

УДК 531:535.39:536.37:629.7.023

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ГРИНА В ГІПЕРБОЛІЧНІЙ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА НЕ-ФУР'Є-АНАЛІЗ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ПОЛІВ (РУХЛИВИХ) ДЕФОРМОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ/ТІЛ Й КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Ю.В. Човнюк,

канд. техн. наук, доцент

О.В. Приймаченко,

канд. техн. наук, доцент

П.П. Чередніченко,

доцент

Н.С. Шудра,

ст. викладач

Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна

DOI: 10.32347/2410-2547.2026.116.207-219

Нестационарные термopужные поля, возбуждаемые видеоимпульсами в этих средах (телах) и материалах, представлены аналитически благодаря точным периодическим и нестационарным развязкам уравнений термopужности, полученным непосредственно в часовом диапазоне за пределами Фурье-разложений за аналогией до известных результатов А.Б. Шварцбурга.

У даному дослідженні також отримане гіперболічне рівняння теплопровідності рухливого тіла й даний розв'язок вказаного рівняння у циліндричній системі координат методом функцій Гріна. Отриманий у роботі розв'язок відповідає гіперболічній теорії теплопровідності, яка враховує скінченність швидкості розповсюдження тепла, й дозволяє більш коректно призначати міцнісні норми для деталей, працюючих під дією термодинамічних напружень, а у технологічних процесах, наприклад, у задачі розподілу поля температури у зразках циліндричної форми, при їх обробці шліфувальним інструментом, оптимізувати параметри режиму обробки.

Ключові слова: метод функцій Гріна, гіперболічна теорія теплопровідності, аналіз, нестационарність, термopужні поля, рухливі деформовані середовища, композиційні матеріали, не-Фур'є-аналіз, короткі хвильові видеоимпульси.

Постановка проблеми. Нестационарные термopужные поля у деспергуючих, дисипативних деформованих середовищах/тілах та композиційних матеріалах можуть формуватись при впливі на ці середовища коротких хвильових імпульсів (наприклад, при їх лазерній обробці). Ефекти ударного збудження та розповсюдження таких хвиль приваблюють зараз увагу не тільки у вищезазначеній сфері людської діяльності, але й у кількох областях радіофізики, квазі- та металооптики, фізики лазерів (твердотільних), матеріалознавстві. Така увага обумовлена цілою низкою вагомих причин, які зазначені нижче.

1. Успіхи останніх років у генерації (коротких/надкоротких) видеоимпульсів ($\tau_{imn} \sim 10^{-15}$ с, де τ_{imn} – тривалість видеоимпульсу у часі) за допомогою широкосмугових радарів (характерна тривалість імпульсу 1...10 нс), систем пікосекундної оптики ($\tau_{imn} \approx 0,1...1$ пс) стимулювали інтерес до перспектив використання видеоимпульсів для передачі енергії та інформації через суцільні середовища (у тому числі для зміцнення композиційних матеріалів). Структура таких імпульсів суттєво відрізняється від тих, які традиційно обговорюються в моделях модульованих квазімонохроматичних сигналів з прямокутною або гауссовою (супергауссовою) формою огинаючої: а) огинаюча видеоимпульсу утримує у собі усього одне чи кілька коливань поля, форми котрих зазвичай далекі від синусоїдальної; б) передній та задній фронти несиметричні; в) відстані між точками перетину нуля огинаючої нерівні.

Тенденція до формування термopужних видеоимпульсів (ТВИ) характерна останнім часом й для фемтосекундної оптики (як зазначено вище $\tau_{imn} \leq 10^{-15}$ с), де ультракороткі імпульси, котрі виходять з оптичного компресора і взаємодіють з твердотільною мішенню, мають у своєму

складі 3-5 коливань електромагнітотермов'язкопружного поля. Крім того, аналогічна тенденція помітна й у оптиці (металооптиці), яка тільки зароджується, так званій оптиці (металооптиці) аттосекундних сигналів ($\tau_{\text{Lmn}} \leq 10^{-18}$ с), котрі взаємодіють з деформованим тілом/середовищем, оброблюваним лазерним випромінюванням композиційним матеріалом.

2. Традиційні розв'язки рівнянь термопружності [1, 2] у суцільних середовищах пов'язані з представленням розв'язків у вигляді добутку функцій, які залежать або від координат, або від часу (так звані роздільні розв'язки). При цьому для низки моделей (лінійних) деформованих тіл [1-3] рівняння руху перетворюються у хвильові рівняння. У випадку усталених рухів (у тому числі «високої частоти») розв'язок задач зводиться до розв'язування рівнянь Гельмгольца (скалярних або/і векторних). Часова залежність зазвичай досліджується за допомогою перетворення Фур'є. Багато десятиліть саме такий підхід формував мову опису квазімонохроматичних хвиль у квазі- та металооптиці, акустиці, радіофізиці, механіці деформованого твердого тіла, матеріалознавстві, однак спроби застосувати цей же підхід у динаміці взаємної коротких відеоімпульсів (скажімо, електромагнітної природи) з диспергуючими деформованими середовищами, композиційними матеріалами (з наступною генерацією у останніх термопружних імпульсів, зв'язаних полів близької часової тривалості) наштотувались на несподівані труднощі як концептуальні, так і обчислювальні: а) при Фур'є-перетворенні огинаюча сигналу скінченної тривалості (у часі) усереднюється по нескінченному інтервалу часу (від $-\infty$ до $+\infty$). Ділянки швидкої зміни огинаючої виявляються при цьому прихованими, однак саме ці ділянки важливі для реєстрації сигналу (будь-якої фізичної природи) у інформаційних системах (!). З іншої сторони, для відновлення часової огинаючої локалізованого сигналу за допомогою оберненого Фур'є-перетворення слід виключити поля гармонік поза областю локалізації, однак для уточнення області локалізації необхідно враховувати все зростаючу кількість гармонік; б) деформація імпульсу у диспергуючому середовищі (композиційному матеріалі) описується у частотній області, як показано, наприклад, у [4], методом розкладу фази у ряд за степенями відношення спектральної ширини імпульсу $\Delta\omega$ до несучої частоти ω . Однак для коротких широкосмугастих (термопружних) імпульсів, які утримують у собі (складаються з) одного чи кількох коливань зв'язаного поля, відношення $\Delta\omega/\omega$ не є малим параметром, при цьому кількість спектральних компонент, які необхідно використати для синтезу поля (термопружного) імпульсу у глибині деформованого середовища чи оброблюваного лазерним імпульсом композиційного матеріалу, стає надто великою. Така ситуація, у свою чергу, породжує цілий «букет» обчислювальних труднощів. Слід підкреслити, що зазначені вище труднощі пов'язані не з рівняннями руху деформованих середовищ, тіл, композиційних матеріалів, які виведені у межах їх лінійних моделей авторами [1-3] і є, як правило, гіперболічного типу, а з традиційним методом їх розв'язку за допомогою розділення змінних та перетворень Фур'є. Однак представлення термопружних полів за допомогою цього методу є не наслідком цих рівнянь руху, а лише одним (традиційним) зі способів їх розв'язку. Цей спосіб зручний для опису квазімонохроматичних хвиль у деформованих середовищах, тілах й композиційних матеріалах з повільно-змінною амплітудою та фазою, але є неефективним (чи слабко ефективним) для аналізу нестационарних та негармонічних зв'язаних полів різної фізичної природи (у тому числі термопружних) у вказаних вище об'єктах дослідження.

Тому задля отримання інформації про такі поля необхідно використати інші підходи і, зокрема, методи не-Фур'є-аналізу.

У даній роботі розглянуте гіперболічне рівняння теплопровідності рухомого тіла, вперше отримане у роботі [6], і даний його розв'язок у циліндричній системі координат методом функції Гріна для різних граничних умов. Розв'язок відповідає гіперболічній теорії теплопровідності, яка враховує скінченність швидкості розповсюдження тепла, й дозволяє більш правильно призначати норми по міцності для деталей, котрі працюють під впливом термодинамічних навантажень, а у технологічних процесах, наприклад, у задачі про розподіл поля температури у зразках циліндричної форми (або оболонках) при їх обробці шліфувальним інструментом [7], оптимізувати параметри режиму обробки.

Аналіз публікації за темою дослідження. У роботі [5] вперше проведений аналіз нестационарних термопружних полів у диспергуючих, дисипативних деформованих середовищах (тілах) та композиційних матеріалах при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами методом, розвинутим у дослідженні А.Б. Шварцбурга [4]. Результати, отримані у [5], будуть у даній роботі частково використані, але для іншої постановки задачі.

Автор [6] вперше отримав гіперболічне рівняння теплопровідності рухомого тіла і дав його розв'язок у циліндричній системі координат методом функцій Гріна. Такий розв'язок відповідає саме гіперболічній теорії теплопровідності, яка враховує скінченну швидкість розповсюдження тепла. Однак отриманий (у цитованій вище [6]) таким методом розв'язок має обмежену сферу застосування, оскільки встановлена функція Гріна задовольняє однорідному рівнянню, напіводнорідним початковим умовам і відповідним однорідним граничним умовам, що суттєво обмежує застосування отриманих рішень у більшості практичних ситуацій (де слід розв'язувати початкову і граничну задачі (задачу Коші) для граничних умов першого, другого і третього роду).

У даному дослідженні запропонований підхід до розв'язку типових задач для гіперболічного рівняння теплопровідності (рухомого) тіла методом функцій Гріна й проведений не-Фур'є-аналіз отриманих рішень (по аналогії до підходів робіт [4-5]).

Мета роботи полягає в обґрунтуванні методу А.Б. Шварцбурга [4] (методу не-Фур'є-аналізу) для дослідження нестационарних термопружних полів у деформованих середовищах/тілах та композиційних матеріалах, котрі є рухомими, задля знаходження точних аналітичних розв'язків гіперболічного рівняння теплопровідності (задачі Коші), які виникають при лазерній обробці вказаних середовищ (тіл)/матеріалів короткими хвильовими імпульсами. Отримані таким чином розв'язки слугують основою для наступного аналізу нестационарних термопружних полів методом функцій Гріна (за типових, у практичних ситуаціях, граничних умов).

Виклад основного змісту дослідження

1. Фур'є- та не-Фур'є-аналізи гіперболічного рівняння теплопровідності для нерухомого середовища/тіла

А. Класичний підхід і використання скалярного та векторного потенціалів. Задля отримання інформації про швидкозмінні у часі термопружні поля методами, розвинутими у [4], необхідно спочатку знайти нові точні розв'язки рівнянь термопружності для лінійних моделей деформованих тіл, середовищ, композиційних матеріалів, котрі представлені в роботах [1-3], при використанні підходу А.Б. Шварцбурга. Причому отримання таких розв'язків здійснюється без використання стандартного розділення змінних й поза межами Фур'є-розкладів. Саме такі «нероздільні» точні аналітичні розв'язки, які не зв'язані традиційними припущеннями про малість чи повільність зміни (термопружних) полів, і утворюють математичну основу опису швидкозмінних неперіодичних полів (різної фізичної природи) та коротких імпульсів (використовуваних у лазерній обробці композиційних матеріалів) у диспергуючих деформованих середовищах/тілах. Власне середовище при цьому вважається нерухомим та стаціонарним, а нестационарність просторово-часової структури зв'язаного поля, яке розповсюджується, пов'язана зі значною зміною його огинаючої за характерний час, який визначається мікроскопічними процесами встановлення поля (цієї фізичної природи) у деформованому середовищі, композиційному матеріалі (наприклад, час температурної релаксації). Саме така механіка нестационарних зв'язаних полів (у даному дослідженні – термопружного походження) стаціонарних деформованих середовищ, тіл, композиційних матеріалів і є предметом дослідження у даному пункті. При цьому використання методу [4] дозволяє провести редукцію рівнянь руху для моделей деформованих тіл [1-3], до стандартного (еталонного) рівняння Клейна-Гордона (лінійний варіант) і визначити його «нероздільні» розв'язки, котрі є одночасно нестационарними, неперіодичними (й точними!).

Відомо [1, 2], що лінійні рівняння руху ізотропного пружного тіла із урахуванням взаємодії температурного поля й поля деформацій за відсутності масових сил і джерел тепла для малих термічних збурень мають вид:

$$\begin{cases} \mu \cdot \Delta \bar{U} + (\lambda + \mu) \cdot \text{grad div } \bar{U} - (3\lambda + 2\mu) \cdot \alpha_T \cdot \text{grad}(T - T_0) - \rho \cdot \ddot{\bar{U}} = 0, \\ \Delta T - \frac{1}{a} \cdot \dot{T} - T_0 \cdot (3\lambda + 2\mu) \cdot \lambda_T^{-1} \cdot \alpha_T \cdot \text{div } \ddot{\bar{U}} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут, як при векторній формі запису, так й при координатній, використанні позначення, які загальноприйнятні у спеціальній літературі. За повторюваними двічі індексами знаходять суму від 1 до 3, використана прямокутна декартова система координат (x_1, x_2, x_3) для тривимірної постановки задачі, диференціювання по просторовим координатам позначене індексами після коми, а диференціювання по часу – точкою (зверху). Якщо подати вектор переміщень \bar{U} у формі:

$$\begin{cases} \bar{U} = \bar{U}_p + \bar{U}_s, & \bar{U}_p = \nabla \Phi, \\ \bar{U}_s = \nabla \times \bar{\Psi}, & \nabla \cdot \bar{\Psi} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де перша складова описує потенціальне поле, а друга – соленоїдальне, систему (1) можна звести [5] до виду:

$$\begin{cases} \left[\left(\Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mathbf{n} \cdot \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Delta \right] \Phi = 0; & \Delta \bar{\Psi} - c_2^{-2} \cdot \ddot{\bar{\Psi}} = 0; \\ \gamma = \alpha_T \cdot \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}; & \mathbf{n} = T_0 \cdot \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda_T}, \end{cases} \quad (3)$$

c_1, c_2 – швидкості розповсюдження поздовжніх та поперечних (до напрямку руху) термопружних хвиль.

Температуру T при традиційному підході, розвинутому у [1], можна знайти за формулою:

$$T - T_0 = \gamma^{-1} \cdot (\Delta \Phi - c_1^{-2} \cdot \ddot{\Phi}), \quad (4)$$

де T_0 – початкова (у момент часу $t = 0$) температура середовища/тіла.

Як випливає з (3), врахування впливу взаємодії температурного поля й поля деформацій викликає зміни лише у рівнянні для хвилі розширення (поздовжньої хвилі).

Зазначимо, що для усталеного у часі коливання, що розповсюджується у середовищі/тілі ($\sim \exp(-i\omega t)$, $i^2 = -1$, ω – частота (колова) коливань), перше рівняння системи (3) можна подати [5] у виді:

$$(\Delta + \alpha_j^2) \cdot \Phi_j = 0, \quad j = \overline{(1,2)}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \alpha_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega^2}{c_1^2} + i \cdot \omega \cdot \left(\frac{1}{a} + \mathbf{n} \cdot \gamma \right) \right\} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c_1^2} + i \cdot \omega \cdot \left(\frac{1}{a} + \mathbf{n} \cdot \gamma \right) \right]^2 - \frac{i\omega^3}{ac_1^2}}, \\ \Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \end{cases} \quad (6)$$

Отже, вихідна система (3) еквівалентна трьом хвильовим рівнянням – двом скалярним (5) та одному векторному:

$$\Delta \bar{\Psi} - \beta^2 \cdot \bar{\Psi} = 0; \quad \beta^2 = \omega^2 / c_2^2. \quad (7)$$

На відміну від хвильових чисел α_j , $j = \overline{(1,2)}$, поздовжніх хвиль, хвильове число β є дійсним. Температуру (T) у відповідності з [1] можна визначити через потенціали наступним чином:

$$T = \gamma^{-1} \cdot [(\alpha^2 - \alpha_1^2) \cdot \Phi_1 - (\alpha^2 - \alpha_2^2) \cdot \Phi_2], \quad \alpha^2 = \omega^2 / c_1^2. \quad (8)$$

Для задач про термопружні рухи на границі (при взаємодії широкої смуги (за частотою) електромагнітного імпульсу/відеоімпульсу з деформованим тілом/середовищем або композиційним матеріалом) необхідно задавати ще одну додаткову умову та початкову умову для температури (T). У випадку конвективного теплообміну між тілом та оточуючим середовищем термічна умова має вид:

$$\lambda_2 \cdot \frac{\partial T}{\partial n} + \bar{\alpha} \cdot T = f(x, t); \quad x \in S, \quad (9)$$

де $(\lambda_2, \tilde{\alpha})$ – коефіцієнти тепло- та температуропровідності тіла/середовища, S – поверхня тіла, середовища, взаємодіюча з електромагнітним імпульсом.

Використовуючи співвідношення (5), (6), можна звести [5] задачу визначення потенціального поля (Φ) , а значить і температури $T_{\text{поля}}$ (8), до аналізу телеграфного рівняння для неперіодичних термопружних полів (наприклад, в одновимірній постановці задачі).

Аналіз телеграфного рівняння для неперіодичних термопружних полів, котре для одновимірної постановки задачі ($\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, де k дорівнює будь-якому з чисел (1,2,3)) має вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k^2} \frac{\operatorname{Re}\{(\alpha_j)^2\}}{\tilde{\omega}^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} = \frac{J_m\{(\alpha_j)^2\}}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t}. \quad (10)$$

На відміну від результатів роботи [5], у даному дослідженні розв'язане рівняння (10) методом, викладеним у [4]. Знайшовши з (10) Φ_j , можна за (8) визначити T . Отже, у (10) $\tilde{\omega}$ – характерна кругова частота короткого термопружного імпульсу, а рівняння представляє собою найпростіший приклад телеграфного рівняння, котре широко застосовується для опису хвильових процесів у дисипативних (деформованих) середовищах та композиційних матеріалах.

Введемо характерний час становлення термопружного поля $\tau_{\text{характ.}}$:

$$\tau_{\text{характ.}} = \frac{2}{\left\{ \frac{J_m[(\alpha_j)^2]}{\tilde{\omega}} \right\}}, \quad (11)$$

тоді можна подати традиційний розв'язок рівняння (10), який описує затухаючі синусоїдальні хвилі, котрі характеризуються комплексним хвильовим числом K :

$$K = \frac{\tilde{\omega}}{\bar{c}_1} \sqrt{1 + 2 \cdot i \cdot (\tilde{\omega} \cdot \tau_{\text{характ.}})^{-1}}, \quad \bar{c}_1 = \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\operatorname{Re}\{(\alpha_j)^2\}}}. \quad (12)$$

Поряд з розв'язком (12) та розв'язком, який можна подати у вигляді інтегралів по траєкторіям (Р.Фейнмана) [4], рівняння (10) можна переписати у безрозмірному виді:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau}. \quad (13)$$

Точні аналітичні розв'язки безрозмірного телеграфного рівняння (13), котрі описують скалярний потенціал $\Phi_{1,2}$ описують також й несинусоїдальні термопружні поля у часовій області. У рівнянні (13) введені наступні нормовані змінні:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{10} \\ \Phi_{20} \end{Bmatrix} \cdot f, \quad \tau = t \cdot \tau_{\text{характ.}}^{-1}, \quad \eta = x_k \cdot (\bar{c}_1 \cdot \tau_{\text{характ.}})^{-1}, \quad k = (1; 2; 3). \quad (14)$$

(Слід зазначити, що згідно з оцінками [5] для широкої смуги по частоті коротких термопружних імпульсів можна покласти $\Phi \approx \Phi_1, \Phi_2 \rightarrow 0$).

Для змінного неперіодичного термопружного поля розв'язки (13) згідно [4] можна подати у формі:

$$f = \sum_q a_q \cdot \bar{f}_q, \quad (15)$$

$$\bar{f}_q = \frac{1}{2} \cdot (\theta_{q-1} + \theta_{q+1} - 2 \cdot \theta_q) = \frac{\partial \theta_q}{\partial \tau}, \quad (16)$$

$$\theta_q = \exp(-\tau) \cdot \left(\frac{\tau - \eta}{\tau + \eta} \right)^{q/2} \cdot I_q \left(\sqrt{\tau^2 - \eta^2} \right), \quad \tau \gg \eta. \quad (17)$$

Тут I_q – модифікована функція Бесселя; індекс q визначається з граничних умов на поверхні деформованого середовища (композиційного матеріалу) $\eta = 0$.

Характерні властивості нероздільних функцій (15) розглянуті нижче (після викладу основного змісту пункту Б).

Б. *Гіперболічне рівняння теплопровідності нерухомого тіла*. Згідно з результатами роботи [6], гіперболічне рівняння теплопровідності для нерухомого тіла має наступний вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = V_\tau^2 \cdot \Delta T, \quad (18)$$

де τ_r – час релаксації теплового потоку \bar{q} у даному середовищі, $V_\tau = \sqrt{a/\tau_r}$, a – коефіцієнт температуропровідності. (Зазначимо, що коефіцієнт τ_r виникає у відповідності із законом Фур'є-Ликова):

$$\bar{q} + \tau_r \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\alpha_T \cdot \text{grad} T. \quad (19)$$

V_τ у (18) введене для позначення швидкості розповсюдження тепла у даному тілі (середовищі). Шляхом нескладних перетворень рівняння (18) можна звести до наступного виду:

$$\Delta T - \frac{1}{V_\tau^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau_r \cdot V_\tau^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (20)$$

Якщо знову ввести для (20) характерний час встановлення термопружного поля $\tilde{\tau}_{\text{характ.}}$:

$$\tilde{\tau}_{\text{характ.}} = \frac{2}{(1/(\tau_r \cdot V_\tau^2)) \cdot V_\tau^2} = 2\tau_r, \quad (21)$$

тоді можна подати традиційний розв'язок (20), який описує затухаючі синусоїдальні хвилі, котрі характеризуються комплексним хвильовим числом \tilde{K} :

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{\omega}}{V_\tau} \cdot \sqrt{1 + 2i(\tilde{\omega} \cdot \tilde{\tau}_{\text{характ.}})^{-1}}. \quad (22)$$

Але рівняння (20) описує також й несинусоїдальні термопружні поля у часовій області. Якщо скористатись нормованими змінними:

$$T = T_0 \cdot f, \quad \tau = t/\tilde{\tau}_{\text{характ.}}, \quad \eta = x_k \cdot (V_\tau \cdot \tilde{\tau}_{\text{характ.}})^{-1}, \quad k=(1;2;3). \quad (23)$$

тоді рівняння (20) можна теж подати у безрозмірному виді типу (13) (для одновимірної постановки задачі). Точні аналітичні розв'язки (20), (13) (при врахуванні (21) й (23)) знаходимо за співвідношеннями (15)-(17), поданими вище.

Отже, характерні властивості нероздільних функцій (по просторовій (x_k), а також по часовій (t) координатам) знаходимо за співвідношеннями (15)-(17) для вихідних рівнянь (10) та (18), які описують термопружні поля у деформованих середовищах/тілах та композиційних матеріалах. Вони зводяться до наступних:

$$1) \quad \theta_q(\tau, \eta) \Big|_{\tau=\eta} = 0, \quad q > 0; \quad (24)$$

2) використовуючи відому асимптотику функцій:

$$I_q(u) = I_q(u) \Big|_{u \gg 1} + \frac{\exp(-u)}{\sqrt{2\pi \cdot u}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \cdot \frac{\Gamma\left(q + \frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma\left(q + \frac{1}{2} - n\right)}, \quad (25)$$

де Γ – гамма-функція (свого аргументу), можна знайти закон спадання термопружного поля \tilde{f}_q (15) у будь-якому перерізі при $\tau \gg \eta$:

$$\bar{f}_q|_{\tau \gg \eta} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \tau^{-3}. \tag{26}$$

У таблиці 1 наведені значення функції $\bar{f}_q(\tau)$ (15), яка характеризує закон спадання термопружного поля у будь-якому перерізі диспергуючого, дисипативного деформованого середовища/тіла чи композиційного матеріалу при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами ($\tau \gg \eta$).

Слід зазначити, що у порівнянні з чисельними розрахунками, які проведені у [5] для $\{-\bar{f}_q(\tau)\}$, у даному дослідженні діапазон зміни τ суттєво збільшений (і найменші його значення близькі до ширини власне самого відеоімпульсу в часовому вимірі).

Чисельні розрахунки, наведені у таблиці 1 свідчать про те, що амплітуда термопружного імпульсу у середовищах/тілах зазначеного вище типу, як і у композиційних матеріалах, взаємодіючих з лазерним випромінюванням, суттєво зменшується з плином часу (τ) (див. Таблицю 2). Зокрема, у таблиці 2 наведені значення τ_{imn} та відношення $\left\{ \bar{f}(q)|_{\tau=\tau_{imn}} / \bar{f}(q)|_{\tau=1} \right\}$ для

типових лазерних систем, які використовуються для зміцнення поверхні матеріалів. Крім того, у зазначеній вище таблиці визначені (у децибелах) показники відношення інтенсивностей термопружних коливань у ті ж моменти часу ($\tau = \tau_{imn}; \tau = 1$), котрі пропорційні квадрату амплітуди коливань ($\sim [\bar{f}(q)]^2$), і відображають швидкість їх зменшення у часі, тобто:

$$\beta = 20 \lg \left\{ \bar{f}(q)|_{\tau=\tau_{imn}} / \bar{f}(q)|_{\tau=1} \right\}, \text{ дБ}; \tag{27}$$

3) суттєвим є також і те, що нестационарні термопружні поля у деформованих середовищах/тілах та композиційних матеріалах характеризуються природним масштабом часу $\tau_{характ.}$ (11), (21) (з котрим, до речі, можна зв'язати й характерний «масштаб» частот: $\tilde{\omega}_{характ.} \approx (\tau_{характ.})^{-1}$), граючи при цьому визначальну роль у процесах імпульсного збудження зв'язаних полів у суцільних (деформованих) середовищах і композиційних матеріалах (див таблицю 3).

2. Аналіз гіперболічного рівняння теплопровідності для рухомого середовища/тіла

Використовуючи результати роботи [6], визначимо для гіперболічного рівняння теплопровідності рухомого тіла методом функцій Гріна аналітичні розв'язки у циліндричній системі координат. При цьому у якості граничних та початкових умов (задача Коші) візьмемо типові для практичної діяльності та характерні для деталей, працюючих під дією термодинамічних напружень (наприклад, у технологічних процесах при визначенні розподілу поля температури у зразках циліндричної форми, котрі обробляють шліфувальним інструментом [7]).

Таблиця 1
Залежність \bar{f}_q від τ ($\tau \gg \eta$)

τ (назва смуги)	$-\bar{f}_q$
10^{-18} (атто-)	$2 \cdot 10^{53}$
10^{-15} (фемто-)	$2 \cdot 10^{44}$
10^{-12} (піко-)	$2 \cdot 10^{35}$
10^{-9} (нано-)	$2 \cdot 10^{26}$
10^{-6} (мікро-)	$2 \cdot 10^{17}$
10^{-3} (мілі-)	$2 \cdot 10^8$
10^{-2} (санти-)	$2 \cdot 10^5$
10^{-1} (деци-)	200
0,2	25
0,3	7,41
0,5	1,60
0,8	0,39
1,0	0,20
10	$2 \cdot 10^{-4}$
20	$2 \cdot 10^{-5}$
100	$2 \cdot 10^{-7}$
1000	$2 \cdot 10^{-10}$
10^4	$2 \cdot 10^{-13}$

Таблиця 2
Залежність

$$\left\{ \bar{f}(q)|_{\tau=\tau_{imn}} / \bar{f}(q)|_{\tau=1} \right\} = \gamma$$

від $\tau_{imn}; (\tau \gg \eta)$

τ_{imn}	γ	$\beta, \text{ дБ}$
10^{-18}	10^{54}	1080
10^{-15}	10^{45}	900
10^{-12}	10^{36}	720
10^{-9}	10^{27}	540
10^{-8}	10^{24}	480
10^{-7}	10^{21}	420
10^{-6}	10^{18}	360
10^{-5}	10^{15}	300
10^{-4}	10^{12}	240
10^{-3}	10^9	180
10^{-2}	10^6	120
10^{-1}	10^3	60

Залежність $\tilde{\omega}_{\text{характ.}}$ від $\tau_{\text{характ.}}$

$\tau_{\text{характ.}} (2\tau_r)$, с	$\tilde{f}_{\text{характ.}}^*$, Гц	$\tilde{\omega}_{\text{характ.}}$, с ⁻¹
10 ⁻¹⁸	16·10 ¹⁶	10 ¹⁸
10 ⁻¹⁵	16·10 ¹³	10 ¹⁵
10 ⁻¹²	16·10 ¹⁰	10 ¹²
10 ⁻⁹	16·10 ⁷	10 ⁹
10 ⁻⁸	16·10 ⁶	10 ⁸
10 ⁻⁷	16·10 ⁵	10 ⁷
10 ⁻⁶	16·10 ⁴	10 ⁶
10 ⁻⁵	16·10 ³	10 ⁵
10 ⁻⁴	16·10 ²	10 ⁴
10 ⁻³	160	10 ³
10 ⁻²	16	10 ²
10 ⁻¹	1,6	10

Примітка. $\tilde{f}_{\text{характ.}}^* = \frac{\tilde{\omega}_{\text{характ.}}}{2\pi}$, Гц

Застосуємо для рівняння (29) процедуру представлення розв'язку через функцію Гріна [8-10] за граничних умов, відмінних від запропонованих у [6], які є більш узагальненими.

Спочатку застосуємо для $T(r, \varphi, Z, t)$ перетворення:

$$T(r, \varphi, Z, t) = \theta(r, \varphi, Z, t) \cdot \exp(-(t/(2\tau_r))). \quad (30)$$

Тоді рівняння (29) перетворюється у рівняння гіперболічного типу, яке не містить першу похідну по часу $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$, і носить назву рівняння Клейна-Гордона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r} \frac{\partial T}{\partial t} = V_\tau^2 \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right] + \Phi(r, \varphi, Z, t), \quad (31)$$

де $\Psi(r, \varphi, Z, t) = \Phi(r, \varphi, Z, t) \cdot \exp\{t/(2\tau_r)\}$.

У подальшому розглядатимемо розв'язки для (31) для кругового циліндру скінченної довжини ($0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq Z \leq l$, де R – радіус, l – довжина циліндра вздовж осі OZ), причому граничні умови використовуємо такі ж, як й у третій крайовій задачі [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \tilde{f}_0(r, \varphi, Z), \text{ при } t=0 \text{ (початкова умова);} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{f}_1(r, \varphi, Z), \text{ при } t=0 \text{ (початкова умова);} \\ \frac{\partial T}{\partial r} + k_1 \cdot T = \tilde{g}_1(\varphi, Z, t), \text{ при } r=R \text{ (гранична умова);} \\ T(r, \varphi, Z, t) - \text{функція, обмежена при } r=0 \text{ (гранична умова);} \\ \frac{\partial T}{\partial Z} - k_2 \cdot T = \tilde{g}_2(r, \varphi, t), \text{ при } Z=0 \text{ (гранична умова);} \\ \frac{\partial T}{\partial Z} + k_3 \cdot T = \tilde{g}_3(r, \varphi, t), \text{ при } Z=l \text{ (гранична умова).} \end{array} \right. \quad (32)$$

Враховуючи перетворення (30), крайові умови (32) для $\theta(r, \varphi, Z, t)$ мають наступний вигляд:

Гіперболічне рівняння теплопровідності для тіла, яке рівномірно рухається, має наступний вид [6]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r} \frac{\partial T}{\partial t} = V_\tau^2 \cdot \Delta T + \frac{1}{\lambda \cdot \tau_r} \left(1 + \tau_r \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{q}), \quad (28)$$

де \vec{v} – швидкість рівномірного руху тіла, λ – коефіцієнт теплопровідності тіла, \vec{q} – зовнішній тепловий потік, який притікає до тіла. По суті, \vec{q} – вектор потоку тепла на поверхні циліндра (якщо розглядається тіло циліндричної форми), а \vec{v} – вектор швидкості руху часточок граничної поверхні циліндра.

Рівняння (28) у циліндричній системі координат $0r\varphi Z$ набуває наступного вигляду [6]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r} \frac{\partial T}{\partial t} = V_\tau^2 \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right] + \Phi(r, \varphi, Z, t), \quad (29)$$

де $\Phi(r, \varphi, Z, t) = \frac{1}{\lambda \tau_r} \left(1 + \tau_r \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{q})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \tilde{f}_0(r, \varphi, Z), \text{ при } t=0 \Leftrightarrow \theta = f_0(r, \varphi, Z) \equiv \theta = \tilde{f}_0(r, \varphi, Z); \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \tilde{f}_1(r, \varphi, Z) \cdot \frac{1}{2\tau_r} = \theta = f_1(r, \varphi, Z), \text{ при } t=0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} + k_1 \cdot \theta = \tilde{g}_1(\varphi, Z, t) \cdot \exp((t/(2\tau_r))) = g_1(\varphi, Z, t), \text{ при } r=R; \\ \theta(r, \varphi, Z, t) - \text{функція, обмежена при } r=0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial Z} - k_2 \cdot \theta = \tilde{g}_2(r, \varphi, t) \cdot \exp((t/(2\tau_r))) = g_2(r, \varphi, t), \text{ при } Z=0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial Z} + k_3 \cdot \theta = \tilde{g}_3(r, \varphi, t) \cdot \exp((t/(2\tau_r))) = g_3(r, \varphi, t), \text{ при } Z=l. \end{array} \right. \quad (33)$$

Розв'язок $\theta(r, \varphi, Z, t)$ (а значить, й $T(r, \varphi, Z, t)$ згідно (30)) визначається за співвідношеннями, встановленими у [10], і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \theta(r, \varphi, Z, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^l \int_0^{2\pi R} \int_0^0 \xi \cdot f_0(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, Z, \xi, \eta, \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta \right\} + \\ & + \int_0^l \int_0^{2\pi R} \int_0^0 \xi \cdot f_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, Z, \xi, \eta, \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta + V_\tau^2 \cdot R \cdot \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^0 g_1(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, Z, R, \eta, \zeta, t-\tau) d\eta d\zeta d\tau - \\ & - V_\tau^2 \cdot \int_0^l \int_0^{2\pi R} \int_0^0 \xi \cdot g_2(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, Z, \xi, \eta, 0, t-\tau) d\xi d\eta d\tau + V_\tau^2 \cdot \int_0^l \int_0^{2\pi R} \int_0^0 \xi \cdot g_3(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, Z, \xi, \eta, l, t-\tau) d\xi d\eta d\tau + \\ & + \int_0^l \int_0^{2\pi R} \int_0^0 \xi \cdot \Psi(\xi, \eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, Z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \end{aligned} \quad (34)$$

Тут функція Гріна $G(r, \varphi, Z, \xi, \eta, \zeta, t)$ визначається з наступного співвідношення:

$$G(r, \varphi, Z, \xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{S=1}^{\infty} \frac{B_{nmS}}{C_{nmS}}, \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned} B_{nmS} &= A_n \cdot \mu_{nm}^2 \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cdot \cos[n(\varphi - \eta)] \cdot h_S(Z) \cdot h_S(\zeta) \cdot \sin(\lambda_{nmS} \cdot t), \\ C_{nmS} &= (\mu_{nm}^2 \cdot R^2 + k_1^2 \cdot R^2 - n^2) \cdot [I_n(\mu_{nm} \cdot R)]^2 \cdot \|h_S\|^2 \cdot \lambda_{nmS}. \end{aligned}$$

Тут:

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 2 & \text{при } n>0, \end{cases} \quad \lambda_{nmS} = \sqrt{V_\tau^2 \cdot \mu_{nm}^2 + V_\tau^2 \cdot \beta_S^2 + (-1/(4\tau_r^2))},$$

$$h_S(Z) = \cos(\beta_S \cdot Z) + \frac{k_2}{\beta_S} \cdot \sin(\beta_S \cdot Z), \quad \|h_S\|^2 = \frac{k_3}{2 \cdot \beta_S^2} \cdot \frac{(\beta_S^2 + k_2^2)}{(\beta_S^2 + k_3^2)} + \frac{k_2}{2 \cdot \beta_S^2} + \frac{l}{2} \cdot \left(1 + \frac{k_2^2}{\beta_S^2}\right).$$

$I_n(\xi)$ – функції Бесселя n -го порядку від аргументу (ξ), μ_{nm} та β_S – додатні корені трансцендентних рівнянь:

$$\mu \cdot I_n'(\mu R) + k_1 \cdot I_n(\mu R) = 0, \quad \frac{\text{tg}(\beta l)}{\beta} = \frac{k_2 + k_3}{\beta^2 - k_2 \cdot k_3}. \quad (36)$$

(У першому рівнянні (36) штрих при функції Бесселя $I_n'(\mu R)$ означає диференціювання цієї функції по її аргументу).

Зрозуміло, що співвідношення (29)-(36) слід використовувати для розгляду рухомих ($\bar{v} \neq 0$) і нерухомих ($\bar{v} = 0$) середовищ, тіл, матеріалів, коли важливим є врахування у аналізі скінченних розмірів вказаних об'єктів впливу (зі сторони відеоімпульсів лазерного випромінювання). У випадку, коли аналізують лише форму імпульсу термопружного поля, що виникає у результаті

взаємодії з електромагнітним випромінюванням лазера, можна граничними ефектами знехтувати і використовувати співвідношення (20)-(26) для нерухомих тіл, середовищ, матеріалів, а вплив руху їх на форму вказаного імпульсу термопружного поля визначати за функцією Гріна (35), (36), обчислюючи у виразі (34) лише останній член, пропорційний $\Psi(r, \varphi, Z, t)$.

Стосовно реалізації знайдених рішень у часовому вимірі можна стверджувати наступне:

- а) $0 < t \leq \tau_{imn}$, слід використовувати розв'язки (20)-(26);
- б) $\tau_{imn} < t \leq \tau_r$, слід використовувати і розв'язки (20)-(26) й ті, що знаходяться зі співвідношень (28)-(36) (якщо враховується рух об'єкта та його скінченні розміри);
- в) при $t > \tau_r$, доцільно для врахування власне руху та розмірів об'єкту впливу лазерного випромінювання використовувати співвідношення (28)-(36), отримані методом функції Гріна.

Висновки

1. Обґрунтована фізико-механічна модель та визначені основні параметри термопружних полів (нестационарних) рухливих деформованих середовищ, тіл та композиційних матеріалів, взаємодіючих з електромагнітними відеоімпульсами лазера, у технологіях зміцнення поверхонь вказаних об'єктів.

2. Отримані у роботі результати уточнюють ті, що отримані у [6], оскільки відповідають більш узагальненим початковим і граничним умовам (задача Коші) – третя крайова задача, а також відрізняються від результатів роботи [5], які отримані лише методом А.Б. Шварцбурга [4], тим, що у даному дослідженні враховані скінченні розміри об'єкту, впливу лазерного випромінювання та власне його можливий рух (при цьому задіяний метод функцій Гріна). Проведений порівняльний аналіз результатів, які отримані обома вищезгаданими методами, й встановлені часові межі, які дозволяють визначати основні параметри термопружних полів, що виникають (або за допомогою методу функцій Гріна, або ж при використанні не-Фур'є-аналізу).

3. Дослідження швидкоплинних (неперіодичних) нестационарних термопружних полів у диспергуючих дисипативних деформованих середовищах (тілах) та композиційних матеріалах при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами показало, що можливим є опис таких полів поза межами традиційної теорії синусоїдальних хвиль (яка, до речі, використовується у методі функцій Гріна). Цей опис виявив низку характеристик вказаних середовищ, тіл та матеріалів, котрі характерні для теорії синусоїдальних хвиль, однак не використовуються при даному підході (фаза коливань, фазова швидкість, частота відскання, декремент затухання та ін.).

4. Аналіз процесів збудження та розповсюдження неперіодичних полів різної фізичної природи (так званих зв'язаних полів) у суцільних середовищах й композиційних матеріалах (у тому числі при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами) заснований при такому підході на неперервності полів на границях середовищ й на «нероздільних» (у часі й по просторовим координатам) розв'язках рівнянь Клейна-Гордона, телеграфного рівняння у часовій області.

5. Проходження (заломлення, відбиття) коротких лазерних відеоімпульсів через границю провідника (середовище, тіло чи композиційний матеріал вважаються саме такими) супроводжується збудженням у ньому нестационарних (електромагніто-) термопружних полів. Представлення таких полів за допомогою «нероздільних» функцій забезпечує просту аналітичну модель таких імпульсних процесів (у порівнянні з розв'язками задачі Коші, котрі можна отримати класичними аналітичними методами – типу методу функцій Гріна). Щоб знайти залежність, наприклад, відбиття та заломлення (й відповідних коефіцієнтів) лазерних імпульсних сигналів від їх тривалості у часі й форми огинаючої, слід обрати представлення цих сигналів, яке дозволяє гнучко враховувати їх скінченну тривалість і складну, зокрема, несиметричну й неперіодичну форму. Традиційні моделі δ -функцій П. Дірака або ж ступінчастої функції Хевісайда, котрі відповідають нульовій тривалості у часі сигналу та нульовому часу встановлення (зазвичай застосовуються у методі роздільних функцій/змінних, Фур'є-аналізі, методі функцій Гріна) не підходять для розглядуваних тут задач. Застосування більш реалістичних моделей, наприклад, модульованих гауссових чи прямокутних імпульсів,

обмежене припущенням про рівність інтервалів між точками перетину нуля. Сигнали із залежною від часу частотою типу «wavelet» слабко схожі на реальні імпульси, котрі випромінюються моноімпульсними радаром (лазерами) чи пікосекундними лазерами (генераторами) й такі, що суттєво відрізняються (наприклад, від «wavelet»-сигналів) відсутністю несучої частоти та асиметрією фронтів.

Разом з тим, у подальшому, на думку авторів даного дослідження, використовуючи представлення огинаючих лазерних імпульсів за допомогою, наприклад, функцій Лагерра $L_m(x)$ [4] (так звана лагерр-оптика лазерних відеоімпульсів), можна для складових нестационарних зв'язаних полів у запропонованій формі комбінації бesselевих функцій на поверхні (границі) середовищ, тіл, композиційних матеріалів легко й гнучко моделювати взаємодію (відбиття та заломлення) реальних лазерних відеоімпульсів (які утримують у собі одне чи кілька коливань електромагнітного поля) з об'єктами опромінювання (зондування), лазерної обробки. Зокрема, такі моделі допускають: а) довільну крутизну фронтів імпульсу; б) різні інтервали між точками перетину нуля; в) довільну асиметрію огинаючих.

6. Можна показати, що основні особливості просторово-часових структур негармонічних (електромагніто-) термопружних полів у диспергуючих, дисипативних деформованих середовищах (тілах) й композиційних матеріалах, які мають скінченну провідність, при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами зводяться до наступних: а) відбиття «уособлених» (солітоноподібних) негармонічних лазерних відеоімпульсів від провідників набагато сильніше, ніж відбиття монохроматичних полів за однакових часових масштабів полів; б) область локалізації електропружної компоненти у кілька разів (2...3) вужча, ніж область локалізації магнітопружної компоненти.

7. У подальшому знайдені «нероздільні» точні аналітичні розв'язки рівнянь зв'язаних полів, отримані без додавання яких-небудь нових членів, як і розв'язки задачі Коші для гіперболічного рівняння теплопровідності (отримані методом функцій Гріна для рухомих/нерухомих середовищ, тіл, матеріалів) можуть слугувати основою для аналізу режимів розповсюдження (електромагніто-) термопружних імпульсів у задачах зондування (наприклад, композиційних матеріалів) у ближній зоні імпульсного джерела (у імпульсній дефектоскопії вказаних матеріалів, деформованих середовищ та пружних тіл скінчених розмірів).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – К.: Наукова думка, 1970. – 307 с.
3. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. Прикладная математика и механика. 1964. Т.28, №3. – С. 401-408.
4. Шварцбург А.В. Видеоимпульсы и непериодические волны в диспергирующих средах. Успехи физических наук. 1998. Т.168, №2. – С. 85-103.
5. Човнюк Ю.В. Нестационарные термоупругие поля в диспергирующих, диссипативных деформируемых средах (телах) и композиционных материалах при их лазерной обработке короткими волновыми импульсами. Вісник Черкаського інженерно-технологічного інституту. 2001. №4. – С. 58-65.
6. Сокотущенко В.Н. Гиперболическое уравнение теплопроводности движущегося тела. Вестник АГТУ. 2006. №6(35). – С. 79-83.
7. Сокотущенко В.Н., Бологов Е.Н., Азаров А.С. Влияние технологических параметров обработки на тепловые процессы в пятне контакта при фрикционно-упрочняющей обработке. Гидродинамическая теория смазки – 120 лет: Труды международного научного симпозиума. – М.: Машиностроение; ОрёлГТУ, 2006. – С. 293-294.
8. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
9. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
10. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматгиз, 2001. – 576 с.

REFERENCES

1. Huz A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. Dyfraktsiya upruhykh voln (Diffraction of elastic waves) – K.: Naukova dumka, 1978. – 308 s.
2. Kovalenko A.D. Osnovi termouprugosti (Fundamentals of thermoelasticity) – K.: Naukova dumka, 1970. – 307 s.
3. Palmov V.A. Osnovnye uravneniya teoryi nesymmetrychnoi uprugosti (Basic equations of the theory of asymmetric elasticity). Prikladnaia matematyka y mekhanika. 1964. T.28, №3. – S. 401-408.
4. Shvartsburh A.V. Vydeoimpulsi y neperyodycheskye volni v dysperhyruishchyykh sredakh (Video pulses and non-periodic waves in dispersive media). Uspekhy fizycheskykh nauk. 1998. T.168, №2. – S. 85-103.
5. Chovniuk Yu.V. Nestatsyonarnye termouprugye polia v dysperhyruishchyykh, dyssypatyvnykh deformyruemykh sredakh (telakh) y kompozytsyonnykh materyalakh pry ykh lazernoi obrabotke korotkymy volnovymy ympulsamy (Transient

- thermoelastic fields in dispersive, dissipative deformable media (bodies) and composite materials during their laser processing with short-wavelength pulses). *Visnyk Cherkaskoho inzhenerno-tehnolohichnoho instytutu*. 2001. №4. – S. 58-65.
6. Sokotushchenko V.N. Hyperbolicheskoe uravnenye teploprovodnosti dvyzhushchehosia tela (Hyperbolic heat conduction equation for a moving body). *Vestnyk ANTU*. 2006. №6(35). – S. 79-83.
 7. Sokotushchenko V.N., Bolohov E.N., Azarov A.S. Vliyaniye tekhnolohycheskykh parametrov obrabotky na teplovye protsessy v piatne kontakta pry fryktsyonno-uprochniaushchei obrabotke (The influence of processing parameters on thermal processes in the contact patch during friction-hardening treatment). *Hydrodynamicheskaya teoriya smazky – 120 let: Trudy mezhdunarodnogo nauchnogo sympozyuma*. – M.: Mashynostroeniye; OrĭNTU, 2006. – S. 293-294.
 8. Petrovskiy Y.H. Lektsyy ob uravneniyakh s chastnymy proyvodnymy (Lectures on partial differential equations) – M.: Fyzmathyz, 1961. 400 s.
 9. Mykhlyn S.H. Lektsyy po lyneynym yntegralnym uravneniyam (Lectures on linear integral equations) – M.: Fyzmathyz, 1959. – 232 s.
 10. Polianyn A.D. Spravochnyk po lyneynym uravneniyam matematycheskoi fizyky (Handbook of linear equations in mathematical physics) – M.: Fyzmathyz, 2001. – 576 s.

Стаття надійшла 10.03.2026

Човнюк Ю.В., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П., Шудра Н.С.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ГРІНА В ГІПЕРБОЛІЧНІЙ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА НЕ-ФУР'Є-АНАЛІЗ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ПОЛІВ (РУХЛИВИХ) ДЕФОРМОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ/ТІЛ Ї КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Нестационарні термопружні поля, збуджувані відеоімпульсами у цих середовищах (тілах) і матеріалах, представлені аналітично завдяки точним періодичним та нестационарним розв'язкам рівнянь термопружності, отриманим безпосередньо у часовій області поза межами Фур'є-розкладів за аналогією до відомих результатів А.Б. Шварцбурга.

У даному дослідженні також отримане гіперболічне рівняння теплопровідності рухливого тіла й даний розв'язок вказаного рівняння у циліндричній системі координат методом функцій Гріна. Отриманий у роботі розв'язок відповідає гіперболічній теорії теплопровідності, яка враховує скінченність швидкості розповсюдження тепла, й дозволяє більш коректно призначати міцнісні норми для деталей, працюючих під дією термодинамічних напружень, а у технологічних процесах, наприклад, у задачі розподілу поля температури у зразках циліндричної форми, при їх обробці шліфувальним інструментом, оптимізувати параметри режиму обробки.

Ключові слова: метод функцій Гріна, гіперболічна теорія теплопровідності, аналіз, нестационарність, термопружні поля, рухливі деформовані середовища, композиційні матеріали, не-Фур'є-аналіз, короткі хвильові відеоімпульси.

Chovniuk Yu.V., Priymachenko O.V., Cherednichenko P.P., Shudra N.S.

USE OF GREEN'S FUNCTION METHOD IN HYPERBOLIC HEAT CONDUCTION THEORY AND NEFHURIE ANALYSIS OF NONSTATIONARY THERMOELASTIC FIELDS (MOVING) DEFORMED MEDIA/BODIES AND COMPOSITE MATERIALS

The work develops precisely solvable models of pulse optics for dispersive, dissipative deformed media (bodies) and composite materials during their laser processing with short wave pulses. Unsteady thermoelastic fields excited by video pulses in these media (bodies) and materials are presented analytically thanks to exact periodic and unsteady solutions of thermoelasticity equations obtained directly in the time domain outside the limits of Fourier series by analogy with the well-known results of A.B. Schwarzburg.

This study also obtained a hyperbolic heat conduction equation for a moving body and a solution to this equation in a cylindrical coordinate system using Green's functions. The solution obtained in this work corresponds to the hyperbolic theory of heat conduction, which takes into account the finiteness of the heat propagation velocity and allows for a more accurate assignment of strength standards for parts operating under thermodynamic stresses, and in technological processes, for example, in the problem of temperature field distribution in cylindrical samples during their processing with a grinding tool, to optimize the processing mode parameters.

Keywords: Green's function method, hyperbolic heat conduction theory, analysis, non-stationarity, thermoelastic fields, mobile deformed media, composite materials, non-Fourier analysis, short wave video pulses.

УДК 531:535.39:536.37:629.7.023

Човнюк Ю.В., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П., Шудра Н.С. Використання методу функцій Гріна в гіперболічній теорії теплопровідності та неФур'є-аналіз нестационарних термопружних полів (рухливих) деформованих середовищ/тіл й композиційних матеріалів // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник*. – К.: КНУБА, 2026. – Вип. 116. – С. 207 – 219.

У роботі розвиваються точно розв'язувані моделі імпульсної оптики дисперсуючих, дисипативних деформованих середовищ (тіл) й композиційних матеріалів при їх лазерній обробці короткими хвильовими імпульсами.

Табл. 3. Бібліогр. 10 назв.

UDC 531:535.39:536.37:629.7.023

Chovniuk Iu.V., Prymachenko O.V., Cherednichenko P.P., Shudra N.S. Use of the Green's function method in the hyperbolic heat conduction theory and non-Fourier analysis of non-stationary thermoelastic fields (moving) deformed media/bodies and composite materials // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2026. – Issue 116. – P. 207 – 219.

The work develops precisely solvable models of pulse optics for dispersive, dissipative deformed media (bodies) and composite materials during their laser processing with short wave pulses. Unsteady thermoelastic fields excited by video pulses in these media (bodies) and materials are presented analytically thanks to exact periodic and unsteady solutions of thermoelasticity equations obtained directly in the time domain outside the limits of Fourier series by analogy with the well-known results of A.B. Schwarzburg.

Tabl. 3. Ref. 10

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри фізичного виховання і спорту КНУБА, Човнюк Юрій Васильович

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, пр. Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38(096) 570-45-65

E-mail: ychovnyuk@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-0608-0203>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри міського будівництва КНУБА, Приймаченко Олексій Віталійович

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, пр. Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38(067) 266-81-97

E-mail: prymachenko.ov@knuba.edu.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5125-8472>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доцент, доцент кафедри міського будівництва КНУБА, Чередніченко Петро Петрович

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, пр. Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

E-mail: petro_che@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-7161-661X>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри міського будівництва КНУБА, Шудра Наталія Сергіївна,

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, пр. Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38(063) 129-30-33

E-mail: shudranatasha1984@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5416-7680>