ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2026. № 116

УДК 539.3

# ОПТИМІЗАЦІЯ ТРАЄКТОРІЇ ГЛИБОКОЇ СВЕРДЛОВИНИ ПРИ ЗАСТОСУВАННІ ЗАДАЧІ ЛАГРАНЖА

**О.М. Андрусенко**[1],
канд. техн. наук

**В.В. Гайдайчук**[2],
д-р техн. наук

**К.Е. Котенко**[2],
канд. техн. наук

[1]*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, м. Київ*

[2] *Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ*

DOI: 10.32347/2410-2547.2026.116.336-343

У статті поставлено задачу, пов'язану з оптимізацією контурів глибоких нафтогазових свердловин. Вертикально пробурені свердловини зазвичай спрямовані на видобуток кількох різних продуктивних рівнів для покращення видобутку з кількох шарів шляхом комбінування їхньої продуктивності. Похила глибока свердловина має більше шансів зустріти нафтоносні пласти, ніж вертикальна, але існують обмеження щодо того, яку траєкторію криволінійної свердловини можна пробурити та які витрати це понесе. Вирішення цих питань можна знайти за допомогою методів диференціальної геометрії, нелінійного програмування та оптимального керування. В основі лежить математична модель відстеження траєкторії свердловини. Вона включає диференціальні рівняння, цільовий функціонал та обмеження, граничні фазові змінні та керуючу функцію. Цільові функціонали вибрані в інтегральній формі (формі Лагранжа), що мінімізує кривину траєкторії, довжину або вартість; запропоновано алгоритм їх мінімізації; розглянуто типові приклади.
**Ключові слова:** криволінійне буріння, глибокі свердловини, оптимізація траєкторії, оптимальне керування.

## Вступ

Наразі методи оптимального проектування систем і виробничих процесів починають займати домінуюче становище в суспільстві, насамперед через дефіцит і виснаження природних і матеріальних ресурсів, необхідність жорсткої економії енергії та зростання населення. Як наслідок, спостерігається зростання інтересу до прикладних екстремальних задач (тобто задач визначення найбільших і найменших значень, оптимальних умов перебігу процесів тощо). Слід наголосити, що подібні задачі зустрічалися в історії людства в тій чи іншій формі. Екстремальні задачі були предметом досліджень М. Кеплера, П. Ферма, Г. Гюйгенса, В. Ньютона, В. Бернуллі, Ж. Лагранжа, Л. Ейлера, К. Вейєрштрасса та інших. Узагальнення їх результатів дозволило розробити теорії лінійного та нелінійного програмування [1, 3], динамічного програмування [5] та оптимального керування [2, 4]. У цьому напрямку в 1950-х роках були створені метод динамічного програмування Р. Беллмана [5] та принцип максимуму Л. Понтрягіна [2].

Вони використовуються для створення прикладних алгоритмів та комп'ютерних програм для побудови оптимальних траєкторій польоту в космосі та авіації, транспорті, багатьох технологічних процесах та в економіці.

Підхід, що використовується в цих роботах, також може бути застосований до оптимального керування відстеженням траєкторій нафтогазових свердловин. Завдяки його використанню стає можливим підвищити ефективність свердловини та знизити вартість її проходки, а також збільшити швидкість та обсяг виснаження пласта [6, 7].

### Оптимізація в задачах варіаційного числення

У найпростіших випадках оптимізацію траєкторії свердловини можна виконати методами варіаційного числення.

Теорія оптимального керування - це розділ прикладної математики, в якому вивчаються методи формалізації та методи розв'язання задач вибору найкращого способу реалізації динамічного процесу. Цей процес можна описати за допомогою диференціальних рівнянь, що залежать від системи функцій або параметрів, які називаються керуваннями, які необхідно визначити. Бажані керування, а також саму реалізацію процесу, загалом слід вибирати з урахуванням обмежень, заданих постановкою задачі.

Задачі, які розглядаються в теорії оптимального керування, виникли з практичних потреб, насамперед у галузі механіки космічного польоту та теорії автоматичного керування. Формалізація та розв'язання цих задач поставили нові питання в теорії диференціальних рівнянь та в варіаційному численні. Вона присвячена вивченню методів знаходження екстремуму функціоналів, що залежать від вибору однієї або кількох функцій при різних обмеженнях (фазових, диференціальних, інтегральних тощо), але без урахування керуючих дій.

Як правило, задачі варіаційного числення описуються наступним чином. Потрібно мінімізувати функціонал

$$\Phi(x)=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{L}\left(\dot{x}(t),x(t),t\right)dt\to\min\,, \tag{1}$$

де $x=\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]^*$, $t_0\le t\le t$, точка позначає диференціювання по $t$, $\mathrm{L}-$ $m$-вимірна диференційовна функція з додатковими обмеженнями типу рівностей

$$\psi\left(\dot{x}(t),x(t),t\right)=0 \tag{2}$$

та деякі граничні умови.

Тут $\psi$ – $k$-вимірна векторна функція.

Задача мінімізації інтеграла (1) називається задачею Лагранжа. Окрім неї, також розглядається задача Майєра

$$\Phi(x)=g\left(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)\right). \tag{3}$$

з урахуванням відповідних обмежень.

Ці дві задачі входять до задачі Больца, для якої

$$\Phi(x)=\int_{t_0}^{t_1}L\left(\dot{x}(t),x(t),t\right)dt+g\left(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)\right), \tag{4}$$

з відповідними обмеженнями.

Особливістю задачі Больца є змішаний характер функціонала, який є сумою інтегрального функціонала та значень функцій $\dot{x}(t)$, $x(t)$ на кінцях. З фундаментальної точки зору, задача Больца еквівалентна задачі Лагранжа та зводиться до неї за допомогою спеціальних перетворень.

Найпростіші випадки в задачах варіаційного керування виникають, коли функціонал (1) одновимірний, немає обмежень, а граничні умови фіксовані:

$$\Phi(x)=\int_{t_0}^{t_1}L\left(\dot{x}(t),x(t),t\right)dt\to\min\,,$$

$$x(t_0)=x_0\,,\ x(t_1)=x_1\,. \tag{5}$$

Початок класичного варіаційного числення зазвичай пов'язують з цим завданням. Його теоретичні основи були закладені Л. Ейлером та Ж. Лагранжем. Вони розкрили зв'язок варіаційного числення з механікою, фізикою та геометрією. На першому етапі розвитку теорії варіаційного числення, головним чином Г. Лейбніц та І. Бернуллі отримали багато конкретних результатів у цих проблемах (про брахистохрон, про геодезичні тощо).

Мабуть, найпривабливішою та найілюстративнішою проблемою в теорії побудови оптимальних траєкторій є проблема геодезичної або проблема побудови найкоротших і найпряміших кривих на поверхнях. Важливою властивістю цієї кривої є те, що вона обов'язково є найкоротшою для двох найближчих точок на цій кривій, але не обов'язково найкоротшою для двох її крайніх (початкової та кінцевої) точок.

Завдання оптимізації траєкторії значно ускладнюється, якщо при її заданні враховується вплив функції керування $u(t)$ та обмеження

$$\varphi\left(u(t)\right)\le 0 \tag{6}$$

від характеру його зміни. При цьому враховується обмеження на зміну фазового вектора $x(t)$ у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)\,, \tag{7}$$

що характеризує рух досліджуваного об'єкта (механічної системи). Тут $f$ – нелінійна $n$-вимірна векторна функція.

Одним із найефективніших методів побудови функцій $u(t)$ та $x(t)$, що забезпечують екстремум для функціоналів (1), (3), (4), є покроковий метод проектування градієнта на лінеаризовані обмеження (2), (6), (7). Для дискретних систем цей метод описано в [1], його узагальнення на випадок нелінійних континуальних систем описано в [4]. Щоб застосувати його до оптимізації траєкторії свердловини, необхідно побудувати диференціальну модель виду (7), яка визначає модель її траєкторії.

**Геометрична модель траєкторії свердловини**

Розглянемо випадок плоскої постановки задачі оптимізації траєкторії свердловини. Нехай вона визначається кривою $S$ в системі координат $Oxy$ і, виходячи з точки $O$, закінчується на нафтоносному пласті $Q$ так, що дотичні до кривої $S$ та $Q$ збігаються (аналог м'якої зустрічі в управлінні космічними апаратами [4]), а крива $S$ не проходить через заборонену зону, обмежену кривою.

За цих припущень роль фазових змінних, що використовуються в рівнянні керованого руху (1), відіграють координати та траєкторії. Для виведення рівнянь керування в нашому випадку запишемо диференціальне рівняння кривини $R$

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2}\ .$$

Тут диференціювання вводиться відносно натурального параметра $l$, що визначає довжину траєкторії від певної початкової точки до поточної.

Оскільки прийнято, що $k = u$, перетворимо це рівняння до вигляду (1). Тоді

$$u^2 = \left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2 . \tag{8}$$

Враховуючи, що фазові змінні $x(l)$ та $y(l)$, а також незалежний параметр $l$ на кривій $S$ пов'язані співвідношенням

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2\,, \tag{9}$$

отримуємо

$$\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 = 1\,. \tag{10}$$

Звідси випливає рівність

$$y' = \pm\sqrt{1-(x')^2}\,, \tag{11}$$

в якій штрих позначає диференціювання відносно $l$.

Використовуючи рівність (11), отримуємо вираз для другої похідної

$$y'' = \mp\frac{x'}{\sqrt{1-(x')^2}}x''\,. \tag{12}$$

Виконуючи заміну (12), наводимо рівність (8) до вигляду

$$x''^2 + y''^2 = \frac{1}{1-x'^2}x''^2 = u^2\,. \tag{13}$$

За допомогою співвідношень (8) - (13) будуємо кінцеву систему рівнянь

$$x'' = \pm\sqrt{1-(x')^2}\,u\,,$$
$$y'' = \mp x'u\,, \tag{14}$$

що описує траєкторію свердловини. Вона є аналогом рівняння (7) керованого руху механічної системи. Тут замість параметра часу $t$ використовується довжина $l$, виміряна вздовж центральної лінії свердловини, а кривина приймається за функцію керування $K(l) = u(l)$.

Ці рівняння доповнено граничними умовами, які також відіграють роль обмежень. На верхньому краю їх можна представити у фіксованій формі.

$$x(0) = 0\,,\;\; y(0) = 0\,,\;\; x'(0) = 0\,,\;\; y'(0) = 1\,, \tag{15}$$

На нижньому кінці їх вид залежить від прийнятої постановки задачі. Нехай на цьому кінці свердловина повинна увійти в нафтоносний пласт, представлений кривою $Q$, так щоб дотичні до траєкторії $S$ та кривої $Q$ збігалися. Тоді виконуються рівності

$$x'\big|_L = x'\big|_Q\,, \qquad y'\big|_L = y'\big|_Q\,. \tag{16}$$

Керуюча функція $u(l)$, що використовується в рівняннях (14), може бути використана для оптимізації (мінімізації) деякого цільового функціоналу, що визначає якість траєкторії. Для цієї мети зручно використовувати значення повної кривини $\Phi = \int_0^L u^2(l)dl$. Тоді поставлена задача Лагранжа має такий вигляд: необхідно мінімізувати

$$\Phi = \int_0^L u^2(l)dl \to \min \tag{17}$$

з використанням обмежень (14) – (16).

У більш загальному випадку, додаткові рівності (нерівності) можуть бути використані для обмеження функцій *x, y* та *u*.

**Метод градієнтного проєктування на лінеаризовані обмеження**

Знаходимо варіацію керування $\delta u(l)$, яка задовольняє обмеження (2), (5), (6). Виключимо варіації фазових змінних $\delta x_1$, $\delta x_2$, $\delta x_3$, $\delta x_4$ обмежень (2), (5), (6), що представить розв'язок рівнянь у варіаціях (1) у формі Коші:

$$\delta x(l) = \int_0^l K(l,\lambda)\, f_u(\lambda)\, \delta u(\lambda)\, d\lambda\,, \tag{18}$$

де $K(l,\lambda) = Y(l)\cdot Y^{-1}(\lambda)$ – матриця Коші розміром 4×4 розв'язки однорідної системи рівнянь $x' = f_x \delta x$; $Y(0) = I$; $I$ – одинична матриця розміром 4×4.

Враховуючи (18), систему обмежень у (5) перепишемо в інтегральній формі:

$$\delta x(L) = \int_0^L K(L,l)\, f_u(l)\, \delta u(l)\, dl = 0\,. \tag{19}$$

У цій рівності виберемо матрицю-стовпець $V(l) = K(L,l)\, f_u(l)$ розміром $4\times 1$.

Найбільш круте зведення цільового функціоналу визначається антиградієнтом векторного функціоналу

$$-\nabla\Phi = -\left[\Phi_u\right]^* = -2u(l)\,, \tag{20}$$

що представляє в нашому випадку скалярну функцію.

Виконуючи антиградієнт проектування (20) для лінеаризованого обмеження (19) [1, 7], отримуємо

$$\delta u = -\alpha\left[2u - V^* W\right], \tag{21}$$

де $\alpha$ – малий нормуючий множник, що визначає розмір кроку у знайденому напрямку;

$$W = G^{-1} N \tag{22}$$

є чотиривимірним вектором-стовпцем умов Куна-Таккера з множниками Лагранжа

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2026. № 116

$$G = \int_0^L V(l) V^*(l)\, dl \tag{23}$$

є квадратною матрицею порядку $4 \times 4$, відому як матриця Ґріна, тоді як $\det G \neq 0$ визначає умову керованості;

$$N = \int_0^L V(l)\, 2u\, dl \tag{24}$$

є чотиривимірним вектором-стовпцем.

В результаті виконання дії (21) знаходимо невеликий приріст оптимізованого керування $\delta u$, а потім відповідний приріст фазових змінних $\delta z$ згідно з формулою (18). Цей розв'язок задовольняє обмеженням (15), (16). Додаючи знайдену варіацію керування $\delta u$ та фазових змінних $\delta z$ до відомих параметрів, отримуємо новий стан системи $u + \delta u$, $z + \delta z$, який ближчій до мінімуму функціоналу $\Phi(u)$. Виконуючи таку саму схему на наступних кроках, уточнюємо рішення, щоб досягти найменшого значення при виконанні умов (15), (16). Слід враховувати, що оскільки процедури оптимізації крокового виконання використовували операцію лінеаризації, необхідно після кожного кроку виправляти невеликі неточності в нелінійних рівняннях (наприклад, метод Ньютона).

**Результати розрахунків**

Нехай початкова траєкторія свердловини складена з трьох кругових ділянок (крива 1 на Рис. 1).

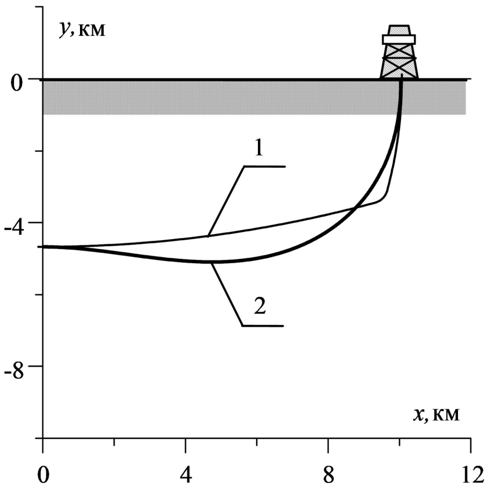

Рис. 1. Початкова (1) та оптимальна (2) траєкторії свердловини

Його початкова точка має координати $x = 0$, $y = -4670$ м; області перерізів обмежені колами з радіусами $R_1 = 36000$ м, $R_2 = 480$ м та $R_3 = 12000$ м, а їхні дугові сегменти складають $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 15^\circ$.

Вважається, що початкова функція розподілу кривини $k(l) = u(l)$ (крива 1 на Рис. 2) не є оптимальною, тому виникає потреба мінімізувати інтеграл $\Phi = \int_0^L k^2(l) dl = \int_0^L u^2(l) dl$.

Основні особливості функції $k(l)$ пов'язані з її кусочною узгодженістю та наявністю розривів. У результаті оптимізації функція $k(l)$ втрачає ці властивості та набуває гладкої форми (крива 2 на Рис. 2). Її було отримано шляхом виконання 160 кроків градієнтного спуску (20), (21) з одночасним проєктуванням на лінеаризовані обмеження (22)–(24).

Оптимізована траєкторія свердловини представлена кривою 2 на Рис. 1. Як видно, ця траєкторія позбавлена будь-якої нерівномірності.

При цьому значення функціоналу Φ зменшувалося від початкового значення $\Phi_0 = 0{,}1399 \; \frac{1}{\text{м}}$ до оптимізованого значення $\Phi_{\text{опт}} = 0{,}0069 \; \frac{1}{\text{м}}$.

## Висновки

Поставлено задачу комп'ютерної оптимізації криволінійних траєкторій свердловин на основі використання методів оптимального керування. Розроблено математичну модель у вигляді диференціальних рівнянь, пов'язаних з обмеженнями, що накладаються на фазові та керуючі функції. Сформульовано цільові функції, що представляють собою інтегральні функціонали (задачу Лагранжа), що оптимізують повну кривину траєкторії свердловини, її довжину та вартість. Використано метод градієнтного спуску разом з його проєкцією на лінеаризовані обмеження. Розроблено числові алгоритми, що реалізують запропонований підхід. Розглянуто приклад мінімізації кривини траєкторії свердловини, обговорено результати розв'язання.

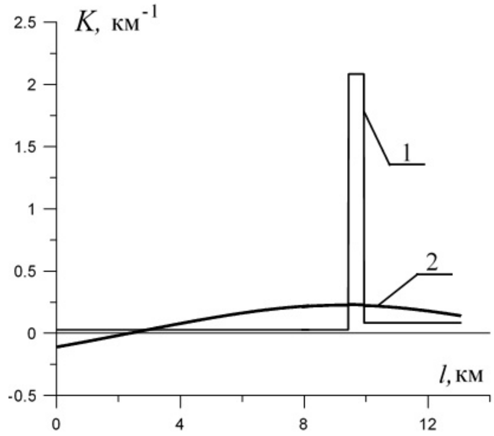


Рис. 2. Початковий (1) та оптимальний (2) функціонал кривини $K(l)$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Luenberger, David G.; Ye, Yinyu*. Linear and Nonlinear Programming. International Series in Operations Research & Management Science. — 116 (Third ed.) New York: Springer, 2008. — 546 pp.
2. *Ross, I.M.* A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control. — Collegiate Publisher, 2009 . — 82 pp.
3. *Ruszczynski, Andrze*. Nonlinear Optimization. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006. — 464 pp.
4. *Gulyayev, V.I., Bazhenov, V.A., Koshkin, V.L.* Optimal Control of Mechanical Systems Motion. — UMK VO, Kyiv (in Russian), 1988. — 234 pp.
5. *Richard E. Bellman*. Dynamic Programming. Princeton Landmarks in Mathematics. — Princeton, 2010 — 392 pp.
6. *Gulyayev, V., Glazunov, S., Glushakova, O., Vashchilina, E., Shevchuk, L., Shlyun, N., Andrusenko, E.* Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes.— Cambridge Scholars Publishing, 2019.
7. *Андрусенко О.М., Гайдайчук В.В., Котенко К.Е., Лазарева М.В.* Нелінійне оптимальне керування побудовою траєкторії глибокої свердловини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2025. – Вип.114. – С. 145 - 154.

REFERENCES

1. *Luenberger, David G.; Ye, Yinyu*. Linear and Nonlinear Programming. International Series in Operations Research & Management Science. — 116 (Third ed.) New York: Springer, 2008. — 546 pp.
2. *Ross, I.M.* A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control. — Collegiate Publisher, 2009 . — 82 pp.
3. *Ruszczynski, Andrze*. Nonlinear Optimization. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006. — 464 pp.
4. *Gulyayev, V.I., Bazhenov, V.A., Koshkin, V.L.* Optimal Control of Mechanical Systems Motion. — UMK VO, Kyiv (in Russian), 1988. — 234 pp.
5. *Richard E. Bellman*. Dynamic Programming. Princeton Landmarks in Mathematics. — Princeton, 2010 — 392 pp.
6. *Gulyayev, V., Glazunov, S., Glushakova, O., Vashchilina, E., Shevchuk, L., Shlyun, N., Andrusenko, E.* Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes.— Cambridge Scholars Publishing, 2019.
7. *Andrusenko O.M., Haidaichuk V.V., Kotenko K.E., Lazareva M.V.* Neliniine optymalne keruvannia pobudovoiu traiektorii hlybokoi sverdlovyny (Nonlinear optimal control of the construction trajectory of a deep well) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2025. – No.114 (2025). – P. 145 - 154.

*Стаття надійшла 20.01.2026*

*Андрусенко О.М., Гайдайчук В.В., Котенко К.Е.*

**ОПТИМІЗАЦІЯ ТРАЄКТОРІЇ ГЛИБОКОЇ СВЕРДЛОВИНИ ПРИ ЗАСТОСУВАННІ ЗАДАЧІ ЛАГРАНЖА**

В умовах сучасної нафтогазовидобувної галузі здійснюється будівництво свердловин різних типів, включаючи вертикальні, двовимірні та тривимірні спрямовані, а також розгалужені свердловини. Вибір та формування траєкторії свердловини є складним інженерно-технічним завданням і здійснюється з урахуванням глибини залягання та геологічної будови нафтогазоносного покладу, фізико-механічних властивостей гірських порід, ступеня їх твердості, структурної неоднорідності, проникності та інших геолого-технологічних факторів.

Сукупність зазначених параметрів надає визначальний вплив на техніко-економічні показники буріння, зокрема кінцеву вартість будівництва свердловини та її експлуатаційну продуктивність.

З метою підвищення загальної ефективності функціонування свердловин, скорочення витрат на їх прохідку, збільшення механічної швидкості буріння у практиці бурових робіт широко застосовуються методи оптимального нелінійного керування. Використання даних методів дозволяє більш точно контролювати процес формування траєкторії свердловини, адаптувати параметри буріння до геологічних умов, що змінюються і, як наслідок, досягати більш високих показників економічної та технологічної результативності.

За допомогою застосування диференціальних геометричних кореляцій розроблено нелінійну математичну модель контуру свердловини у вигляді системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Вибрано різні цільові функції, що відображають повну інтегральну кривину осі свердловини, її довжину та вартість її проходки; вибрано додаткові обмеження, що розділяють дозволені та заборонені зони. Функції кривини траєкторії та кручення використовуються як керуючі змінні. Розглянуто дискретні неперервні кореляції, а також застосовані методи нелінійного програмування.

На основі методу проєкції градієнта (антиградієнта) цільової функції на лінеаризовані обмеження на площині розроблено покроковий алгоритм наближення до оптимального стану. Для корекції зіпсованих обмежень на кожному кроці розрахунків використовується метод Ньютона. Обговорюються результати чисельного аналізу.

**Ключові слова:** криволінійне буріння, глибокі свердловини, оптимізація траєкторії, оптимальне керування.

*Andrusenko O.M., Gaidaichuk V.V, Kotenko K.E.*

**DEEP WELL TRAJECTORY OPTIMIZATION USING THE LAGRANCE PROBLEM**

In the conditions of the modern oil and gas industry, the construction of wells of various types is carried out, including vertical, two-dimensional and three-dimensional directional, as well as branched wells. The selection and formation of the trajectory of the well is a complex engineering and technical task and is carried out taking into account the depth and geological structure of the oil and gas-bearing deposit, the physical and mechanical properties of rocks, the degree of their hardness, structural heterogeneity, permeability and other geological and technological factors.

The set of these parameters has a decisive influence on the technical and economic indicators of drilling, in particular the final cost of well construction and its operational productivity.

In order to increase the overall efficiency of the functioning of wells, reduce the costs of drilling them, and increase the mechanical speed of drilling, methods of optimal nonlinear control are widely used in the practice of drilling operations. The use of these methods makes it possible to more accurately control the process of formation of the well trajectory, to adapt the drilling parameters to the changing geological conditions and, as a result, to achieve higher indicators of economic and technological effectiveness.

Using the application of differential geometric correlations, a nonlinear mathematical model of the well contour was developed in the form of a system of nonlinear ordinary differential equations. Different objective functions are selected, reflecting the full integral curvature of the well axis, its length and the cost of its penetration; additional restrictions separating permitted and prohibited areas are selected. Trajectory curvature and torsion functions are used as control variables. Discrete continuous correlations are considered, as well as non-linear programming methods are applied.

Based on the method of projection of the gradient (antigradient) of the objective function onto linearized constraints on the plane, a step-by-step algorithm for approaching the optimal state has been developed. Newton's method is used for correcting corrupted constraints at each step of calculations. The results of the numerical analysis are discussed.

**Ключові слова:** curvilinear drilling, deep boreholes, trajectory optimization, optimal control.

УДК 539.3
*Андрусенко О.М., Гайдайчук В.В., Котенко К.Е.* **Оптимізація траєкторії глибокої свердловини при застосуванні задачі Лагранжа** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2026. – Вип. 116. – С. 336-343.

*У статті поставлено задачу комп'ютерної оптимізації криволінійних траєкторій свердловин на основі використання методів оптимального керування. Розроблено математичну модель у вигляді диференціальних рівнянь, пов'язаних з обмеженнями, що накладаються на фазові та керуючі функції. Сформульовано цільові функції, що представляють собою інтегральні функціонали (задачу Лагранжа), що оптимізують повну кривину траєкторії свердловини, її довжину та вартість. Використано метод градієнтного спуску разом з його проєкцією на лінеаризовані обмеження. Розроблено числові алгоритми, що реалізують запропонований підхід. Розглянуто приклад мінімізації кривини траєкторії свердловини.*

Іл. 2. Бібліогр. 7 назв.

UDC 539.3
*Andrusenko O.M., Gaidaichuk V.V, Kotenko K.E.* **Deep Well Trajectory Optimization Using the Lagrange problem** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2026. – Issue. 116 – P. 336-343.

*The article presents the task of computer optimization of curved trajectories of wells based on the use of optimal control methods. A mathematical model has been developed in the form of differential equations associated with restrictions imposed on phase and control functions. Objective functions are formulated, which are integral functionals (Lagrange problem) that optimize the full curvature of the well trajectory, its length and cost. The gradient descent method was used together with its projection onto linearized constraints. Numerical algorithms implementing the proposed approach have been developed. An example of minimizing the curvature of the well trajectory is considered.*

Fig. 2. Ref. 7.

**Автор**: кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «КПІ імені Ігоря Сікорського» АНДРУСЕНКО Олена Миколаївна
**Адреса робоча:** 03056, Україна, Київ, вул. Політехнічна, 14-б, Корпус 14 03680 Україна, м. Київ, «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», кафедра прикладної математики, АНДРУСЕНКО Олені Миколаївні.
**Роб. тел.:** +38(044) 204-84-05
**Мобільний тел.:** +38(067) 298-13-87
**E-mail:** a.andrusenko@gmail.com
**ORCID ID:** https://orcid.org/0000-0001-9986-5888

**Автор**: доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної механіки КНУБА ГАЙДАЙЧУК Віктор Васильович.
**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, к. 433, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки, кафедра теоретичної механіки, ГАЙДАЙЧУКУ Віктору Васильовичу
**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-36
**Мобільний тел.:** +38(097) 542-94-27
**E-mail:** viktor_gaydaychuk@bigmir.net
**ORCID ID:** http://orcid.org/0000-0003-2059-7433

**Автор**: кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри теоретичної механіки, КНУБА КОТЕНКО Костянтин Едуардович.
**Адреса робоча:**03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, к. 433, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки, КОТЕНКУ Костянтину Едуардовичу
**Роб. тел.** +380 (44) 241-55-72
**Моб. тел.** +380 (95) 585-20-76
**e-mail:** 1969box@mail.ru
**ORCIDID:** https://orcid.org/0000-0002-3181-3819