S.* Theory of Plates and Shells. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers, 2012. 313 p.
4. *Сленцов О.С.* Архітектурне проектування і реконструкція православних храмів. Київ: А+С, 2014. 272 с.
5. *Терещук М.О.* Структурно-параметричний спосіб формування куполів православних храмів. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2022. Вип. 103. С. 201-208. DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.201-208
6. *Терещук М.О.* Структурно-параметричні геометричні моделі поверхонь куполів православних храмів. Прикладні питання математичного моделювання. 2022. Вип. 5.1. С. 95-100. DOI: 10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-12
7. *Вірченко Г.А., Плоский В.О., Терещук М.О.* До питання проектування та відновлення культових архітектурних об'єктів. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2025. Вип. 108. С. 43-52. DOI: 10.32347/0131-579x.2025.108.43-52.

REFERENCES

1. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959. 580 p.
2. *Ventsel E., Krauthammer T.* Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications. New York: Marcel Dekker, 2001. 658 p.
3. *Bhavikatti S.S.* Theory of Plates and Shells. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers, 2012. 313 p.
4. *Slieptsov O.S.* Arkhitekturne proektuvannia i rekonstruktsiia pravoslavnykh khramiv (Architectural Design and Reconstruction of Orthodox Temples). Kyiv: A+S, 2014. 272 p.
5. *Tereschuk M.O.* Strukturno-parametrychnyi sposib formoutvorennia kupoliv pravoslavnykh khramiv (Structural-parametric Method of Shaping the Domes of Orthodox Temples). Applied Geometry and Engineering Graphics. 2022. Issue 103. P. 201-208. DOI: 10.32347/0131-579x.2022.103.201-208
6. *Tereschuk M.O.* Strukturno-parametrychni heometrychni modeli poverkhon kupoliv pravoslavnykh khramiv (Structural-parametric Geometric Models of the Dome Surfaces of Orthodox Temples). Applied questions of mathematical modelling. 2022. Vol. 5.1. P. 95-100. DOI: 10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-12
7. *Virchenko G.A., Ploskiy V.O., Tereschuk M.O.* Do pytannia proektuvannia ta vidnovlennia kultovykh arkhitekturnykh ob'ektiv (On the Issue of Design and Restoration of Cultural Architectural Objects). Applied Geometry and Engineering Graphics. 2025. Issue 108. P. 43-52. DOI: 10.32347/0131-579x.2025.108.43-52

Стаття надійшла 16.02.2026

Терещук М.О., Вірченко Г.А., Савенко В.І., Гончаренко Т.А.

МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗМОМЕНТНИХ ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ВЕКТОРНИМИ РАЦІОНАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРИЧНИМИ КРИВИМИ ДУГОГО СТЕПЕНЯ

Виконаними науковими дослідженнями запропоновано використання векторних раціональних параметричних кривих другого степеня для моделювання безмоментних тонкостінних оболонок обертання з визначенням меридіональних і кільцевих зусиль при осесиметричному навантаженні. Даний підхід являє собою поширення прогресивного досвіду формування складних технічних об'єктів у вітчизняній авіаційній галузі. Представлено належний математичний апарат, продемонстровано його застосування. Здійснено порівняння отриманих результатів із відповідними наявними в літературних джерелах. Обґрунтовано більшу гнучкість і продуктивність векторних параметричних засобів геометричного моделювання порівняно зі звичайними алгебраїчними. Показано узагальнюючий характер напрацьованої методики по відношенню до існуючого розроблення окремих моделей для сферичних, конічних, еліпсоїдних, параболоїдних, гіперболоїдних, торових та інших серединних поверхонь тонкостінних оболонок. Це додатково підкреслює ефективність наведеного математичного апарату, його пристосованість для запровадження в середовищі комп'ютерних інформаційних технологій. Крім теоретичних здобутків запропонований метод має також важливе практичне значення, яке проілюстровано на прикладі куполів православних храмів та каплиць. Акцентоване питання актуальне для сучасного історичного етапу розвитку України, пов'язаного з воєнними діями на її території. Останні обумовлюють руйнування вказаних об'єктів, потребу їхньої відбудови і зведення нових. Зазначені обставини спричинені також зростаючим числом звернень людей за допомогою до всевишніх сил. Викладений підхід успішно реалізує бажане розмаїття форм та розмірів проаналізованих архітектурних конструкцій згідно з вимогами забезпечення індивідуальності християнських сакральних будівель. Подані засоби доцільні на стадії ескізного проектування, коли з метою комплексної оптимізації розглядається значне число варіантів куполів, а докладне опрацювання кожного з них вимагає значних витрат або неможливе через відсутність необхідних відомостей. Висвітлена тематика заслуговує на свій подальший розвиток шляхом розповсюдження на складніші випадки експлуатації, зокрема під дією неосесиметричних навантажень.

Ключові слова: міцність будівельних конструкцій, тонкостінні оболонки обертання, осесиметричне навантаження, меридіональні та кільцеві зусилля, векторні раціональні параметричні криві, моделювання куполів православних храмів і каплиць.

Tereschuk M.O., Virchenko G.A., Savenko V.I., Honcharenko T.A.

MODELLING OF MOMENTLESS THIN-WALLED SHELLS OF REVOLUTION BY VECTOR RATIONAL PARAMETRIC CURVES OF THE SECOND DEGREE

The completed scientific research proposed the use of vector rational parametric curves of the second degree for modelling of momentless thin-walled shells of revolution with the determination of meridian and hoop forces under axisymmetric loading. This approach represents the dissemination of progressive experience in design of complex technical objects in the domestic

aviation industry. The appropriate mathematical apparatus was presented and its application was demonstrated. The obtained results were compared with the corresponding ones available in the literature. The greater flexibility and productivity of vector parametric geometric modelling tools compared to conventional algebraic ones has been substantiated. The generalizing nature of the developed methodology was demonstrated in relation to the existing development of individual models for spherical, conical, ellipsoidal, paraboloidal, hyperboloidal, toric and other middle surfaces of thin-walled shells. This further emphasizes the effectiveness of the presented mathematical apparatus and its suitability for implementation in the environment of computer information technologies. In addition to theoretical achievements, the proposed method also has important practical significance, illustrated by the example of the domes of Orthodox temples and chapels. The highlighted issue is relevant for the current historical stage of Ukraine's development, associated with military actions on its territory. The latter determines the destruction of these facilities, the need for their restoration and the construction of new ones. These circumstances are also caused by the growing number of people turning to higher powers for help. The presented approach successfully implements the desired variety of shapes and sizes of the analyzed architectural structures in accordance with the requirements of ensuring the individuality of Christian sacred buildings. The presented tools are appropriate at the stage of preliminary design, when a significant number of dome variants are considered for the purposes of comprehensive optimization, and detailed processing of each of them requires significant costs or is impossible due to the lack of necessary information. The discussed topic deserves further development by extending it to more complex operation cases, in particular under the action of non-axisymmetric loads.

Keywords: strength of building structures, thin-walled shells of revolution, axisymmetric loads, meridian and hoop forces, vector rational parametric curves, modelling of domes of Orthodox temples and chapels.

УДК 004.942:539.3:69.04

Терещук М.О., Вірченко Г.А., Савенко В.І. Моделирование безмоментных тонкостенных оболочек обертания векторными рациональными параметрическими кривыми второго степени // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2025. – Вип. 116. – С. 450-459.

Іл. 5. Бібліогр. 7 назв.

UDC 004.942:539.3:69.04

Tereschuk M.O., Virchenko G.A., Savenko V.I., Honcharenko T.A. Modelling of momentless thin-walled shells of revolution by vector rational parametric curves of the second degree // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2025. – Issue 116. – P. 450-459.

Fig. 5. Ref. 7.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, докторант кафедри архітектурних конструкцій ТЕРЕЩУК Микола Олександрович

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, пр. Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38 (044) 241-55-55

E-mail: nikolatereschuk@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4444-3677>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки ВІРЧЕНКО Геннадій Анатолійович

Адреса: 03056 Україна, м. Київ, пр. Берестейський 37, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Тел.: +38 (044) 204-94-46

E-mail: kpivir@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9586-4538>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук (ФНР), професор, професор кафедри організації та управління будівництвом САВЕНКО Володимир Іванович

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, пр. Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38 (044) 241-55-55

E-mail: savenko.vi@knuba.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-1490-6730>

Автор: доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій ГОНЧАРЕНКО Тетяна Андріївна

Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Робочий тел.: +38 (044) 241-55-55

E-mail: goncharenko.ta@knuba.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2577-6916>