

УДК 539.3

## ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ НЕОДНОРІДНОСТІ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ДОВГИХ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ОБОЛОНОК

Л.С. Рожок<sup>1</sup>,

д-р фіз.-мат. наук, професор

Л.А. Крук<sup>1</sup>,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Г.Л. Ісаєнко<sup>2</sup>,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

<sup>1</sup>Національний транспортний університет, м. Київ<sup>2</sup>Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації ім. Героїв Крут, м. Київ

DOI: 10.32347/2410-2547.2026.116.406-413

У даній роботі, на основі просторової моделі лінійної теорії пружності з використанням чисельно-аналітичного методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [3, 5], розв'язано задачу про напружений стан довгих нетонких еліптичних циліндричних оболонок, виготовлених з неперервно-неоднорідного матеріалу, при дії внутрішнього тиску за певних граничних умов на торцях. На основі проведеного аналізу отриманих результатів, для класу розглядуваних оболонок встановлено залежність характеристик напруженого стану від закону зміни модуля пружності матеріалу уздовж товщини.

**Ключові слова:** довгі нетонкі циліндричні оболонки, дискретні ряди Фур'є, еліптичний поперечний переріз, лінійна теорія пружності, напружений стан, неперервно-неоднорідний матеріал.

**Вступ.** Неперервно-неоднорідні матеріали (ННМ) являють собою сучасні неоднорідні композитні матеріали, механічні властивості яких є неперервно змінюваними уздовж однієї чи кількох координат. Плавна зміна властивостей матеріалу від однієї поверхні оболонки до іншої дозволяє знизити рівень можливої концентрації напружень при дії різного роду факторів. Завдяки високій міцності та легкості ННМ знаходять своє використання у багатьох застосуваннях. Теорія пластин і оболонок, що виготовляються із неперервно-неоднорідного, або функціонально-градієнтного матеріалу швидко розвивається. Про це свідчить значна кількість робіт, пов'язаних із дослідженнями напруженого стану подібних конструкцій на основі різноманітних підходів із використанням розроблених чисельно-аналітичних методів [1, 2, 4, 6–9].

Дана робота є продовженням досліджень, пов'язаних із визначенням напруженого стану нетонких циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу, виготовлених із матеріалу, пружні властивості якого змінюються уздовж товщини.

**Постановка задачі.** У рамках просторової лінійної теорії пружності, розглядаються замкнуті уздовж напрямної довгі нетонкі циліндричні оболонки з еліптичним поперечним перерізом, на торцях яких має місце діафрагма, абсолютно жорстка у своїй площині і гнучка при виході із неї. Розв'язок задачі шукається у інтервалі  $0 \leq s \leq l$ ;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$ , де  $l$  – довжина оболонки,  $\theta$  – кутовий параметр у поперечному перерізі,  $h$  – товщина оболонки. Для матеріалу обрано двопараметричний ННМ, що відповідає закону зміни модуля Юнга за товщиною у вигляді

$$E(\gamma) = \frac{E_0}{1+\alpha} \left(1 + \alpha \xi^\beta\right), \quad \xi = 1,5 + \frac{\gamma}{h} \quad (-h/2 \leq \gamma \leq h/2), \quad (1)$$

тут  $\alpha, \beta$  – деякі параметри.

Оболонки знаходяться під дією рівномірного нормального внутрішнього тиску  $q = q_0 \sin(\pi s / l)$  ( $q_0 = const$ ).

Дана задача описується основними рівняннями просторової лінійної теорії пружності, з якої, обравши за розв'язувальні функції три компоненти напружень  $\sigma_\gamma, \tau_{\theta\gamma}, \tau_{s\gamma}$  і три компоненти

перемішень  $u_s, u_0, u_\gamma$ , можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь шостого порядку у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [3, 5].

**Мета роботи** полягає у проведенні чисельного аналізу на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [3, 5] та встановленні характерних залежностей напруженого стану розглядуваних оболонок даного класу від параметрів закону зміни модуля пружності уздовж товщини.

**Виклад основного матеріалу.** Оберемо за поверхню відліку серединну поверхню еліптичної оболонки, тоді в площині поперечного перерізу поверхню відліку можна подати у параметричній формі у вигляді [5]

$$x = b \cos \theta; \quad z = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2)$$

де  $a, b$  – півосі еліпса ( $b > a$ ).

Розглядаються оболонки, для яких периметр поперечного перерізу поверхні відліку дорівнює довжині кола радіуса  $R$ , тобто має місце рівність

$$\pi(a+b) \left( 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots \right) = 2\pi R, \quad \Delta = \frac{b-a}{b+a}.$$

Тоді, включно до членів  $\Delta^6$  маємо

$$a = \frac{R}{f}(1-\Delta); \quad b = \frac{R}{f}(1+\Delta); \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256}; \quad \frac{a}{b} = \frac{1-\Delta}{1+\Delta}. \quad (3)$$

При цьому, ексцентриситет  $e$  пов'язаний із параметром  $\Delta$ , що характеризує степінь відхилення форми поперечного перерізу від кругової, співвідношенням

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1+\Delta}.$$

Розрахунки проведено за таких значень пружних та геометричних параметрів: довжина оболонки  $l = 40l_0$ , радіус вихідного кола  $R = 10l_0$ , товщина  $h = 4l_0$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,05; 0,1$ ; параметри модуля пружності (1)  $\alpha = 0; 1; 2; 3; 5$ ;  $\beta = -5; -3; 0; 3; 5$ .

Надалі усі лінійні розміри віднесені до одиниці довжини, напруження – до одиниці навантаження.

На рис. 1 наведено графіки розподілу модуля пружності уздовж товщини залежно від зміни параметрів  $\alpha, \beta$ . При зміні параметру  $\alpha$  модуль пружності уздовж товщини монотонно зростає за прямолінійним законом (рис. 1(а)). При зміні параметру  $\beta$ , для від'ємних значень модуль пружності змінюється несуттєво, майже за прямолінійним законом, а для  $\beta = 5$  лінійність порушується (рис. 1(б)).

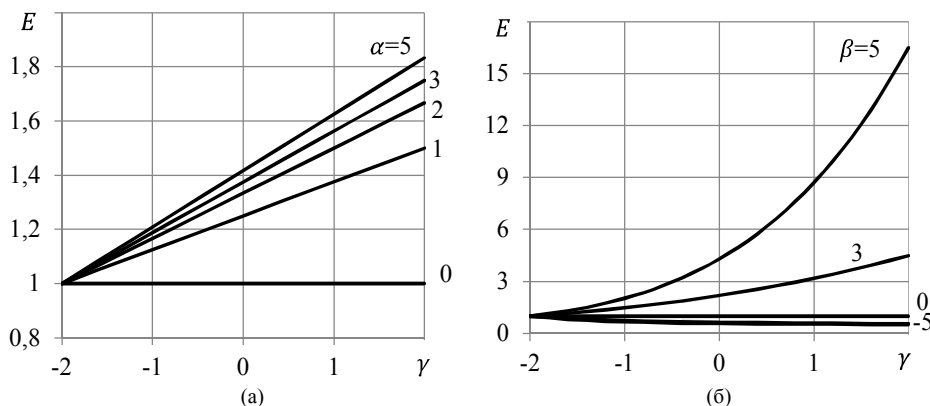


Рис. 1. Розподіл модуля пружності уздовж товщини залежно від параметрів  $\alpha, \beta$ : (а) – для  $\beta = 1$ ; (б) – для  $\alpha = 1$

Результати розв'язування задачі для характеристик напруженого стану оболонок наведено на рис. 2 – рис. 4 та у табл. 1– табл. 6 у середньому перерізі довжини. На усіх рисунках штрихові

лінії відповідають кривим розподілу відповідних факторів напруженого стану, що виникає у кругових оболонках  $\Delta = 0$ , суцільною – в еліптичних зі ступенем еліптичності  $\Delta = 0,05$ , штрих-пунктирною для ступеня еліптичності  $\Delta = 0,1$ . Товсті лінії відповідають кривим на зовнішній поверхні оболонки, тонкі – на внутрішній.

На рис. 2 наведено графіки розподілу максимальних значень нормальних переміщень залежно від параметрів зміни модуля пружності  $\alpha$  (рис. 2 (а)) та  $\beta$  (рис. 2 (б)) в перерізі  $\theta = \pi/2$ .

У табл. 1 і табл. 2 наведено розподіл нормальних переміщень уздовж товщини в перерізі  $\theta = \pi/2$ , де вони набувають своїх максимальних значень залежно від параметру  $\alpha$ , у табл. 2 – залежно від параметру  $\beta$ .

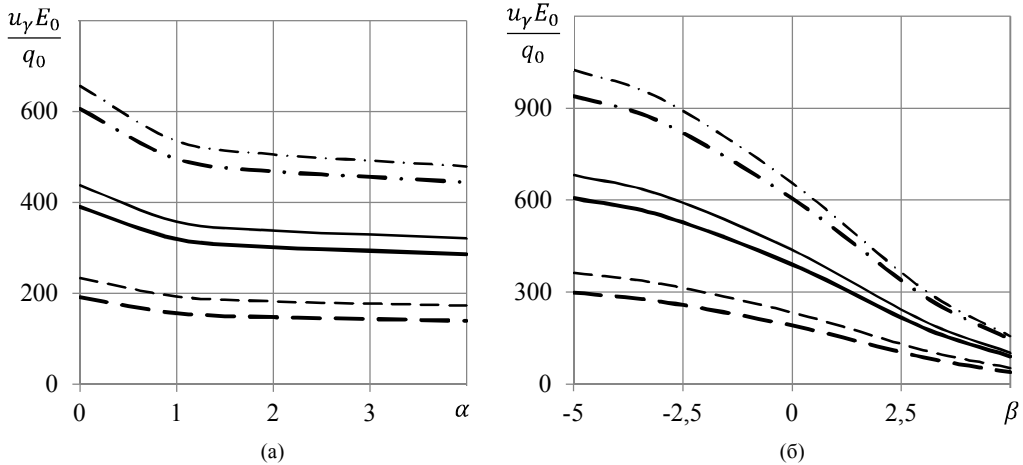


Рис. 2. Графіки розподілу максимальних значень нормальних переміщень  $u_\gamma$  залежно від параметрів  $\alpha, \beta$ :  
(а) – при  $\beta = 1$ ; (б) – при  $\alpha = 1$

Таблиця 1

Розподіл нормальних переміщень  $u_\gamma$  уздовж товщини залежно від параметру  $\alpha$  ( $\beta = 1$ )

$\gamma$	$u_\gamma E_0 / q_0 (\theta = \pi/2)$								
	$\alpha = 0$			$\alpha = 1$			$\alpha = 5$		
	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1
-2	234,01	437,73	656,80	192,94	358,13	535,70	172,84	320,69	479,61
-1	218,89	426,96	650,37	179,69	348,79	530,24	160,54	312,06	474,61
0	207,32	415,26	638,98	169,85	339,23	521,30	151,60	303,54	466,80
1	198,24	403,15	624,23	162,30	329,58	509,87	144,81	295,03	456,84
2	190,95	390,48	606,42	156,30	319,54	495,97	139,45	286,17	444,66

Таблиця 2

Розподіл нормальних переміщень  $u_\gamma$  уздовж товщини залежно від параметру  $\beta$  ( $\alpha = 1$ )

$\gamma$	$u_\gamma E_0 / q_0 (\theta = \pi/2)$								
	$\beta = -5$			$\beta = 0$			$\beta = 5$		
	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1
-2	362,81	681,74	1024,72	234,01	437,73	656,80	52,20	101,75	155,29
-1	341,44	665,87	1014,49	218,89	426,96	650,37	45,60	96,92	152,17
0	323,95	646,93	994,85	207,32	415,26	638,98	42,11	94,14	150,14
1	309,92	627,12	969,93	198,24	403,15	624,23	40,00	91,97	147,98
2	298,58	606,60	940,58	190,95	390,48	606,42	38,49	89,74	145,07

З результатів, наведених на рис. 2 (а) та у табл. 1, видно, що при збільшенні степеня еліптичності максимальні значення нормальних переміщень зменшуються при переході від внутрішньої до зовнішньої поверхні для кругових оболонок приблизно на 20%, для еліптичних зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,05$  на 10% і для  $\Delta = 0,1$  – на 8% незалежно від величини параметра  $\alpha$ . При цьому, незалежно від степеня еліптичності, максимальна величина переміщень  $u_\gamma$  зменшується для ННМ, по відношенню до однорідного матеріалу ( $\alpha = 0$ ), на 17% для  $\alpha = 1$ , на 26% для  $\alpha = 5$ .

Результати, наведені на рис. 2 (б) та у табл. 2 показують, що порівняно з однорідним матеріалом  $\beta = 0$ , зменшення параметру  $\beta$  призводить до збільшення максимальних значень нормальних переміщень як в круговій, так і в еліптичних оболонках. Крім того, збільшення параметру  $\beta$  призводить до зменшення максимальної величини нормальних переміщень. При цьому еліптичність більшою мірою впливає на перерозподіл величини переміщень  $u_\gamma$  для від’ємних значень параметру  $\beta$ .

Графіки розподілу максимальних значень поздовжніх напружень залежно від параметрів  $\alpha$  (рис. 3(а)) та  $\beta$  (рис. 3 (б)) наведено на зовнішній поверхні в перерізі  $\theta = 3\pi/8$  і на внутрішній – в перерізі  $\theta = 0$ . В табл. 3 наведено розподіл уздовж товщини поздовжніх напружень в перерізі  $\theta = 0$  для  $\alpha = 0; 1$  де вони набувають своїх максимальних значень і в перерізі  $\theta = 3\pi/8$  для  $\alpha = 5$ , аналогічно у двох перерізах у табл. 2 – залежно від параметру  $\beta$ .

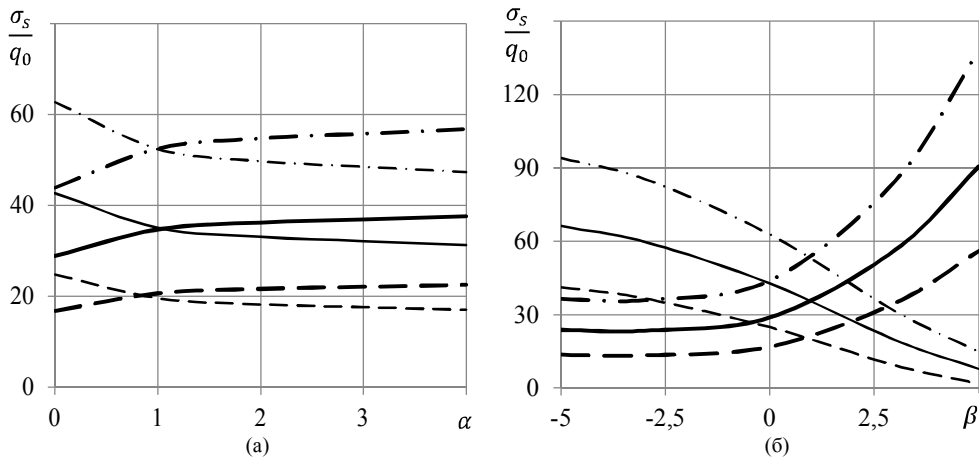


Рис. 3. Графіки розподілу максимальних значень поздовжніх напружень  $\sigma_s$  залежно від параметрів  $\alpha, \beta$  : (а) – при  $\beta = 1$ ; (б) – при  $\alpha = 1$

Таблиця 3

Розподіл поздовжніх напружень  $\sigma_s$  уздовж товщини залежно від параметру  $\alpha$  ( $\beta = 1$ )

$\gamma$	$\sigma_s / q_0$								
	$\alpha = 0 (\theta = 0)$			$\alpha = 1 (\theta = 0)$			$\alpha = 5 (\theta = 3\pi/8)$		
	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1
-2	24,78	42,71	62,77	19,56	35,04	52,42	17,00	13,93	13,66
-1	21,64	28,66	35,68	19,55	26,93	34,40	18,53	19,52	23,93
0	19,45	19,14	18,44	19,76	20,36	20,61	19,91	25,05	33,97
1	17,90	11,77	5,35	20,13	14,13	7,79	21,21	30,98	44,73
2	16,79	5,47	-5,83	20,63	7,65	-5,37	22,50	37,61	56,78

Таблиця 4

Розподіл поздовжніх напружень  $\sigma_s$  уздовж товщини залежно від параметру  $\beta$  ( $\alpha = 1$ )

$\gamma$	$\sigma_s / q_0$								
	$\beta = -5 (\theta = 0)$			$\beta = 0 (\theta = 0)$			$\beta = 5 (\theta = 3\pi/8)$		
	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1
-2	41,16	66,18	94,00	24,78	42,71	62,77	1,61	-0,46	-1,58
-1	22,87	28,47	33,88	21,64	28,66	35,68	6,21	4,72	5,20
0	17,26	15,88	14,13	19,45	19,14	18,44	15,30	16,71	22,09
1	14,83	8,93	2,81	17,90	11,77	5,35	30,98	41,94	60,34
2	13,51	3,70	-6,06	16,79	5,47	-5,83	56,02	90,55	138,03

З аналізу результатів, наведених на рис. 3 (а) та у табл. 3 випливає, що при переході від внутрішньої до зовнішньої поверхні для однорідного матеріалу ( $\alpha = 0$ ) у круговій оболонці величина поздовжніх напружень зменшується приблизно на 32% і збільшується несуттєво для параметру  $\alpha = 1$ , при цьому для  $\alpha = 5$  збільшується на 30%. Для еліптичних оболонок величина відповідних напружень  $\sigma_s$  збільшується для  $\Delta = 0,05$  при  $\alpha = 0$  на 33%, при  $\alpha = 1$  в 2 рази і при  $\alpha = 5$  – у 3 рази; відповідно для  $\Delta = 0,1$  при  $\alpha = 0$  у 2 рази, при  $\alpha = 1$  – у 3 рази, при  $\alpha = 5$  – у 4 рази. Зі збільшенням параметру  $\alpha$ , величина напружень  $\sigma_s$  зростає приблизно на 30 – 35 % на зовнішній поверхні і зменшуються у межах 20 – 30 % на внутрішній.

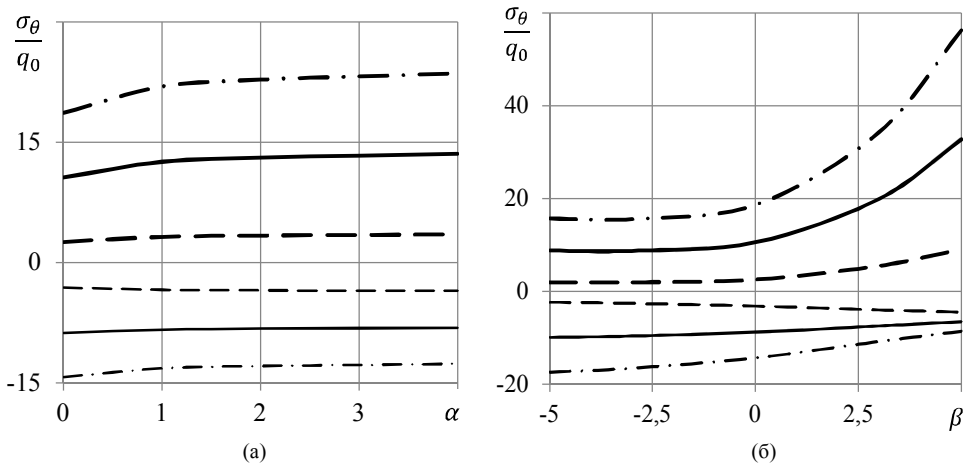


Рис. 4. Графіки розподілу максимальних значень колових напружень  $\sigma_\theta$  залежно від параметрів  $\alpha, \beta$ : (а) – при  $\beta = 1$ ; (б) – при  $\alpha = 1$

Таблиця 5

Розподіл колових напружень  $\sigma_\theta$  уздовж товщини залежно від параметру  $\alpha$  ( $\beta = 1$ )

$\gamma$	$\sigma_\theta / q_0 (\theta = \pi/2)$								
	$\alpha = 0$			$\alpha = 1$			$\alpha = 5$		
	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1
-2	-3,14	-8,78	-14,30	-3,40	-8,36	-13,20	-3,54	-8,14	-12,64
-1	-1,59	-3,35	-5,13	-1,85	-3,88	-5,93	-1,99	-4,13	-6,28
0	-0,14	1,50	3,10	-0,28	0,97	2,16	-0,35	0,73	1,74
1	1,23	6,08	10,91	1,39	6,39	11,35	1,47	6,57	11,61
2	2,57	10,61	18,68	3,20	12,57	21,96	3,52	13,56	23,61

Зміна параметру  $\beta$  (рис. 3 (б)) більшою мірою впливає на розподіл максимальної величини поздовжніх напружень  $\sigma_s$  для  $\beta < 0$  на внутрішній поверхні в перерізі  $\theta = 0$  і на зовнішній поверхні в перерізі  $\theta = 3\pi/8$  для додатних значень параметру  $\beta$ .

Таблиця 6

Розподіл колових напружень  $\sigma_\theta$  уздовж товщини залежно від параметру  $\beta$  ( $\alpha = 1$ )

$\gamma$	$\sigma_\theta / q_0$ ( $\theta = \pi/2$ )								
	$\beta = -5$			$\beta = 0$			$\beta = 5$		
	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1	$\Delta = 0$	0,05	0,1
-2	-2,31	-9,91	-17,39	-3,14	-8,78	-14,30	-4,45	-6,54	-8,56
-1	-1,25	-2,38	-3,55	-1,59	-3,35	-5,13	-3,44	-5,73	-7,99
0	-0,12	1,81	3,72	-0,14	1,50	3,10	-1,65	-2,60	-3,62
1	0,96	5,37	9,78	1,23	6,08	10,91	1,91	7,39	12,65
2	2,00	8,83	15,72	2,57	10,61	18,68	9,12	32,84	56,33

На рис. 4 криві розподілу колових напружень наведені у перерізі  $\theta = \pi/2$ , де вони приймають своїх максимальних амплітудних значень. Аналогічно, у табл. 5, 6 наведено розподіл уздовж товщини колових напружень у тому самому перерізі напрямної. Аналіз наведених результатів свідчить про те, що при зміні параметру  $\alpha$ , величина напружень  $\sigma_\theta$  змінюється несуттєво, тоді як при зміні параметру  $\beta$  спостерігається вплив, більшою мірою на зовнішній поверхні оболонки, як його величини (за додатних значень), так і еліптичності.

**Висновки.** У межах просторової лінійної теорії пружності за допомогою розробленої методики щодо розв'язання задач про напружений стан нетонких, неоднорідних по товщині, циліндричних некругових оболонок, яка базується на редукції вихідної тривимірної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, до одномірної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на основі застосування методів відокремлення змінних за двома координатними напрямками із паралельним використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації, проведено чисельний аналіз напруженого стану довгих нетонких еліптичних циліндричних оболонок, виготовлених із ННМ, що знаходяться під дією внутрішнього рівномірного тиску. У результаті проведеного чисельного аналізу встановлено характерні закономірності розподілу переміщень та напружень залежно від параметрів закону зміни модуля пружності уздовж товщини неперервно-неоднорідного матеріалу, із якого виготовлені розглядувані оболонки. Зокрема, було показано, що залежно від зміни параметрів неоднорідності матеріалу та степеня еліптичності поперечного перерізу має місце перерозподіл величини характеристик напруженого стану розглядуваних оболонок як у якісному, так і у кількісному плані.

Результати, отримані у роботі, можуть бути враховані для оптимізації конструктивно-технологічних рішень при виготовленні та експлуатації конструктивних елементів подібного класу, або використані як фундаментальні дослідження механіки деформівного твердого тіла.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайдайчук В.В., Котенко К.Е., Клименко М.О.* Дослідження впливу геометричних і фізико-механічних параметрів несучих шарів і полімерного заповнювача на коливальний процес шаруватої циліндричної оболонки при нестационарному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Київ: КНУБА, 2024. – Вип. 113. – С. 161–170.
2. *Кошевий О.П., Кошевий О.О., Янсонс М.О., Йовко М.М.* Параметрична оптимізація циліндричної оболонки при статичних впливах // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2025. – Вип. 114. – С. 328–338.
3. *Рожок Л.С., Онищенко А.М., Крук Л.А., Найдьонова З.М.* Чисельний аналіз напруженого стану нетонких гофрованих циліндричних оболонок з неперервно-неоднорідних матеріалів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 113. – С. 108–115.

4. *Abrosov Y.Y., Maksymyuk V.A.* Statics of Long Cylindrical Shell with Supercircular Cross-Section Made of Nonlinear Elastic Orthotropic Composite // *Int. Appl. Mech.* – 2025. – 61, No 4. – P. 460–467. (<https://doi.org/10.1007/s10778-026-01367-8>)
5. *Grygorenko O.Ya., Rozhok L.S., Boreiko N.P., Kharytonova L.V.* Numerical Analysis of Stress State of Non-Thin Elliptical Cylindrical Shells Made of Continuously Inhomogeneous Materials // *Int. App. Mech.*–2024. – 60, No 6 – P. 653–664. (<https://doi.org/10.1007/s10778-025-01317-w>)
6. *Wang Z., Wang Y., Xu Z. et al.* Modeling and Free Vibration Analysis of Dual-Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Stepped Cylindrical Shells with Arbitrary Boundary Conditions // *Mech. Solids.* – 2024. – 59. – P. 2594–2616. (<https://doi.org/10.1134/S0025654424604282>)
7. *Wei J., Zhou, B., Zhang W.* Research on mode localization and rotational stability of axially non-uniform cylindrical shell // *Int. J. Dynam. Control.* – 2026. – 14, No 86. (<https://doi.org/10.1007/s40435-026-02022-3>)
8. *Yesil U.B., Aylikci F., Yahnioglu N.* 3D Chinese lantern-type stability loss of a cylinder composed of functionally graded materials under axial compression // *J.Eng.Math.* – 2025. – 152, No 3. (<https://doi.org/10.1007/s10665-025-10446-7>)
9. *Zhang B., Long Z., Liu G. et al.* Investigating the distribution of heat transfer in a thick-walled functionally graded cylindrical shell under heat flux // *J. Eng. Appl. Sci.* – 2025. – 72, No 1. (<https://doi.org/10.1186/s44147-024-00571-y>)

## REFERENCES

1. *Gaidaichuk V.V., Kotenko K.E., Klymenko M.O.* Investigation of the influence of geometric and physico-mechanical parameters of bearing layers and polymer filler on the oscillation process of a layered cylindrical shell at non-stationary load // *Strength of Materials and Theory of Structure: Scientific and technical collected articles.* – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 161-170.
2. *Koshevyi O.P., Koshevyi O.O., Yansons M.O., Yovko M.M.* Parametric optimization of a cylindrical shell under static loads // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2025. – Issue 114. – P. 328-338.
3. *Rozhok L.S., Onishchenko A.M., Kruk L.A., Naidonova Z.M.* Numerical analysis of the stress state of non-thin corrugated cylindrical shells made of continuously-inhomogeneous materials // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and-technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 108-115.
4. *Abrosov Y.Y., Maksymyuk V.A.* Statics of Long Cylindrical Shell with Supercircular Cross-Section Made of Nonlinear Elastic Orthotropic Composite. *Int. Appl. Mech.* 2025. 61, No 4. P. 460–467. (<https://doi.org/10.1007/s10778-026-01367-8>)
5. *Grygorenko O.Ya., Rozhok L.S., Boreiko N.P., Kharytonova L.V.* Numerical Analysis of Stress State of Non-Thin Elliptical Cylindrical Shells Made of Continuously Inhomogeneous Materials. *Int. App. Mech.* 2024. –60, № 6. P. 653–664. (<https://doi.org/10.1007/s10778-025-01317-w>)
6. *Wang Z., Wang Y., Xu Z. et al.* Modeling and Free Vibration Analysis of Dual-Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Stepped Cylindrical Shells with Arbitrary Boundary Conditions. *Mech. Solids.* 2024. 59, P. 2594–2616. (<https://doi.org/10.1134/S0025654424604282>)
7. *Wei J., Zhou, B., Zhang W.* Research on mode localization and rotational stability of axially non-uniform cylindrical shell. *Int. J. Dynam. Control.* 2026. 14, 86. (<https://doi.org/10.1007/s40435-026-02022-3>)
8. *Yesil U.B., Aylikci F., Yahnioglu N.* 3D Chinese lantern-type stability loss of a cylinder composed of functional lygraded materials under axial compression. *J.Eng.Math.* 2025. 152, 3. (<https://doi.org/10.1007/s10665-025-10446-7>)
9. *Zhang B., Long Z., Liu G. et al.* Investigating the distribution of heat transfer in a thick-walled functionally graded cylindrical shell under heat flux. *J. Eng. Appl. Sci.* 2025. 72, 1. (<https://doi.org/10.1186/s44147-024-00571-y>)

Стаття надійшла 28.02.2026

Рожок Л.С., Крук Л.А., Ісаєнко Г.Л.

### ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ НЕОДНОРІДНОСТІ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ДОВГИХ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ОБОЛОНОК

Циліндричні оболонки кругового і некругового поперечного перерізу застосовуються як конструктивні елементи в багатьох галузях господарювання, а також як розрахункові моделі при дослідженнях властивостей новостворюваних матеріалів, що здатні підвищити експлуатаційні можливості зазначених елементів конструкцій.

Об'єктом дослідження у даній роботі є довгі нетонкі циліндричні еліптичні оболонки, що виготовлені з неперервно-неоднорідного матеріалу, пружні властивості якого змінюються уздовж товщини. Оболонки знаходяться під дією внутрішнього тиску за умов шарнірного закріплення торців.

Предметом дослідження є напружений стан оболонки і, як наслідок, встановлення залежностей між його характеристиками та параметрами закону зміни модуля пружності матеріалу.

Метою роботи є проведення чисельного аналізу напруженого стану оболонки даного класу залежно від закону зміни пружних властивостей матеріалу. Задачу розв'язано із використанням просторової моделі лінійної теорії пружності на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. При цьому застосовується аналітичний метод відокремлення змінних у двох координатних напрямках, із паралельним використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.

Проведено аналіз напруженого стану розглянутих оболонки залежно від двох параметрів закону зміни пружних властивостей матеріалу уздовж товщини.

**Ключові слова:** довгі нетонкі циліндричні оболонки, дискретні ряди Фур'є, еліптичний поперечний переріз, лінійна теорія пружності, напружений стан, неперервно-неоднорідний матеріал.

Rozhok L.S., Kruk L.A., Isaienko H.L.

### INFLUENCE OF NON-HOMOGENEITY PARAMETERS ON THE STRESS STATE OF LONG NON-THIN CYLINDRICAL ELLIPTICAL SHELLS

Cylindrical shells of circular and non-circular cross-section are used as structural elements in many industries, as well as computational models in the study of the properties of newly created materials that can increase the operational capabilities of these structural elements.

This research investigates long non-thin cylindrical elliptical shells made of a continuously non-homogeneous material, the elastic properties of which vary along the thickness. The shells are under the action of internal pressure under conditions of hinged fastening of the ends.

The subject of research is the stressed state of the shells and, as a result, the establishment of dependencies between its characteristics and the parameters of the law of change of the modulus of elasticity of the material.

The purpose of the work is to conduct a numerical analysis of the stressed state of shells of this class depending on the law of change of the elastic properties of the material. The problem is solved using a spatial model of the linear theory of elasticity based on the method of approximation of functions by discrete Fourier series. In this case, an analytical method of separation of variables in two coordinate directions is used, with parallel use of approximation of functions by discrete Fourier series and a stable numerical method of discrete orthogonalization.

The stress state of the considered shells is analyzed depending on two parameters of the law of change of elastic properties of the material along the thickness.

**Keywords:** long non-thin cylindrical shells, discrete Fourier series, elliptical cross-section, linear theory of elasticity, stressed state, continuously non-homogeneous material.

УДК 539.3

Рожок Л.С., Крук Л.А., Ісаєнко Г.Л. Вплив параметрів неоднорідності на напружений стан довгих нетонких циліндричних еліптичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2026. – Вип. 116. – С. 406-413.

У даній роботі, на основі просторової моделі лінійної теорії пружності із використанням чисельно-аналітичного методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, розв'язано задачу про напружений стан довгих нетонких еліптичних циліндричних оболонок, виготовлених із неперервно-неоднорідного матеріалу, при дії внутрішнього тиску за певних граничних умов на торцях. На основі проведеного аналізу отриманих результатів, для класу розглядуваних оболонок встановлено залежність характеристик напруженого стану від закону зміни модуля пружності матеріалу уздовж товщини.

Табл. 6. Іл. 4. Бібліогр. 9 назв.

UDK539.3

Rozhok L.S., Kruk L.A., Isaienko H.L. Influence of non-homogeneity parameters on the stress state of long non-thin cylindrical elliptical shells// Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2026. – Issue 116. – P. 406-413.

In this work, based on the spatial model of the linear theory of elasticity using the numerical-analytic method of approximation of functions by discrete Fourier series, the problem of the stress state of long non-thin elliptical cylindrical shells made of continuously non-homogeneous material under the action of internal pressure under certain boundary conditions at the ends. Based on the analysis of the results obtained, the dependence of the characteristics of the stress state on the law of change of the modulus of elasticity of the material along the thickness is established for the class of shells under consideration.

Tabl.6. Fig. 4. Ref. 9

**Автор:** доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки РОЖОК Лілія Степанівна

**Адреса:** Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра теоретичної та прикладної механіки РОЖОК Лілії Степанівни.

**Роб. тел.** +38(044) 286-38-89

**E-mail:** teor\_mex@ukr.net

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-7926-9074>

**Автор:** кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки КРУК Леся Анатоліївна

**Адреса:** Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра теоретичної та прикладної механіки КРУК Лесі Анатоліївни.

**Роб. тел.** +38(044) 286-38-89

**E-mail:** krukles@ukr.net

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-8131-564X>

**Автор:** кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальних дисциплін Військового інституту телекомунікацій та інформатизації ім. Героїв Крут ІСАЄНКО Галина Леонідівна

**Адреса:** Україна, 01011, м. Київ, вулиця Князів Острозьких, 45/1, кафедра фундаментальних дисциплін Військового інституту телекомунікацій та інформатизації ім. Героїв Крут ІСАЄНКО Галині Леонідівни.

**E-mail:** gl\_isayenko@ukr.net

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-0479-9596>