

УДК 539.3

## ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ РОТОРНИХ СИСТЕМ ГУСЕНИЧНИХ МАШИН З МЕХАТРОННИМИ СИСТЕМАМИ УПРАВЛІННЯ

**Ю.В. Човнюк,**

канд. техн. наук, доцент

**О.В. Приймаченко,**

канд. техн. наук, доцент

**П.П. Чередніченко,**

доцент

**Н.С. Шудра,**

ст. викладач

*Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна*

DOI: 10.32347/2410-2547.2026.116.344-359

При побудові моделі гусеничних машин можна обмежуватись лише дискретними параметрами – масами та жорсткостями – не можна, якщо вали роторної системи мають значні маси та довжини. У довгих валопроводах можуть виникати хвильові процеси під дією зовнішніх збурень, прикладених до дискретних мас системи. Складність аналізу хвильових процесів у дискретно-континуальних системах, виникаючих у них при зміні режимів роботи, примушує шукати методи розв'язку більш прості, але такі, що дають задовільні поточності результати. Одним з таких методів є заміна дискретно-континуальної моделі дискретною, яка у незначній степені відрізняється за динамічними властивостями від вихідної. При цьому використовується метод скінчених елементів, на котрі може бути розділена кожна з ділянок валу зі зосередженими на ній дискретними масами, а сам вал є розподіленою масою. У зв'язку з цим, виникає потреба формулювання критерію, який дозволяє встановити еквівалентну систему дискретних мас, що замінюють дискретно-континуальну систему. Аналогічну задачу представляє собою аналіз динамічних процесів, які протікають у гідромеханічних системах, котрі включають довгі трубопроводи й великі маси ланок гідравлічного механізму.

У роботі отримані рівняння руху валу гусеничної машини з розподіленою масою, проведений аналіз вагального валу з масами на кінцях, визначені частоти власних коливань багатомасової роторної системи гусеничної машини із урахуванням маси вала. Задля знаходження власних чисел системи використаний метод Прагера. Результати обчислення амплітуд коливань валу у подальшому можуть бути використані для відшукування найбільших значень моментів сил пружності ділянок валу. Зміна моменту сил пружності має характер биття. Кожний з частот власних коливань системи з кількома степенями вільності руху відповідає певна форма коливань, тому за близьких значень частот власних коливань відбувається безперервний перехід однієї форми коливань у іншу і, відповідно, періодичний обмін енергії між окремими ділянками системи при збереженні сили їх енергії постійною величиною. Контроль за рухом системи у перехідних процесах (пуску) може здійснюватися мехатронними системами управління.

**Ключові слова:** фундаментальний аналіз, динаміка, коливання, дискретно-континуальні роторні системи, гусеничні машини.

**Постановка проблеми.** Раніше неодноразово автори [1-19] вказували на те, що побудова механічної моделі будь-якої машини (гусеничної, зокрема) не може базуватись лише на її дискретних параметрах, таких як: маса та жорсткість. Якщо вали роторної системи подібної машини мають значну масу та довжину, то у цих довгих валопроводах неминуче виникають хвильові процеси під дією зовнішніх збурень, які прикладаються до дискретних мас цієї системи. Зрозуміло, що складність аналізу навіть лінійних хвильових процесів у дискретно-континуальних системах, що виникають у останніх внаслідок зміни режиму роботи, примушує дослідників шукати методи розв'язку більш прості, але такі, котрі дають задовільні за точністю результати. Одним з таких методів є заміна дискретно-континуальної моделі суто дискретною, яка мало відрізняється за своїми динамічними властивостями від вихідної. При цьому дослідники використовують метод скінчених елементів, на які може бути розділена кожна з ділянок валу, що знаходиться між дискретними масами системи, а сам вал є розподіленою масою. У зв'язку з цим виникає проблема формулювання критерію, котрий дозволяє встановити

еквівалентну систему дискретних мас, які замінюють дискретно-континуальну систему. До того ж, в межах нової моделі слід ввести критерії, що обмежують небажані у системі коливання (того чи іншого виду) під час перехідних режимів (пуск, гальмування, реверс обертання та інше) функціонування роторної системи гусеничної машини.

**Аналіз публікацій по темі дослідження.** Аналізу динаміки роторних систем машин присвячена доволі значна кількість робіт [1-19], автори котрих пропонують різні підходи та моделі для дослідження таких складних систем як дискретно-континуальних. Проте, у вказаних вище роботах відсутні критерії та закони руху гусеничних машин, їх роторних систем, котрі б забезпечували мінімізацію небажаних поздовжніх та згинних коливань валів у перехідних режимах функціонування (пуск, гальмування, реверс напрямку обертання тощо). Саме висвітленню цих проблем і присвячена дана робота.

**Мета роботи** полягає у обґрунтуванні фізико-механічної та математичної моделі динаміки роторних систем гусеничних машин, які адекватно описують рівняння руху валу з розподіленою масою, що дає змогу провести частотний аналіз вагомого валу з масами на кінцях, визначити частоти власних коливань багатомасової роторної системи із урахуванням маси валу, а також встановити критерії оптимізації руху дискретно-континуальних систем (типу «вал (розподілена маса) – дискретні маси», які обертаються з ним) у перехідних режимах їх функціонування (пуск, гальмування, реверс напрямку обертання валу), за яких мінімізуються небажані типи коливань валу (поздовжні, згинні, зсувні тощо).

## Виклад основного змісту дослідження

### 1. Математична модель та рівняння руху валу з розподіленою масою

Розглянемо вал з розподіленою масою постійного перерізу, на лівому кінці котрого прикладений збурюючий момент. Його дія розповсюджується по усій довжині валу. Якщо у перерізі  $x$  діє момент сил пружності  $G \cdot I \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , тоді у перерізі  $x + dx$  на відрізок валу довжиною

$(l - x)$  діє момент  $G \cdot I \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \right)$ . Припустимо, що із загальних міркувань на поверхні валу

діє погонне навантаження з інтенсивністю  $\mu(x, t)$ , тоді кутове прискорення елементарної ділянки валу довжиною  $dx$  визначимо з рівняння:

$$\theta \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G \cdot I \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - G \cdot I \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot dx \right) + \mu(x, t), \quad (1)$$

або

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu(x, t)}{\theta} = F(x, t). \quad (2)$$

Тут  $G$  – модуль зсуву,  $I$  – момент інерції перерізувала,  $\theta$  – момент інерції маси одиниці довжини валу постійного перерізу:

$$\theta = \frac{I \cdot \gamma}{g} \cdot l = \frac{\theta_g}{l}; \quad a^2 = \frac{G \cdot I}{\theta} = \frac{G}{\rho}, \quad (3)$$

$a$  – швидкість розповсюдження хвилі деформації,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\rho$  – щільність,  $\gamma$  – питома вага матеріалу валу,  $\varphi$  – кут повороту валу відносно його осі,  $t$  – час.

За відсутності зовнішнього навантаження, розподіленого по довжині валу, отримаємо однорідне гіперболічне рівняння відносно кутового переміщення  $\varphi(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння у частинних похідних можна, за Д'Аламбером, подати у вигляді:

$$\varphi(x, t) = f(at - x) + f(at + x), \quad (5)$$

тобто у формі прямої хвилі  $f(at-x)$ , фронт котрої переміщується зі швидкістю  $a$ , і хвилі  $f(at+x)$ , відбитої від правого кінця валу. Швидкість розповсюдження хвилі деформації для сталевого валу  $a=3200\text{м/с}$ .

Підстановка у рівняння (4) розв'язку у вигляді (5) перетворює його у тотожність.

Загальний розв'язок для  $\varphi(x,t)$  визначається початковими й граничними умовами ділянки валу.

Оскільки розв'язок подається у формі прямої й зворотної відбитої хвилі, аналіз його повинен здійснюватись за фазами, які відповідають часові пробігання хвилі деформації від лівого кінця валу і назад. При відносно малій довжині ділянки валу й зазначеній вище швидкості розповсюдження хвилі час  $2\tau = 2l/a$  пробігання відповідної частини збудженого на одному з кінців відрізка (або ділянки) валу і відбитого на іншому кінці фронту деформації у порівнянні з часом  $T$  зростання збурюючого моменту виявляється величиною високого порядку малості. Метод Д'Аламбера, або метод характеристик, особливо при наявності на валу кількох дискретних мас виявляється у цьому випадку практично нереалізованим.

При наявності вказаних співвідношень між часом  $2\tau$  подвійного пробігання збурення впововж короткого валу і часом  $T$  зростання збурення ( $2\tau \ll T$ ) у системі вала можуть виникати стоячі хвилі різної довжини. Кожна з них буде визначати положення вузлового перерізу, відносно котрого інші перерізи здійснюють коливні рухи з деякою частотою, яка визначається параметрами системи. Для такого роду систем розв'язок рівняння (4) зручно подати розкладом у ряд простих періодичних функцій.

Використовуючи метод Фур'є, кутове переміщення перерізів валу з розподіленою по довжині масою можна прийняти рівним:

$$\varphi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot T_i, \quad (6)$$

причому  $X$  залежить лише від координати  $x$ , а  $T$  тільки від часу  $t$ , тобто  $X(x)$  й  $T(t)$ . Тому рівняння (4) буде зведене до рівняння з розділеними змінними, при цьому:

$$\ddot{T}_i / T_i = -\beta_i^2, \quad (7)$$

а

$$X_i'' / X_i = -(\beta_i/a)^2 = -m_i^2. \quad (8)$$

Загальний розв'язок диференціальних рівнянь (7) та (8) з постійними координатами можна подати у вигляді:

$$X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (C_i \cdot \cos(m_i x) + D_i \cdot \sin(m_i x)); \quad (9)$$

$$T(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cdot \cos(\beta_i \cdot t) + B_i \cdot \sin(\beta_i \cdot t)), \quad (10)$$

де  $(C_i, D_i, A_i, B_i) = \text{const}$ .

Кожний з членів суми (9) відповідає певній формі коливань, яка характеризується числом вузлів, у котрих  $X_i$  перетворюється в нуль, в той час як члени суми (10) визначаються з початкових умов.

Оскільки у подальшому нас будуть цікавити форми власних коливань дискретно-континуальних систем, зупинимось на аналізі суми (9), котра визначає закон зміни деформації на розглядуваній ділянці валу, залежний від  $m$  та постійних  $C_i, D_i$ .

Якщо система проста і має лише одну ділянку розподіленої маси зв'язку постійної інтенсивності  $\theta$ , тоді повинні бути задоволені умови навантаження кінців ділянки. При цьому кінці можуть бути вільними чи жорстко закріпленими, а навантаження кінцевого перерізу може мати вид або моменту сил інерції кінцевої дискретної маси, або ж моменту сил пружності безінерційного зв'язку. Перераховані граничні умови можуть комбінуватись різноманітними способами.

Для складних ланцюгових рядних чи розгалужених систем, котрі мають кілька ділянок з розподіленою масою зв'язку, у доповнення до граничних (кінцевих) слід скласти ще й умови спряження, котрі можуть характеризуватись наявністю на границі між ділянками дискретної маси, дискретного безінерційного зв'язку й дискретного зовнішнього збурюючого моменту. Всі ці випадки показані на рис. 1.

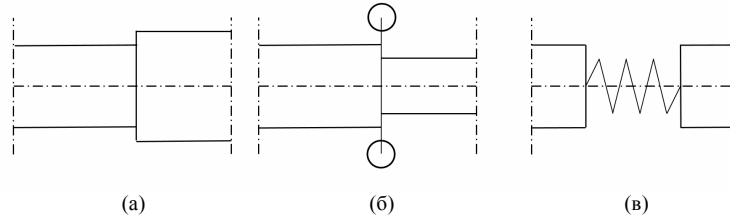


Рис. 1. Види спряження ділянок валу

Граничні умови й умови спряження дозволяють скласти достатнє число рівнянь для визначення як множини значень  $m_i$ , так і відношення постійних інтегрування  $C_i$  та  $D_i$ .

## 2. Частотний аналіз вагомого валу з масами на кінцях

Якщо у кінцях валу закріплені маховики з моментами інерції мас  $\theta_1$  й  $\theta_2$ , тоді з рівнянь їх руху матимемо наступні рівності [1, 2]:

$$\text{для } x = 0 \quad \theta_1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(0, t)}{\partial t^2} = G \cdot I \cdot \frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial x}; \quad (11)$$

$$\text{для } x = l \quad \theta_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(l, t)}{\partial t^2} = -G \cdot I \cdot \frac{\partial \varphi(l, t)}{\partial x}. \quad (12)$$

Позначимо  $GI/\theta_1 = d_1^2$ , а  $GI/\theta_2 = d_2^2$ , тоді знаходимо граничні умови у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(0, t)}{\partial t^2} = d_1^2 \cdot \frac{\partial \varphi(0, t)}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varphi(l, t)}{\partial t^2} = -d_2^2 \cdot \frac{\partial \varphi(l, t)}{\partial x}. \end{cases} \quad (13)$$

З цих граничних умов для  $x = 0$  маємо:

$$-\beta_i^2 \cdot X_i \cdot T_i = +d_1^2 \cdot T_i \cdot X_i' \Leftrightarrow -a^2 \cdot m_i^2 \cdot C_i = d_1^2 \cdot m_i \cdot D_i, \quad (14)$$

й для  $x = l$  маємо:

$$-a^2 m_i^2 \cdot (C_i \cdot \cos m_i l + D_i \cdot \sin m_i l) = -m_i d_2^2 \cdot (-C_i \cdot \sin m_i l + D_i \cdot \cos m_i l). \quad (15)$$

Виключаючи  $D_i$  й перетворюючи цей вираз (15), після підстановки значень  $a$ ,  $d_1$  та  $d_2$  знаходимо:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{(\mu_1 + \mu_2) \cdot \lambda}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \lambda^2 - 1}. \quad (16)$$

Тут  $l \cdot m = \lambda$ ;  $\mu_1 = \theta_1/\theta_{12}$ ;  $\mu_2 = \theta_2/\theta_{12}$ ;  $\theta_{12}$  – момент інерції маси валу.

Корені характеристичного трансцендентного рівняння (16) визначають форми вільних коливань валу з масами на кінцях й у той же час величину циклової частоти власних коливань:  $\beta_i = m_i \cdot a = m_i \cdot \sqrt{G \cdot g / \gamma}$ . Останні, як неважко помітити, залежать від параметрів системи  $\mu_1$  та  $\mu_2$ , тобто від відношення моментів інерції кінцевих мас до моменту інерції маси валу. При значеннях параметрів  $\mu_1$  та  $\mu_2$ , які прямує до нуля,  $\operatorname{tg} \lambda$  також прямує до нуля, тому корені характеристичного трансцендентного рівняння (16) у граничному випадку при  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  визначаються значеннями  $\lambda_i$ , які знаходяться з рівності:

$$\operatorname{tg} \lambda_i = \sin \lambda_i = \sin(m_i \cdot l) = 0. \quad (17)$$

Звідси:

$$m_i \cdot l = i \cdot \pi, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Розглянутий випадок відповідає вільним коливанням циліндричного валу без кінцевих мас, пружні переміщення перерізів котрого виражаються формулою (9).

Форма вільних коливань визначається числом  $i$ . При  $i=1$  скінченні перерізи валу переміщуються у протилежних напрямках відносно вузлового перерізу, який відповідає  $x=l/2$ . У цьому перерізі момент має найбільше значення:

$$M = G \cdot I \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = -C \cdot \frac{G \cdot I \cdot \pi}{l} \cdot \sin \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

При  $i=2$  у процесі вільних коливань з'являються два вузли, при  $i=3$  – три і так далі.

Інший граничний випадок має місце при прямуванні параметрів системи  $\mu_1$  та  $\mu_2$  до нескінченності. У цьому випадку перша складова у знаменнику (16) значно більше одиниці й дане рівняння наближено можна замінити на наступну рівність:

$$\lambda \cdot \operatorname{tg} \lambda = (1/\mu_1) + (1/\mu_2). \quad (20)$$

У якості першого наближення можна прийняти:

$$\lambda_1^2 = m_1^2 \cdot l^2 = (1/\mu_1) + (1/\mu_2) = \theta_{12} \left( (1/\theta_1) + (1/\theta_2) \right) \quad (21)$$

та

$$m_1 = \sqrt{\left( \theta_{12}/l^2 \right) \cdot \left( (1/\theta_1) + (1/\theta_2) \right)}. \quad (22)$$

Вводячи замість  $m_1$  кутову частоту  $\beta_1 = a \cdot m_1$  і враховуючи, що  $a^2 = G \cdot g/\gamma$ ,  $\theta_{12} = I \cdot \gamma \cdot l/g$  матимемо:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{I \cdot G \cdot (\theta_1 + \theta_2)}{l \cdot \theta_1 \cdot \theta_2}} = \sqrt{C_{12} \cdot \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{\theta_1 \cdot \theta_2}}, \quad (23)$$

тобто знайдений вираз для кутової частоти без урахування маси валу.

Більш точне значення кутової частоти для першої форми коливань системи отримаємо, якщо обмежимося першими двома членами розкладу:

$$\operatorname{tg} \lambda \approx \lambda + \lambda^3/3. \quad (24)$$

Замінюючи у (16)  $\operatorname{tg} \lambda$  його наближеним значенням, після перетворень знайдемо:

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \cdot \mu_2} = \frac{1}{3} \cdot \lambda^4 - \frac{1}{3 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2} \cdot \lambda^2 + \lambda^2 - \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2}. \quad (25)$$

Якщо  $\lambda^4$  виражати через перше наближення (21), тоді:

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 &= \left[ \left( (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1 \cdot \mu_2) \right) + (1/(\mu_1 \cdot \mu_2)) - 1/3 \cdot \left( (1/\mu_1) + (1/\mu_2) \right)^2 \right] \cdot \left( 1 - (1/(3 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2)) \right)^{-1} \approx \\ &\approx \left[ \left( (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1 \cdot \mu_2) \right) + (1/(\mu_1 \cdot \mu_2)) - 1/3 \cdot \left( (1/\mu_1) + (1/\mu_2) \right)^2 \right] \cdot \left( 1 + (1/(3 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2)) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Відкидаючи величини третього і більш високого порядку малості, остаточно матимемо:

$$\lambda_2^2 = \left( (\mu_1 + \mu_2)/(\mu_1 \cdot \mu_2) \right) - 1/3 \cdot \left( (1/\mu_1^2) + (1/\mu_2^2) - (1/(\mu_1 \cdot \mu_2)) \right). \quad (27)$$

Чисельне значення  $\lambda_2$ , знайдене з цієї формули (27), добре співпадає зі значенням  $\lambda$ , обчисленим за формулою (22) при заміні  $\theta_1$  й  $\theta_2$  на приведені моменти інерції відповідно:

$$\theta_1 \Rightarrow \theta_1 + \frac{\theta_{12}}{3} \cdot \left( \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right); \quad \theta_2 \Rightarrow \theta_2 + \frac{\theta_{12}}{3} \cdot \left( \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \right). \quad (28)$$

Для аналізу перехідних процесів необхідно знати кілька перших частот власних коливань, що визначають найбільший рівень динамічних деформацій. У зв'язку з цим корисно з'ясувати особливості частотного рівняння (16).

Перш за все слід зазначити, що функція  $f(\lambda) = \frac{(\mu_1 + \mu_2) \cdot \lambda}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \lambda^2 - 1}$  має розрив при  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2}}$ , коли  $\lambda$  дорівнює величині, оберненій середньому геометричному значенню параметрів системи  $\mu_1$  та  $\mu_2$ . Положення абсиси, яке відповідає розриву функції  $f(\lambda)$ , залежить лише від  $\sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2}$ , а не відзначень  $\mu_1$  та  $\mu_2$ , які взяті окремо кожне. Цим самим визначається й дискретний спектр власних частот коливань системи. Функцію  $\text{tg} \lambda = f(\lambda) = \frac{(\mu_1 + \mu_2) \cdot \lambda}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \lambda^2 - 1}$  можна розкласти на прості дробі, тобто подати сумою:

$$f(\lambda) = \frac{\tilde{A}}{\lambda \cdot \sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2} - 1} + \frac{\tilde{B}}{\lambda \cdot \sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2} + 1}, \quad (\tilde{A}, \tilde{B}) = \text{const.} \tag{29}$$

Приводячи суми простих дробів до спільного знаменника й порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $\lambda$  у чисельнику, знайдемо:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = 0 \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}, \quad \tilde{A} = (\mu_1 + \mu_2) / 2\sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2}, \tag{30}$$

тобто постійна  $\tilde{A}$  дорівнює відношенню середнього арифметичного до середнього геометричного параметрів  $\mu_1$  та  $\mu_2$ . Використовуючи отриманий результат, функцію  $f(\lambda)$  параметрів системи виражаємо у формі:

$$f(\lambda) = \frac{a}{b \cdot \lambda - 1} + \frac{a}{b \cdot \lambda + 1}, \tag{31}$$

де  $a = \tilde{A} = (\mu_1 + \mu_2) / 2\sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2}$ ,  $b = \sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2}$ .

Кожний із доданків виразу (31) представляє собою рівняння гіперболи. Його можна привести до виду рівняння гіперболи, віднесеної до асимптот. Дійсно, якщо покласти:

$$f_1(\lambda) = \bar{y}_i \quad (i=1,2), \quad \bar{x}_i = \lambda \mp 1/b, \tag{32}$$

тоді

$$\bar{x}_i \cdot \bar{y}_i = a/b. \tag{33}$$

Зміщення вісей  $\bar{y}_1$  та  $\bar{y}_2$  відносно початку координат – відповідно  $1/b$  та  $(-1/b)$ .

Для з'ясування впливу кінцевих мас на корені характеристичного рівняння (16) перетворимо його до наступного виду:

$$\text{tg} \lambda = \frac{\mu_1 \cdot (1 + \mu_2 / \mu_1) \cdot \lambda}{\mu_1^2 \cdot (\mu_2 / \mu_1) \cdot \lambda^2 - 1}, \tag{34}$$

вводячи відношення моментів інерції кінцевих мас, яке дорівнює  $\mu_1 / \mu_2$ . Корені знаходимо графічним методом (рис. 2). Вони визначались координатами точок перетину розривних кривих 1-3, що відповідають різним середнім геометричним значенням виразу  $\sqrt{\mu_1 \cdot \mu_2}$ , й тангенсоїди.

У таблиці 1 наведені значення перших чотирьох коренів  $\lambda = m \cdot l$  для  $\mu_1$ , яке дорівнює 0,1; 1; 10; 100 й  $\mu_2 / \mu_1$ , яке дорівнює 0,1; 0,5; 1; 2; 10.

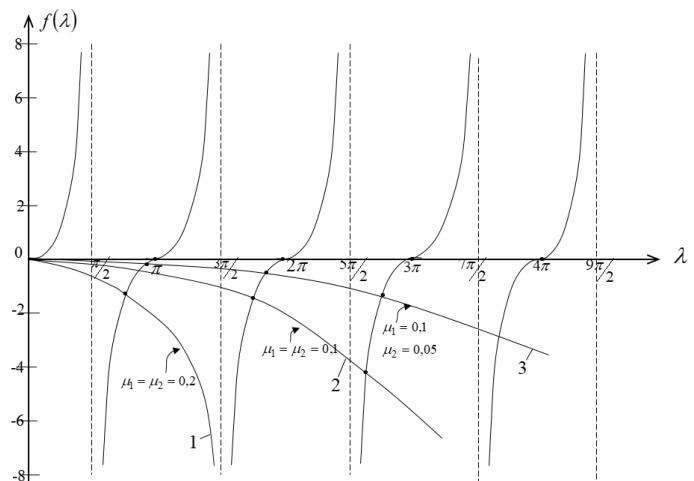


Рис. 2. До визначення коренів двомасової системи

Значення перших чотирьох коренів  $\lambda = m \cdot l$  для різних значень  $\mu_1$  та відношення  $\mu_2/\mu_1$

$\mu_2/\mu_1 = 0,1$		$\mu_2/\mu_1 = 0,5$		$\mu_2/\mu_1 = 1$		$\mu_2/\mu_1 = 2$		$\mu_2/\mu_1 = 10$	
$\lambda, \text{рад}$	$\lambda, \text{град}$	$\lambda, \text{рад}$	$\lambda, \text{град}$	$\lambda, \text{рад}$	$\lambda, \text{град}$	$\lambda, \text{рад}$	$\lambda, \text{град}$	$\lambda, \text{рад}$	$\lambda, \text{град}$
$\mu_1 = 0,1$									
2,8368	162,54	2,7382	156,89	2,6278	150,56	2,4464	140,17	1,8754	107,45
5,7075	327,02	5,5102	315,72	5,3073	304,09	5,0292	288,15	4,5073	258,25
8,6268	494,63	8,3352	477,57	8,0671	462,21	7,7492	444,52	7,3541	421,36
1,5919	664,17	11,2129	642,45	10,90	625,54	10,6202	608,49	10,2927	589,72
$\mu_1 = 1$									
1,8754	107,45	1,5090	86,4827	1,3064	74,85	1,1362	65,10	0,9290	53,24
4,5073	258,25	3,8711	221,50	3,6732	210,46	3,5547	203,67	3,4524	197,81
7,3541	421,36	6,7202	385,04	6,5846	377,27	6,5123	372,95	6,4523	369,69
10,2927	589,72	9,7297	557,17	9,6314	551,84	9,5791	548,84	9,5396	546,58
$\mu_1 = 10$									
0,9290	53,24	0,5370	58,80	0,4430	25,43	0,3839	22,00	0,3272	18,75
3,4524	197,81	3,2343	185,31	3,2039	183,57	3,1887	182,70	3,1762	181,98
6,4523	369,69	6,3306	362,72	6,3148	361,81	6,3069	361,36	6,3006	361,00
9,5396	546,58	9,4564	541,81	9,4459	541,21	9,4405	540,90	9,4363	540,66
$\mu_1 = 100$									
0,3272	18,75	0,1727	9,90	0,1414	8,10	0,1224	7,01	0,1046	5,99
3,1762	181,98	3,1512	180,55	3,1479	180,365	3,1463	180,27	3,1451	180,20
6,3006	361,00	6,2879	360,27	6,2863	360,18	6,2855	360,14	6,2849	360,10
9,4363	540,66	9,4279	540,18	9,4269	540,121	9,4264	540,09	9,4259	540,07

На рис. 3 зображені відповідні криві, які показують зміну коренів частотного рівняння у залежності від відношення кінцевих мас  $\mu_2/\mu_1 = \theta_2/\theta_1$  для вказаних вище значень  $\mu_1$ .

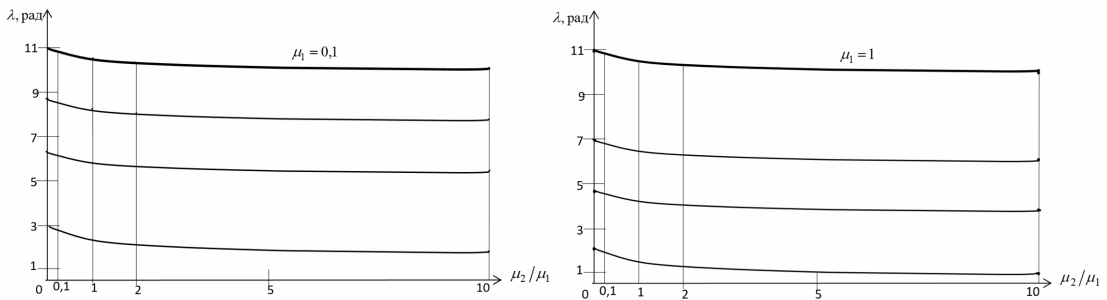


Рис. 3. Графіки зміни частот власних коливань

### 3. Визначення частот власних коливань багатомасової роторної системи гусеничної машини із урахуванням маси валу

При складанні частотного рівняння багатомасової системи, у якій присутні дискретні та розподілені маси, для кожної з ділянок валу слід записати рівняння типу (9), які відрізняються одне від одного постійними інтегрування  $C$  та  $D$ . Для їх визначення можна використати умови на кінцях валу та умови спряження окремих ділянок. У результаті матимемо систему однорідних лінійних відносно постійних інтегрування рівнянь з правими частинами, рівними нулю. Коефіцієнти при постійних інтегрування – періодичні функції постійної  $m$  та довжини відповідної ділянки валу.

Так, для визначення власних частот, наприклад, тримасової системи рівняння руху дискретних мас  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  й  $\theta_3$ , якщо прийняти момент сил пружності зв'язку, розміщеного зліва від відповідної маси, додатнім, будуть мати наступний вид:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1(0,t)}{\partial t^2} = -G \cdot I_{12} \cdot \frac{\partial \varphi_1(0,t)}{\partial x_1}; \\ \tilde{\theta}_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1(l_1,t)}{\partial t^2} = +G \cdot I_{12} \cdot \frac{\partial \varphi_1(l_1,t)}{\partial x_1} - G \cdot I_{23} \cdot \frac{\partial \varphi_2(0,t)}{\partial x_2}; \\ \tilde{\theta}_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2(l_2,t)}{\partial t^2} = G \cdot I_{23} \cdot \frac{\partial \varphi_2(l_2,t)}{\partial x_2}; \\ \varphi_1(l_1,t) = \varphi_2(0,t) \end{cases} \quad (35)$$

Оскільки  $\beta^2 = m^2 \cdot (G \cdot I) / \theta$ ,  $\varphi = X(x) \cdot T(t)$ ,  $\bar{\theta}_{12} = \theta_{12} \cdot l_{12}$ ,  $\bar{\theta}_{23} = \theta_{23} \cdot l_{23}$ ,  $X = C \cdot \cos mx + D \sin mx$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  – моменти інерції маси вала на ділянках  $l_{12}$  й  $l_{23}$  його довжини,  $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3$  – моменти інерції мас маховиків, закріплених на лівому та правому кінцях ділянки вала  $l_{12}$  й на правому кінці ділянки вала  $l_{23}$ , відповідно, тоді після підстановки у (35) і перетворень отримаємо наступну систему рівнянь відносно постійних інтегрування:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 \cdot (\tilde{\theta}_1 / \bar{\theta}_{12}) \cdot \xi_{12} \cdot C_{12} - D_{12} = 0; \\ C_{12} \cdot ((\tilde{\theta}_2 / \bar{\theta}_{12}) \cdot \xi_{12} \cdot \cos \xi_{12} - \sin \xi_{12}) + D_{12} \cdot (\xi_{12} \cdot (\tilde{\theta}_2 / \bar{\theta}_{12}) \cdot \sin \xi_{12} + \cos \xi_{12}) - (I_{12} / I_{23}) \cdot D_{23} = 0; \\ C_{23} \cdot (\xi_{23} \cdot (\tilde{\theta}_3 / \bar{\theta}_{23}) \cdot \cos \xi_{23} - \sin \xi_{23}) + D_{23} \cdot (\xi_{23} \cdot (\tilde{\theta}_2 / \bar{\theta}_{23}) \cdot \sin \xi_{23} + \cos \xi_{23}) = 0; \\ C_{12} \cdot \cos \xi_{12} + D_{12} \cdot \sin \xi_{12} - C_{23} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Оскільки маси рухаються синхронно й постійна  $m$  для всіх ділянок вала одна й та ж, тоді співвідношення між  $\xi_{12} = m \cdot l_{12}$  та  $\xi_{23} = m \cdot l_{23}$  відомі:

$$\xi_{23} = \xi_{12} \cdot \frac{l_{23}}{l_{12}}. \quad (37)$$

Згідно з теорією лінійних алгебраїчних рівнянь постійні інтегрування відмінні від нуля, якщо визначник, складений з коефіцієнтів при невідомих, дорівнює нулю. Отримаємо, таким чином, складне трансцендентне рівняння для визначення коренів характеристичного рівняння і, відповідно, частот власних коливань.

Для тримасової системи характеристичний визначник має вид:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\tilde{\theta}_1 / \bar{\theta}_{12}) \cdot \xi_{12}; \quad a_{12} = \xi_{12} \cdot (\tilde{\theta}_2 / \bar{\theta}_{12}) \cdot \cos \xi_{12} - \sin \xi_{12}; \quad a_{14} = \cos \xi_{12}; \quad a_{22} = \xi_{12} \cdot (\tilde{\theta}_2 / \bar{\theta}_{12}) \cdot \sin \xi_{12} + \cos \xi_{12}; \\ a_{24} &= \sin \xi_{12}; \quad a_{42} = (I_{12} / I_{23}); \quad a_{33} = \xi_{23} \cdot (\tilde{\theta}_3 / \bar{\theta}_{23}) \cdot \cos \xi_{23} - \sin \xi_{23}; \quad a_{43} = \xi_{23} \cdot (\tilde{\theta}_2 / \bar{\theta}_{23}) \cdot \sin \xi_{23} + \cos \xi_{23}. \end{aligned}$$

Розкриваючи цей визначник, маємо наступне характеристичне рівняння для визначення частот власних коливань тримасової роторної системи гусеничної машини із урахуванням маси вала:

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}) \cdot a_{43} - a_{42} \cdot a_{33} \cdot (a_{24} - a_{14}) = 0. \quad (39)$$

Складність трансцендентного характеристичного рівняння зростає при зростанні числа ділянок вала, у спряженні котрих або змінюється момент інерції перерізу вала, або ж розміщується дискретна маса, або, насамкінець, має місце і те й інше.

Слід зазначити, що уникнути необхідності складання трансцендентного рівняння відносно власних чисел системи можна шляхом введення допоміжних змінних, які приймають конкретні значення для початку й кінця ділянки вала з розподіленою масою й маючих певний зв'язок на межі ділянок (метод Прагера) [1, 2]. Введення саме такого виду змінних дозволяє здійснити

простий перехід від ділянки до ділянки й вибором величини  $m$  задовольнити умові на межі двох будь-яких ділянок валу чи на його кінці.

У якості допоміжної змінної, згідно Прагера, слід прийняти співвідношення:

$$U = \frac{X'(x)}{m \cdot X(x)}. \quad (40)$$

Якщо позначити значення  $U$  для початку ділянки валу через  $U^0$ , а для кінця цієї ділянки –  $U^*$ , тоді для будь-якої ділянки маємо:

$$U^0 = \frac{D}{C}; \quad U^* = \frac{-C \cdot \sin ml + D \cos ml}{C \cdot \cos ml + D \sin ml}. \quad (41)$$

Звідси рівняннями для визначення постійних інтегрування  $C$  та  $D$  будуть наступні:

$$\begin{cases} C \cdot U^0 - D = 0; \\ C \cdot (U^* \cdot \cos ml + \sin ml) + D \cdot (U^* \cdot \sin ml - \cos ml) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

При  $(C, D) \neq 0$  визначник системи повинен дорівнювати нулю. Після розкриття визначника приходимо до частотного рівняння у вигляді:

$$U^0 \cdot U^* - U^0 \cdot \text{ctg}(ml) + U^* \cdot \text{ctg}(ml) + 1 = 0. \quad (43)$$

Рівняння такого виду можна скласти для кожної з ділянок роторної системи гусеничної машини.

При обчисленні частот власних коливань складної системи необхідно здійснити перехід від однієї ділянки до іншої (рис. 4).

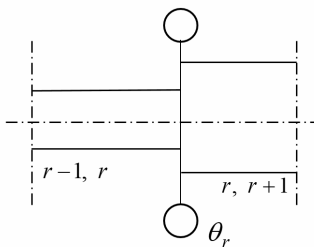


Рис. 4. Вал гусеничної машини змінного перерізу з масою у зчленуванні ділянок

Виразимо при вказаному вище переході  $U_{r,r+1}^0$  через  $U_{r-1,r}^*$ , якщо перехід здійснюється від ділянки  $(r-1, r)$  до ділянки  $(r, r+1)$ . Зв'язок між  $U_{r,r+1}^0$  та  $U_{r-1,r}^*$  визначається умовами спряження. У місці спряження ділянок  $(r-1, r)$  та  $(r, r+1)$  маємо:

$$\varphi_r = \varphi_{r-1,r}(l) = \varphi_{r,r+1}(0) \quad (44)$$

або

$$X_{r-1,r}^* = X_{r,r+1}^0. \quad (45)$$

З рівняння руху дискретної маси, закріпленої на межі ділянок валу, випливає:

$$\theta_r \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = M_{r-1,r}^* - M_{r,r+1}^0. \quad (46)$$

Нехай на лівому кінці валу ( $x=0$ ) закріплений маховик з моментом інерції маси  $\theta_1$ . Тоді, виходячи з характеристичного рівняння (43) можна отримати для першої ділянки валу гусеничної машини, як елемента дискретно-континуальної системи наступні співвідношення (за методом Прагера):

$$\begin{cases} U^0 = \frac{U^* \cdot \text{ctg}(ml) + 1}{\text{ctg}(ml) - U^*}; & U^* = \frac{U^0 \cdot \text{ctg}(ml) - 1}{\text{ctg}(ml) + U^0}; \\ \frac{(D/C) \cdot \text{ctg}(ml) - 1}{(D/C) \cdot \text{ctg}(ml)} = \text{in var}; & (D/C)|_{x=0} = \frac{-a^2 \cdot m^2}{(GI/\theta_1)}. \end{cases} \quad (47)$$

Тоді для правого кінця ділянки валу ( $x=l$ ), при умові, що на останньому відсутня маса (немає закріпленого маховика з певним моментом інерції маси), можна отримати наступний вираз (характеристичне рівняння для ділянки валу  $x \in [0; l]$ ):

$$\frac{(D/C)|_{x=l} \cdot \operatorname{ctg}(ml) - 1}{(D/C)|_{x=l} + \operatorname{ctg}(ml)} = \frac{\left(\frac{-a^2 \cdot m^2}{GI/\theta_1}\right) \cdot \operatorname{ctg}(ml) - 1}{\left(\frac{-a^2 \cdot m^2}{GI/\theta_1}\right) + \operatorname{ctg}(ml)};$$

$$Z \cdot \operatorname{ctg}(ml) - 1 = \left[ \left\{ \frac{a^2 \cdot m^2}{GI/\theta_1} \right\} \cdot Z + \operatorname{ctg}(ml) \right];$$

$$Z \left\{ \operatorname{ctg}(ml) + \left( \frac{a^2 \cdot m^2}{GI/\theta_1} \right) \right\} = \operatorname{ctg}(ml) + 1;$$

$$\operatorname{ctg}(ml) = \frac{-a^2 \cdot m^2}{(GI/\theta_1)}. \quad (48)$$

Співвідношення між амплітудами просторових форм коливань валу на вказаній ділянці (при  $x=l$ ) має наступний вид:

$$\left\{ \frac{(D/C)|_{x=l} \cdot \operatorname{ctg}(ml) - 1}{(D/C)|_{x=l} + \operatorname{ctg}(ml)} \right\} = \frac{(-a^2 \cdot m^2)}{(GI/\theta_1)}, \quad (49)$$

Звідки маємо (метод Прагера):

$$(D/C)|_{x=l} = \frac{\operatorname{ctg}(ml) + 1}{\left\{ \operatorname{ctg}(ml) + \frac{a^2 \cdot m^2}{(GI/\theta_1)} \right\}}. \quad (50)$$

#### 4. Оптимізація режимів обертання валу гусеничної машини (як дискретно-континуальної системи) у перехідних процесах (пуску, реверсу, гальмування) за різних критеріїв

##### 4.1. Режим руху валу двигуна гусеничних машин, за яких у перехідних процесах мінімізується середньоквадратичний градієнт моменту скрутк вдовж всієї вісі валу, що обертається

Градієнт моменту скрутк має наступний вигляд:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = GI \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}. \quad (51)$$

Використовуючи найбільш загальне рівняння руху, маємо з (2):

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{GI}{a^2} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} - F(x,t) \right\}. \quad (52)$$

Встановимо режим руху валу гусеничної машини, який обертається, у випадку, коли виконується критерій якості цього руху, що призводить до мінімізації середньоквадратичного градієнту моменту скрутк вдовж всієї вісі валу за період пуску тривалістю  $\tau$ :

$$\text{а) } \tilde{I}_1 = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \left\{ \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \right\}^2 dx \Rightarrow \min; \quad (53)$$

$$\text{б) } \tilde{I}_2 = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t (\tilde{I}_1)^2 dt \Rightarrow \min. \quad (54)$$

Об'єднуючи (53), (54) маємо:

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t dt \left[ \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \left\{ \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \right\}^2 dx \right] \Rightarrow \min. \quad (55)$$

Враховуючи (52) цей критерій  $\bar{I}_1$  можна подати у наступному вигляді:

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t dt \left[ \frac{1}{l} \cdot \frac{G^2 \cdot I^2}{a^4} \cdot \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} - F(x,t) \right\}^2 dx \right] \Rightarrow \min. \quad (56)$$

Зрозуміло, що для виконання критерію  $\bar{I}_1$  необхідно, щоб виконувалась умова:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t). \quad (57)$$

За нульових початкових умов:

$$\varphi(x,t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (58)$$

інтегрування (57) дає наступний результат (закон руху валу, за якого виконується критерій  $\bar{I}_1$ ):

$$\varphi(x,t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \cdot F(x,t''). \quad (59)$$

**4.2. Режими руху валу двигуна гусеничних машин, за яких у перехідних процесах мінімізується середньоквадратичне значення погонного зовнішнього навантаження, діючого на вал, який обертається, у перехідних процесах (пуску)**

З (2) можна отримати:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} - F(x,t) \right\}, \quad (60)$$

а також

$$\frac{1}{l} \cdot \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{1}{a^2 \cdot l} \cdot \left\{ \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} dx - \int_0^l F(x,t) dx \right\}. \quad (61)$$

Використовуючи граничні умови (11), (12) з (61) можна записати:

$$\left\{ \frac{\partial^2 \varphi(l,t)}{\partial t^2} \cdot \frac{\theta_2}{(-G \cdot I)} - \frac{\partial^2 \varphi(0,t)}{\partial t^2} \cdot \frac{\theta_1}{(G \cdot I)} \right\} = \frac{1}{a^2} \left\{ \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx - \int_0^l F(x,t) dx \right\}. \quad (62)$$

Або

$$\frac{a^2}{(-G \cdot I \cdot l)} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \varphi(l,t)}{\partial t^2} \cdot \theta_2 + \frac{\partial^2 \varphi(0,t)}{\partial t^2} \cdot \theta_1 \right\} + \frac{1}{l} \int_0^l F(x,t) dx = \frac{d^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x,t) dx \right\}. \quad (63)$$

Введемо позначення:

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x,t) dx, \quad \bar{F}(t) = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \frac{\mu(x,t)}{\theta} dx. \quad (64)$$

Тоді (63) приймає наступний вид:

$$\frac{a^2}{G \cdot I \cdot l} \cdot \{M(l,t) - M(0,t)\} + \bar{F}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \{\bar{\varphi}(t)\}. \quad (65)$$

Зрозуміло, що фізичний зміст позначень (64) полягає у наступному: а)  $\bar{\varphi}(t)$  – середнє по довжині валу гусеничної машини значення кута повороту відносно його вісі у момент часу  $t$ ; б)  $\bar{F}(t)$  – середнє погонне значення зовнішнього навантаження на вал, узятє по довжині валу й віднесенє до моменту інерції маси одиниці довжини постійного перерізу  $\theta$ .

Встановимо далі закон руху (обертання) валу  $\bar{\varphi}(t)$ , за якого у період пуску роторної системи тривалістю  $\tau$  на цей вал гусеничної машини діє погонне середньоквадратичне (середнє по довжині валу) навантаження мінімальної інтенсивності  $\bar{F}(t)$ , тобто виконується наступний критерій якості руху:

$$\bar{I}_2 = \left\{ \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} dt \left[ \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \mu(x,t) dx \right]^2 \right\}^{1/2} \Rightarrow \min. \quad (66)$$

Виходячи з рівняння (65) маємо:

$$\theta \cdot \frac{d^2 \bar{\varphi}(t)}{dt^2} - \frac{a^2 \cdot \theta}{G \cdot I \cdot l} \cdot \{M(l,t) - M(0,t)\} = \frac{1}{l} \int_0^l \mu(x,t) dx. \quad (67)$$

Тоді критерій  $\bar{I}_2$  (66) можна подати у вигляді:

$$\bar{I}_2 = \left[ \frac{\theta^2 \cdot l}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} dt \left\{ \frac{d^2 \bar{\varphi}(t)}{dt^2} - \frac{a^2}{G \cdot I \cdot L} \cdot [M(l,t) - M(0,t)] \right\}^2 \right]^{1/2} \Rightarrow \min. \quad (68)$$

Введемо позначення:

$$\Phi(t) = \frac{a^2}{G \cdot I \cdot l} [M(l,t) - M(0,t)] \quad (69)$$

Тоді реалізація критерію  $\bar{I}_2$  (68) зводиться до:

$$\int_0^{\tau} dt \cdot \left\{ \frac{d^2 \bar{\varphi}(t)}{dt^2} - \Phi(t) \right\}^2 \Rightarrow \min. \quad (70)$$

Необхідною умовою виконання співвідношення (70) є рівняння Ейлера-Пуассона наступного виду:

$$\bar{\varphi}^{(IV)}(t) - \ddot{\Phi}(t) = 0, \quad \ddot{\Phi}(t) = d^2 \Phi / dt^2. \quad (71)$$

Розв'язок рівняння (71) шукаємо у вигляді:

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_{одн.}(t) + \bar{\varphi}_{неодн.}(t), \quad (72)$$

де  $\bar{\varphi}_{одн.}(t)$  – (однорідний) розв'язок (71), коли (71) зводиться до однорідного рівняння  $(\bar{\varphi}^{(IV)}(t))=0$ , а  $\bar{\varphi}_{неодн.}(t)$  – (неоднорідний) розв'язок (71), тобто частинний розв'язок цього рівняння при  $\ddot{\Phi}(t) \neq 0$ .

Розглянемо низку випадків розв'язку рівняння (71) для різних варіантів закону зміни у час  $\Phi(t)$ .

1.  $\Phi(t) = const.$   $\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_{одн.}(t)$ ;  $\ddot{\Phi}(t) = 0$ ;  $\bar{\varphi}_{неодн.}(t) = 0$ .
2.  $\Phi(t) = A \cdot t$ ,  $A = const.$   $\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_{одн.}(t)$ ;  $\ddot{\Phi}(t) = 0$ ;  $\bar{\varphi}_{неодн.} = 0$ .
3.  $\Phi(t) = B \cdot t^2 + C \cdot t + D$ ,  $(B, C, D) = const.$   $\ddot{\Phi}(t) = 2B$ ;

$$\bar{\varphi}_{неодн.} \neq 0; \quad \bar{\varphi}_{неодн.}(t) = (B/12) \cdot t^4. \quad (73)$$

Для  $\bar{\varphi}_{одн.}(t)$  в усіх трьох випадках маємо:

$$\bar{\varphi}_{одн.}^{IV}(t) = 0 \Rightarrow \bar{\varphi}_{одн.}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 + \alpha_3 \cdot t^3, \quad (74)$$

де  $(\alpha_{1,2,3,4}) = const.$

Для третього випадку маємо:

$$\bar{\varphi}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 + \alpha_3 \cdot t^3 + (B/12) \cdot t^4. \quad (75)$$

Термінальні (початкові й кінцеві) умови руху задля плавного запуску валу гусеничної машини мають вид:

$$\bar{\varphi}(t)|_{t=0} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left\{ \bar{\varphi}(t) \right\} \Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \bar{\varphi}(t) \right\} \Big|_{t=0} = \frac{a^2}{G \cdot I \cdot l} \cdot [M(l,0) - M(0,0)] \quad (76)$$

Ці умови дають змогу визначити коефіцієнти  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ :

$$\alpha_0 = 0; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \frac{a^2}{2 \cdot G \cdot I \cdot l} \cdot \{M(l,0) - M(0,0)\}. \quad (77)$$

Зрозуміло, що початкові значення моментів скрутки валу у  $t = 0$ ;  $(M(l,0), M(0,0))$  на кінцях валу вважаються заданими.

Задля визначення коефіцієнту  $\alpha_3$  можна використати одну з кінцевих термінальних умов: а) при  $t \geq \tau$  вал обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\Omega$  (задана величина); б) при  $t \geq \tau$  вал обертається без кутового прискорення.

Для першого варіанту термінальних умов маємо:

$$\left. \frac{d^1 \bar{\varphi}(t)}{dt^1} \right|_{t=\tau} = 2 \cdot \alpha_2 \cdot \tau + 3 \cdot \alpha_3 \cdot \tau^2 + \frac{B}{12} \cdot 4 \cdot \tau^3 = \Omega. \quad (78)$$

Звідси маємо:

$$\alpha_3 = \frac{1}{3 \cdot \tau^2} \cdot \left[ \Omega - \frac{B}{3} \cdot \tau^3 - 2 \cdot \alpha_2 \cdot \tau \right]. \quad (79)$$

(Зрозуміло, що для випадків (1, 2), зазначених вище,  $B \equiv 0$ ).

Для другого варіанту термінальних умов маємо:

$$\left. \frac{d^2 \bar{\varphi}(t)}{dt^2} \right|_{t=\tau} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = - \frac{[2 \cdot \alpha_2 + B \cdot \tau^2]}{6 \cdot \tau}. \quad (80)$$

(Знову ж таки, зрозуміло, що для випадків (1, 2), зазначених вище, що характеризують закон  $\Phi(t)$ , при якому  $\dot{\Phi}(t) = 0$ , маємо  $B \equiv 0$ ).

Оскільки умови (78) та (80) еквівалентні по своїй суті, то для  $\Omega$  можна знайти наступне співвідношення:

$$\Omega = \alpha_2 \cdot \tau - \frac{1}{6} \cdot B \cdot \tau^3 = - \frac{1}{6} \cdot B \cdot \tau^3 + \tau \cdot \frac{a^2}{2 \cdot G \cdot I \cdot l} \cdot \{M(l,0) - M(0,0)\}. \quad (81)$$

Вважаємо, що  $\tau$ ,  $B$  й інші механічні константи матеріалу валу, як і початкові моменти скрутки на його кінцях  $(M(l,0), M(0,0))$  – задані величини. Тоді закон обертання валу  $\bar{\varphi}(t)$ , за якого на нього упусканий період тривалістю  $\tau$  діє погонне зовнішнє навантаження мінімальної інтенсивності, має наступний вид:

$$\bar{\varphi}(t) = \alpha_2 \cdot t^2 + \alpha_3 \cdot t^3 + \frac{B}{12} \cdot t^4. \quad (82)$$

Величина коефіцієнта  $\alpha_2$  визначається зі співвідношення (77), а  $\alpha_3$  – зі співвідношення (79) чи (80).

Слід зазначити, що такий закон руху валу роторної системи гусеничної машини у короткотерміновому періоді пуску (величина  $\tau$  не перевищує 10 с) може забезпечити мехатронна система керування, яка встановлена у приводі машини й регулює оберти вала (тобто наявне регульоване управління у системі «вал приводу двигуна – регулятор швидкості обертання вала»).

### Висновки

1. Обґрунтовані фізико-механічна та математична моделі, які адекватно описують динамічні процеси у роторних системах гусеничних машин з мехатронними системами управління як об'єктах керування дискретно-континуального типу.

2. Проведений частотний аналіз вагомого валу з масами на кінцях. Визначені частоти власних коливань багатомасової роторної системи із урахуванням маси вала класичним методом (розв'язок трансцендентного характеристичного рівняння для просторових форм коливань) та методом Прагера.

3. Встановлені закони руху (обертання) валу роторної системи гусеничної машини у перехідний період (пуску), при яких: а) мінімізується середньоквадратичний градієнт моменту скрутки вдовж всієї вісі валу; б) мінімізується середньоквадратичне значення погонного

зовнішнього навантаження, діючого на вал. Для реалізації вказаних режимів руху валу необхідним є встановлення спеціальної мехатронної системи керування, яка у перехідних процесах (пуску, реверсу, гальмування) регулює оберти валу, створює оптимальні умови для його виходу на стаціонарний режим обертання з усталеними кутовими швидкостями.

4. Результати, отримані у даному дослідженні, можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку динамічних навантажень на вали роторних систем гусеничних машин з мехатронними системами керування, як на стадіях їх проектування, моделювання, конструювання, так і у режимах їх реальної експлуатації задля мінімізації вказаних навантажень у перехідних режимах функціонування (пуск, гальмування, реверс).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кожевников С.Н.* Динамика нестационарных процессов в машинах. – К.: Наукова думка, 1986. – 228с.
2. *Кожевников С.Н.* Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 160 с.
3. *Короткий А.И.* Обратные задачи динамики управляемых систем с распределёнными параметрами. Известия вузов. Математика. 1995. №11. – С. 101-124.
4. *Деятарёв Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Синтез оптимального управления в системах с распределёнными параметрами при неполном измерении состояния (обзор). Известия АН СССР. Кибернетика. 1983. №2. – С.123-136.
5. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
6. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. – М.: Физматлит, 2004. – 176 с.
7. *Габриелян М.С., Мовсисян Л.А.* К оптимальному управлению движением упругих систем. Механика твёрдого тела. 1991. №6. – С. 146-153.
8. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. Успехи математических наук. 2005. Вып. 6 (366). – С.89-114.
9. *Барсегян В.Р., Мовсисян Л.А.* К оптимальному управлению колебанием упругих систем. Прикладная механика. 2012. Т. 48. №2. – С. 137-142.
10. Вибрации в технике: справочник. В 6-ти Т.; ред. совет: Челомей В.Н. – М.: Машиностроение, 1981. Т. 1. – 356 с.
11. *Долгов Н.М.* Элементы динамики систем на подвижных деформируемых основаниях. – К.: Техніка, 1996. – 92 с.
12. *Долгов Н.М.* Высшая математика. – К.: Вища школа, 1988. – 416 с.
13. *Обод І.І., Заволодько Г.Е., Свид І.В.* Математичне моделювання систем. – Харків: Друкарня Мадрид, 2019. – 268 с.
14. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределёнными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
15. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
16. *Харкевич А.А.* Неустановившиеся волновые явления. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. – 202 с.
17. *Харкевич А.А.* Спектры и анализ. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1962. – 236 с.
18. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. – М.: Мир, 1971. – 558 с.
19. *Болотин В.В.* О параметрическом возбуждении поперечных колебаний. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. Сб. «Поперечные колебания и критические скорости». Вып. 2.

#### REFERENCES

1. *Kozhevnykov S.N.* Dynamyka nestatsyonarnykh protsessov v mashynakh (Dynamics of non-stationary processes in machines). – K.: Naukova dumka, 1986. – 228 s.
2. *Kozhevnykov S.N.* Dynamyka mashyn s uprugymy zveniyami (Dynamics of machines with elastic links). – K.: Yzd-vo AN USSR, 1961. – 160 s.
3. *Korotkiy A.Y.* Obratnye zadachy dynamiky upravlyаемykh system s raspredelennymy parametramy (Inverse problems of dynamics of control systems with distributed parameters). Yzvestiya vuzov. Matematika. 1995. №11. – S. 101-124.
4. *Dehtiarëv H.L., Syrazetdynov T.K.* Syntez optimalnoho upravleniya v systemakh s raspredelennymy parametramy pry nepolnom yzmerenyy sostoianiya (obzor) (Synthesis of optimal control in systems with distributed parameters with incomplete state measurement (review)). Yzvestiya AN SSSR. Kybernetika. 1983. №2. – S.123-136.
5. *Butkovskiy A.H.* Metody upravleniya systemamy s raspredelennymy parametramy (Methods for controlling systems with distributed parameters). – M.: Nauka, 1975. – 568 s.
6. *Znamenskaia L.N.* Upravlyeniye uprugymy kolebaniyami (Elastic vibration control). – M.: Fyzmatlyt, 2004. – 176 s.
7. *Habryelian M.S., Movsysisian L.A.* K optymalnomu upravleniyu dvizhenyem uprugykh system (Towards optimal control of the motion of elastic systems). Mekhanyka tverdogo tela. 1991. №6. – S. 146-153.
8. *Ilyn V.A., Moiseev E.Y.* Optymyzatsiya hranychnykh upravleniy kolebaniyami struny. Uspekhy matematycheskykh nauk (Optimization of boundary controls for string vibrations). 2005. Vyp. 6 (366). – S.89-114.
9. *Barsehian V.R., Movsysisian L.A.* K optymalnomu upravleniyu kolebaneyem uprugykh system (Towards optimal control of oscillations of elastic systems). Prykladnaia mekhanyka. 2012. T. 48. №2. – S. 137-142.
10. *Vybratsyy v tekhnike: spravochnyk* (Vibrations in technology: a guide). V 6-ty T.; red. совет: Chelomei V.N. – M.: Mashinostroeniye, 1981. T. 1. – 356 s.
11. *Dolhov N.M.* Elementy dynamiky system na podvyzhnykh deformyruemykh osnovaniyakh (Elements of dynamics of systems on moving deformable foundations). – K.: Tekhnika, 1996. – 92 s.
12. *Dolhov N.M.* Vysshaya matematika (Higher mathematics). – K.: Vyshcha shkola, 1988. – 416 s.

13. Obod I.I., Zavolodko H.E., Svyd I.V. Matematychno modeliuвання system (Mathematical modeling of systems). – Kharkiv: Drukarnia Madryd, 2019. – 268 s.
14. Sprazetdynov T.K. Optymyzatsiya system s raspredelennymy parametramy (Optimization of systems with distributed parameters). – М.: Nauka, 1977. – 480 s.
15. Zubov V.Y. Lektsyy po teoryi upravleniya (Lectures on control theory). – М.: Nauka, 1975. – 496 s.
16. Kharkevych A.A. Neustanovyvshiesia volnovye yavleniya (Transient wave phenomena). – М. – Л.: НУТТЛ, 1950. – 202 s.
17. Kharkevych A.A. Spektry u analiz (Spectra and analysis). – М.: Hos. yzd-vofyz.-mat. 1-ry, 1962. – 236 s.
18. Skuchyk E. Prostye y slozhnye kolebatelnye systemy (Simple and complex oscillatory systems). – М.: Мур, 1971. – 558 s.
19. Bolotyn V.V. O parametrycheskom vozbuзhdenyy poperechnykh kolebaniy (On parametric excitation of transverse vibrations). – М.: Yzd-vo AN SSSR, 1953. Sb. «Poperechnye kolebaniya y krytycheskye skorosty». Vyp. 2.

*Стаття надійшла 18.03.2026*

*Човнюк Ю.В., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П., Шудра Н.С.*

### **ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ РОТОРНИХ СИСТЕМ ГУСЕНИЧНИХ МАШИН З МЕХАТРОННИМИ СИСТЕМАМИ УПРАВЛІННЯ**

При побудові моделі гусеничних машин можна обмежуватись лише дискретними параметрами – масами та жорсткостями – не можна, якщо вали роторної системи мають значні маси та довжини. У довгих валопроводах можуть виникати хвильові процеси під дією зовнішніх збурень, прикладених до дискретних мас системи. Складність аналізу хвильових процесів у дискретно-континуальних системах, виникаючих у них при зміні режимів роботи, примушує шукати методи розв'язку більш прості, але такі, що дають задовільні поточності результати. Одним з таких методів є заміна дискретно-континуальної моделі дискретною, яка у незначній степені відрізняється за динамічними властивостями від вихідної. При цьому використовується метод скінчених елементів, на котрі може бути розділена кожна з ділянок валу зі зосередженими на ній дискретними масами, а сам вал є розподіленою масою. У зв'язку з цим, виникає потреба формулювання критерію, який дозволяє встановити еквівалентну систему дискретних мас, що замінюють дискретно-континуальну систему. Аналогічну задачу представляє собою аналіз динамічних процесів, які протікають у гідромеханічних системах, котрі включають довгі трубопроводи й великі маси ланок гідравлічного механізму.

У роботі отримані рівняння руху валу гусеничної машини з розподіленою масою, проведений аналіз вагомому валу з масами на кінцях, визначені частоти власних коливань багатомасової роторної системи гусеничної машини із урахуванням маси вала. Задля знаходження власних чисел системи використаний метод Прагера. Результати обчислення амплітуд коливань валу у подальшому можуть бути використані для відшукування найбільших значень моментів сил пружності ділянок валу. Зміна моменту сил пружності має характер биття. Кожній з частот власних коливань системи з кількома степенями вільності руху відповідає певна форма коливань, тому за близьких значень частот власних коливань відбувається безперервний перехід однієї форми коливань у іншу і, відповідно, періодичний обмін енергії між окремими ділянками системи при збереженні сили їх енергії постійною величиною. Контроль за рухом системи у перехідних процесах (пуску) може здійснюватися мехатронними системами управління.

**Ключові слова:** фундаментальний аналіз, динаміка, коливання, дискретно-континуальні роторні системи, гусеничні машини.

*Chovniuk Yu.V., Priymachenko O.V., Cherednichenko P.P., Shudra N.S.*

### **FUNDAMENTAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF DISCRETE-CONTINUOUS ROTARY SYSTEMS OF TRACKED MACHINES WITH MECHATRONIC CONTROL SYSTEMS**

When constructing a model of tracked machines, it is not possible to limit oneself to discrete parameters – masses and rigidities – if the shafts of the rotary system have significant masses and lengths. In long shaft lines, wave processes may occur under the action of external disturbances applied to the discrete masses of the system. The complexity of analyzing wave processes in discrete-continuous systems that arise in them when operating modes change forces us to look for simpler solution methods that still give satisfactory results in terms of accuracy. One such method is to replace the discrete-continuous model with a discrete one, which differs slightly in its dynamic properties from the original. In this case, the finite element method is used, into which each section of the shaft with discrete masses concentrated on it can be divided, and the shaft itself is a distributed mass. In this regard, there is a need to formulate a criterion that allows establishing an equivalent system of discrete masses that replace the discrete-continuous system. A similar task is the analysis of dynamic processes occurring in hydromechanical systems, which include long pipelines and large masses of hydraulic mechanism links.

The paper presents equations of motion for a tracked vehicle shaft with distributed mass, analyzes a weighted shaft with masses at its ends, and determines the natural frequencies of a multi-mass rotary system of a tracked vehicle, taking into account the shaft mass. The Prager method was used to find the natural numbers of the system. The results of calculating the amplitudes of shaft vibrations can be used to find the maximum values of the moments of elastic forces of the shaft sections. The change in the moment of elastic forces has a beating character. Each of the natural frequencies of a system with several degrees of freedom corresponds to a certain form of vibration, therefore, at close values of natural frequencies, there is a continuous transition from one form of vibration to another and, accordingly, a periodic exchange of energy between individual sections of the system while maintaining their energy constant. Control over the movement of the system in transient processes (start-up) can be carried out by mechatronic control systems.

**Keywords:** fundamental analysis, dynamics, oscillations, discrete-continuous rotary systems, tracked vehicles.

УДК 539.3

Човнюк Ю.В., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П., Шудра Н.С. **Фундаментальний аналіз динаміки дискретно-континуальних роторних систем гусеничних машин з мехатронними системами управління** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2026. – Вип. 116. – С. 344-359.

*У роботі отримані рівняння руху валу гусеничної машини з розподіленою масою, проведений аналіз вагомому валу з масами на кінцях, визначені частоти власних коливань багатомасової роторної системи гусеничної машини із урахуванням маси вала. Задля знаходження власних чисел системи використаний метод Прагера.*

Табл. 1. Іл. 4. Бібліогр. 19 назв.

UDC 539.3

Chovnyuk Ju.V., Prymachenko O.V., Cherednichenko P.P., Shudra N.S. **Fundamental analysis of the dynamics of discrete-continuous rotary systems of tracked machines with mechatronic control systems** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2026. – Issue. 116 – P. 344-359.

*The paper presents equations of motion for a tracked vehicle shaft with distributed mass, analyzes a weighted shaft with masses at its ends, and determines the natural frequencies of a multi-mass rotary system of a tracked vehicle, taking into account the shaft mass. The Prager method was used to find the natural numbers of the system.*

Tabl. 1. Fig. 4. Ref. 19.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри фізичного виховання і спорту КНУБА, Човнюк Юрій Васильович

**Адреса робоча:** 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**E-mail:** ychovnyuk@ukr.net

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-0608-0203>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри міського будівництва КНУБА, Приймаченко Олександр Віталійович

**Адреса робоча:** 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**E-mail:** pryimachenko.ov@knuba.edu.ua,

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-5125-8472>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доцент, доцент кафедри міського будівництва КНУБА, Чередніченко Петро Петрович

**Адреса робоча:** 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**E-mail:** petro\_che@ukr.net

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-7161-661X>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри міського будівництва КНУБА, Шудра Наталія Сергіївна,

**Адреса робоча:** 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**E-mail:** shudranatasha1984@gmail.com

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-5416-7680>