

УДК 624.137.5 : 539.3

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ПЛОСКОГО ШПУНТА ЯК МЕМБРАННОГО ЕЛЕМЕНТА КОМБІНОВАНОЇ ПІДПІРНОЇ СТІНИ

А.О. Мозговий,
д-р техн. наук, доцент

К.В. Спіранде,
канд. техн. наук, доцент

О.В. Самородов,
д-р техн. наук, професор

О.С. Спіранде,
аспірант

Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, Харків

DOI: 10.32347/2410-2547.2026.116.133-159

Представлено аналітичне розв'язання задачі напружено-деформованого стану плоского сталевго шпунта як мембранного конструктивного елемента комбінованої підпірної стіни огороження котловану. В алгоритм розрахунку залучено класичні теорії розрахунку гнучких пластин та мембран: Kirchhoff – Love, Mindlin – Reissner, Föppl – von Kármán. Верифікація результатів аналітичних розрахунків здійснена із чисельними розрахунками мембранних конструкцій у програмному комплексі LIRA-FEM методом скінченних елементів. Виявлено закономірності роботи мембранних конструкцій під час нехарактерних навантажень, що доводить валідацію аналітичного алгоритму.

Ключові слова: огороження котловану, комбінована підпірна стіна, плоский шпунт, тиск ґрунту, мембрана, гнучка пластина, напружено-деформований стан, геометрична нелінійність, максимальний прогин, метод скінченних елементів (МСЕ).

Вступ. Освоєння підземного простору є однією з ключових тенденцій у сучасному будівництві, що зумовлюється зростаючою щільністю міської забудови, обмеженістю вільних ділянок та необхідністю розвитку інженерної інфраструктури. Більш того, сьогодні в Україні найактуальнішим є будівництво підземних укриттів та споруд подвійного призначення з урахуванням небезпеки з боку країни-агресора. Будівництво підземних або заглиблених споруд, підземних поверхів багатоповерхових будівель тощо, неминуче пов'язане з розробкою котлованів і забезпеченням їх стійкості для проведення робіт нульового циклу. При цьому, конструктивно-технологічні рішення огороження котлованів суттєво ускладнюються з наявністю високого рівня ґрунтових вод та нестійких ґрунтів на поверхні.

Це вимагає розробки ефективних конструкцій підпірних стін та методів їх розрахунку для забезпеченням міцності, жорсткості та водонепроникності огороження котловану при дії активного тиску ґрунту та тиску ґрунтових вод.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [1, 2] пропонується конструкція комбінованої підпірної стіни (див. рис. 1), яка включає вертикальні несучі елементи, що розташовані на відстані один від одного уздовж горизонтальної осі та заглиблені від рівня поверхні на розрахункову глибину нижче дна котловану та плоского шпунта, який розташований уздовж горизонтальної осі зі сторони напрямку дії активного тиску ґрунту і заглиблений від рівня поверхні на розрахункову глибину та знаходиться у вільному контакті з вертикальними елементами після екскавації ґрунту котловану.

Підвищення ефективності конструктивного рішення підпірної стіни (див. рис. 1) відбувається через раціональне поєднання двох різних за своїм функціональним призначенням конструктивних елементів, що сприймають горизонтальний активний тиск ґрунту: вертикальних елементів (різних поперечних перерізів та матеріалів, що виготовляються за будь-якою технологією, наприклад – буронабивних паль), які заглиблюються від рівня поверхні на розрахункову глибину нижче дна котловану, працюючи на згин уздовж вертикальної осі та плоского шпунта (з різних матеріалів, наприклад – сталевго, що влаштовується за будь-якою технологією, наприклад – віброзанурюванням), який заглиблюється від рівня поверхні на розрахункову глибину, працюючи

на розтяг як мембрана між вертикальними елементами та перерозподіляючи горизонтальне навантаження між ними після екскавації ґрунту котловану та реалізації активного тиску ґрунту. При цьому розрахункова глибина занурення плоского шпунта від рівня поверхні, яка може бути нижче, вище або на рівні дна котловану, визначається залежно від наявності стійких та/або водотривких шарів ґрунту, розрахункового дебіту (притоку) ґрунтових вод у котлован, допустимих фільтраційних деформацій масиву ґрунту тощо.

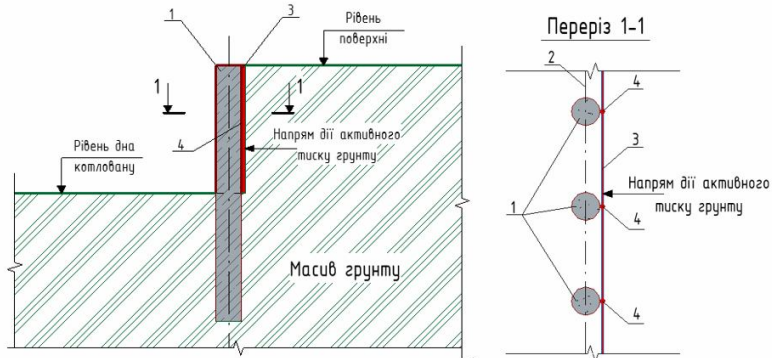


Рис. 1. Комбінована гнучка підпірна стіна:

- 1 – вертикальні елементи; 2 – горизонтальна вісь; 3 – плоский шпунт;
4 – контакт між шпунтом та вертикальними елементами

Геометричні та механічні параметри вертикальних елементів визначаються загальновідомими інженерними розрахунками з урахуванням вимог щодо жорсткості та міцності конструкції підпірної стіни.

Основною проблемою є розрахунок плоского шпунта (далі – шпунта), який в комбінованій системі працює переважно на розтяг, як мембранний елемент. Тому, для розрахунку шпунта слід розглядати використання мембранних теорій [3–17].

Однак тут присутня складність розрахунку шпунта у нетипових умовах. На відміну від класичних мембран, які працюють під дією рівномірного тиску або розтягу, шпунт піддається комбінованим навантаженням від тиску ґрунту, води та тимчасових впливів. Це створює складні граничні умови, які важко описати аналітично. Традиційні методи розрахунку часто не враховують локальні втрати стійкості чи нелінійні ефекти, що виникають у ґрунтовому середовищі. Тому застосування мембранних теорій потребує розширення математичного апарату та використання чисельних методів, таких як скінченно-елементний аналіз. Саме це робить тему даного дослідження актуальною.

У якості прикладу розглянемо комбіновану підпірну стіну котловану глибиною H . Комбінована підпірна стіна складається зі шпунта (сталеві мембрани або тонкої пластини), що закріпленій між ґрунтом і двома жорсткими палями. Палі розташовано з кроком s в горизонтальному напрямку. Тонка або середньої товщини мембрана має значно меншу товщину (δ) ніж інші геометричні параметри (s та H): $\delta \ll s$, H . Тиск ґрунту на мембрану діє нормально до її поверхні у вигляді трапецієподібного навантаження з інтенсивністю p_1 , p_2 (див. рис. 2).

Для аналітичного розв'язання задачі моделювання роботи шпунта як мембрани необхідно враховувати різні класичні теорії в залежності від співвідношення товщини елемента δ до його характерного розміру s [3–11]. Якщо $\delta/s < 0,003$, доцільно застосовувати класичну теорію тонких пластин Kirchhoff–Love (Г. Р. Кірхгофа – С. О. Лява) [5, 6, 9–11], яка адекватно описує поведінку елементів із незначною товщиною та дозволяє спростити математичний апарат. У випадках, коли товщина зростає і співвідношення δ/s перевищує вказаний поріг, класична теорія стає недостатньою, оскільки не враховує зсувні деформації. Тоді необхідно використовувати теорію Mindlin – Reissner (Р. Д. Міндліна – Е. Рейснера) [3, 4], яка враховує вплив поперечного зсуву та забезпечує більш точний опис роботи мембрани середньої товщини.

Для ще більш складних випадків, коли мембрана піддається значним деформаціям і нелінійним ефектам, актуальною стає теорія Föppl – von Kármán (А. О. Фьоппла – Т. фон Кармана)

[7, 8, 12, 13]. Вона дозволяє враховувати геометричну нелінійність та великі прогини, що особливо важливо для огороження глибоких котлованів, що сприймає значний тиск ґрунту.

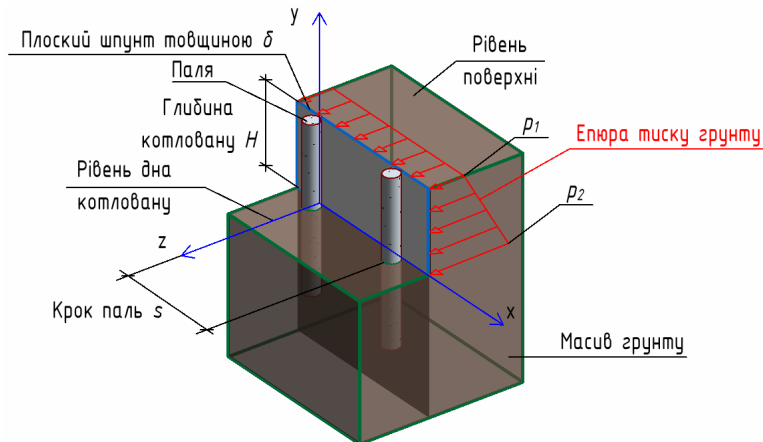


Рис. 2. Умовна розрахункова схема комбінованої підпірної стіни з плоским шпунтом (мембранним елементом)

Таким чином, вибір теорії залежить від реального співвідношення товщини до розмірів конструкції, характеру навантаження. Використання лише однієї моделі може призвести до спрощень, які не відображають фактичний стан напружень і деформацій. Тому комплексний підхід із залученням різних теорій у межах одного дослідження є необхідним для отримання достовірних результатів. Це дозволяє не лише підвищити точність розрахунків, але й сформувану методичну базу для удосконалення конструкцій комбінованих підпірних стін з плоским шпунтом (мембранним елементом). У результаті інженер отримує інструментарій, який адаптується до різних умов роботи мембрани із вираженою нелінійною поведінкою.

Однак, аналітичні рішення завжди містять спрощення, які можуть не враховувати реальні ґрунтові умови, неоднорідність навантаження чи локальні втрати стійкості. Саме тому виникає необхідність перевірки отриманих результатів чисельними методами, зокрема методом скінчених елементів (МСЕ). Використання програмних комплексів, таких, як LIRA-FEM, дозволяє моделювати складні граничні умови, враховувати нелінійні властивості ґрунту та перевіряти валідацію аналітичних моделей. Верифікація аналітичних рішень чисельними методами є ключовою для забезпечення надійності та практичної значущості результатів. Це не лише підтвердить правильність теоретичних висновків, але й дасть можливість скоригувати модель у випадку розбіжностей. Таким чином, поєднання аналітичного та чисельного методів розрахунку створює комплексну систему дослідження, яка гарантує високу точність і практичну цінність для інженерної практики.

Метою дослідження є удосконалення алгоритму визначення напружено-деформованого стану (НДС) плоского шпунта як мембранного елемента комбінованої підпірної стіни огороження котловану, що поєднує аналітичні моделі та чисельні методи для забезпечення достовірності та надійності результатів.

Аналіз досліджень і публікацій за напрямом дослідження дозволив сформувану коло завдань, серед них: дослідити можливість адаптації класичних методів теорії пружності пластин, мембран до визначення НДС залежно від товщини елементів та геометрії конструкції; розробити методичні підходи до поєднання аналітичних рішень із чисельними методами, зокрема методом скінчених елементів; визначити критерії вибору раціональної товщини мембранних елементів для забезпечення балансу між жорсткістю, деформаціями та економічністю використання матеріалу; змоделювати роботу шпунта у програмному комплексі LIRA-FEM із врахуванням геометричної та фізичної нелінійності для верифікації із рішеннями на основі аналітичних теорій та валідації отриманих результатів; сформувану рекомендації щодо удосконалення методики розрахунку комбінованих підпірних стін з плоским шпунтом для сучасної інженерної практики.

Передумови поєднання мембранної теорії з теорією згину гнучких пластин. Мембранна теорія описує розтяг або стиск у серединній площині пластини без урахування згину, як тканина під навантаженням, тоді як теорія згину Kirchhoff – Love враховує моменти та кривизни без розтягу. Згідно з теорією Förrl – von Kármán моменти та кривизни поєднуються через нелінійні члени в рівняннях сумісності деформацій і рівноваги. Мембранна аналогія урахує зусилля N_x , N_y , N_{xy} – інтегровані напруження по товщині, які виникають від розтягу в площині. Без урахування нелінійності мембрана не створює опір поперечному навантаженню.

Теорія згину враховує моменти M_x , M_y , M_{xy} від кривизни, з жорсткістю D . Прийом поєднання полягає у наступному: нелінійні члени в рівняннях деформацій ε включають квадратичні члени від градієнтів прогину w , що зв'язують мембранні деформації із деформаціями згину. У рівняннях рівноваги мембранні зусилля взаємодіють з кривизною w (ураховується член типу $N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$), що і робить систему рівнянь сполученою.

Повні нелінійні деформації за теорією Green – Lagrange (Д. Гріна – Ж. Л. Лагранжа):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k). \quad (1)$$

Для тонкої пластини за гіпотезою Kirchhoff:

$$u_x = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2)$$

$$u_y = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3)$$

$$u_z = w(x, y). \quad (4)$$

Згідно з гіпотезою Förrl – von Kármán про малі деформації, помірні повороти вирази (2–4) спрощуються, зберігаються лише квадрати градієнтів прогину w . Це призводить до сполучених диференціальних рівнянь четвертого порядку. Диференціальні рівняння в нелінійній постановці представляють повну систему Förrl – von Kármán для ізотропної пластини в плоских координатах із реалізацією геометричної нелінійності.

Рівняння рівноваги для мембранних зусиль – рівняння сумісності деформацій, виражене через функцію Airy (Д. Б. Ейрі) φ :

$$\nabla^4 \varphi = -E\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right), \quad (5)$$

де мембранні зусилля визначаються:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad (6)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (7)$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Рівняння рівноваги для прогину з урахуванням мембранних доданків:

$$D \nabla^4 w = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + p(x, y), \quad (9)$$

де $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $p(x, y)$ – поперечне навантаження.

Геометрична нелінійність реалізується квадратичними доданками від w у правій частині рівняння (5) та генерує мембранні напруження в залежності від прогину. У рівнянні (9) через білінійні доданки φ та w мембранні зусилля взаємодіють з кривизною.

Поєднання сполучених рівнянь реалізується таким чином: визначається w , обчислюється φ . За відомим значенням φ уточнюється w . Без нелінійності при нульових квадратах w рівняння (5) дає $\varphi = 0$, що свідчить про відсутність мембранних ефектів, а рівняння (9) зводиться до лінійного $D \nabla^4 w = p$.

Застосуємо аналітичні методи поєднання диференціальних рівнянь для мембрани та пластини через функцію Айгу. Функція φ вводиться для автоматичного задоволення рівноваги мембранних зусиль:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Це зменшує систему до двох рівнянь, замість шести. Нелінійність розв'язується ітераційно, починаємо з лінійного w , обчислюємо φ , уточнюємо w , і т.д.

Використовуємо чисельні методи розкладу у ряди Fourier (Ж. Б. Ж. Фур'є) у вигляді:

$$w = \sum w_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y), \quad (11)$$

аналогічні вирази отримано для φ , а також алгебраїчні рівняння для коефіцієнтів w_{mn} , які сполучені нелінійно.

Ітерація реалізується таким чином, що на кожному кроці розв'язується лінеаризована система, фіксуються нелінійні члени від попередньої ітерації з релаксацією для стабільності. Мембранна аналогія у вигляді рівнянь для φ дозволяє обчислити N , які входять у рівняння для згину як ефективне навантаження. Дискретизується мембрана, формується жорсткісна матриця з нелінійними членами. Задача розв'язується ітераційно методом Newton – Raphson (І. Ньютона – Д. Рафсона).

Перевагами запропонованого алгоритму є те, що рівняння Föppl – von Kármán суттєво спрощують рішення, у порівнянні із тривимірною постановкою, із прийнятною точністю для помірної геометричної нелінійності. Мембранний ефект стабілізує систему, зменшуючи прогини в 10–100 разів порівняно з лінійною теорією, що критично важливо для сталевих мембран.

Обмеженнями запропонованого алгоритму є те, що гіпотеза Kirchhoff не урахує зсувні деформації. У якості зауваження: для товстих пластин ($\delta/s > 0,1$), краще використовувати теорію Mindlin – Reissner. Для дуже великих прогинів ($w > s$), що буде показано результатами розрахунків, потрібне урахування повної геометричної нелінійності, тобто задання повного тензору Green.

Запропонований алгоритм базується на теорії Föppl – von Kármán, яка поєднує лінійну теорію згину Kirchhoff – Love з нелінійними мембранними ефектами. Це робить алгоритм придатним для оцінювання напружено–деформованого стану мембран із великими прогинами.

Урахування зсувних ефектів згідно теорії деформування пластин Mindlin – Reissner. Теорія Mindlin – Reissner [3–5] є розширенням класичної теорії пластин Kirchhoff – Love, яка ігнорує зсув. Вона розроблена для пластин середньої товщини, яка враховує поперечні зсувні деформації по товщині. На відміну від теорії Kirchhoff – Love, де нормалі до середньої поверхні залишаються перпендикулярними після деформації, що реалізує нульовий зсув, згідно з теорією Mindlin – Reissner нормалі залишаються прямими після деформації, але можуть повертатися незалежно від прогину, що викликає зсувні напруження $\tau_{xz} = \tau_{yz} \neq 0$. Це уточнює рішення для товстих пластин ($\delta/s > 0,1$), для яких зсув слід урахувувати. Основне припущення полягає в тому, що пластина має значно меншу товщину $\delta \ll s, H$, ніж за теорією Kirchhoff – Love – $\delta/s \leq 0,2$. Матеріал приймається ізотропний, підкоряється закону Hooke (Р. Гука); деформації малі. Після деформації нормалі до середньої поверхні не викривлюються і не змінюють довжину, але не обов'язково залишаються перпендикулярними унаслідок зсуву. Зсувні деформації постійні по товщині γ_{xz}, γ_{yz} – постійні, але скориговані коефіцієнтом k ($k = 5/6$ – для прямокутного перерізу). Пластина знаходиться у плоскому напруженому стані, по товщині $\sigma_z = 0$ як і в теорії Kirchhoff – Love, але не ігноруються дотичні напруження $\tau_{xz} = \tau_{yz} \neq 0$. Переміщення визначаються трьома незалежними функціями – прогин $w(x, y)$, кути повороту нормалей $\psi_x(x, y)$ – навколо y та $\psi_y(x, y)$ – навколо x .

Переміщення в загальному вигляді:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (12)$$

де u, v – переміщення в площині (мембранні), ψ_x, ψ_y – кути повороту, незалежні від похідних $\partial w / \partial x, \partial w / \partial y$.

Теорія Mindlin – Reissner призводить до системи сполучених диференціальних рівнянь другого порядку, що включають мембранні ефекти, а також деформації згину та зсуву. Геометрична сторона задачі:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad (13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \quad (14)$$

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (15)$$

Фізична сторона задачі може бути отримана інтегруванням напружень по товщині. Мембранні зусилля:

$$N_x = C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad (16)$$

де $C = E\delta / (1 - \nu^2)$.

Момент:

$$M_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \quad (17)$$

де $\kappa_x = \partial \psi_x / \partial x$, $D = E\delta^3 / [12(1 - \nu^2)]$.

Зсувні сили:

$$Q_x = kG\delta \gamma_{xz}, \quad (18)$$

$$Q_y = kG\delta \gamma_{yz}, \quad (19)$$

де $G = E / [2(1 + \nu)]$ – модуль зсуву, $k = 5/6$ – коефіцієнт корекції для прямокутника.

Система для w , ψ_x , ψ_y без мембранних ефектів для лінійної версії; для нелінійної – додаються доданки Förrpl – von Kármán:

$$kG\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + kG\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + p(x, y) = 0, \quad (20)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - kG\delta \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (21)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - kG\delta \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0. \quad (22)$$

Для нелінійної версії рівнянь треба вводити доданки похідних другого порядку.

Перевагою теорії Mindlin – Reissner є урахування зсувних ефектів, точність розв'язку зростає при наближенні до «товстих» пластин, та знижує ефект «парадоксу Kirchhoff» біля країв, що важливо для вільно обпертих країв.

До недоліків слід віднести необхідність використання коефіцієнта корекції k , який залежить від форми перерізу та навантаження. Неточність відображення зсувного ефекту по товщині пластини, що є суттєвим для дуже товстих пластин ($\delta / s > 0,2$).

Важливим є те, що для тонких мембран ($\delta / s < 0,002$) зсувний ефект мінімальний, тож достатнім буде застосування теорії Förrpl – von Kármán. Але у деяких випадках достатньо товстих мембран можна використовувати теорію Mindlin – Reissner для перевірки впливовості зсувних ефектів.

Алгоритм оцінювання зусиль і переміщень сталеві мембрани з урахуванням геометричної нелінійності. Розглядається задача оцінки напружено-деформованого стану сталеві мембрани або тонкої гнучкої пластини (далі – мембрана), закріпленої шарнірно між двома абсолютно жорсткими палями (див. рис. 2). Мембрана піддається дії поперечного навантаження, перпендикулярного до її площини, що моделює, наприклад, бічний тиск ґрунту. Для врахування великих прогинів, коли прогин перевищує товщину мембрани, необхідним стає використання рівнянь теорії пружності з геометричною нелінійністю. Класичний підхід базується на рівняннях Förrpl – von Kármán, які поєднують мембранну теорію – розтяг у серединній площині з теорією згину тонких пластин. Без урахування геометричної нелінійності

розрахунок великих прогинів не має сенсу, оскільки лінійна теорія призводить до нереалістичних результатів.

Основні робочі гіпотези.

1) Матеріал мембрани ізотропний, пружний за законом Гука, деформації повністю зворотні, без пластичності, в'язкості, із модулем пружності E , коефіцієнтом Poisson (С.–Д. Пуассона) ν . Матеріал підкоряється закону Гука для плоского напруженого стану:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad (23)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad (24)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \quad (25)$$

Пружність діє до межі текучості для сталі $\sigma < \sigma_y \approx 250$ МПа.

2) Згідно із теорією Föppl – von Kármán деформації мембрани залишаються малими, попри великі прогини. Це суттєво спрощує конститутивні рівняння для практичного застосування. В реальних конструкціях контрольованими будуть лише два параметри E, ν .

Алгоритм дозволяє виконувати аналітичні розв'язки, інтегрування по товщині мембрани визначає внутрішні зусилля N та M через E, ν .

Недоліками алгоритму є відсутність урахування деформацій пластичності матеріалу мембрани, унаслідок того, що при великих прогинах напруження можуть перевищити σ_y , призводячи до недооцінки деформацій. Це потребує інтеграції в алгоритм пружнопластичної моделі або діаграми деформування матеріалу мембрани. Це може суттєво ускладнити реалізацію аналітичного рішення, однак успішно може бути реалізовано у програмних комплексах на базі МСЕ із урахуванням фізичної нелінійності матеріалу.

3) Використовуються передумови розрахунку тонкої гнучкої пластини: $\delta \ll s, H$ при плоскому напруженому стані ($\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$). Сутність полягає у тому, що пластинка вважається тонкою, якщо товщина δ значно менша за лінійні розміри ($\delta/s < 0,1$). Фізично, у тонких структурах напруження по товщині незначні порівняно з напруженнями в площині якщо прикладене навантаження нормальне до серединної поверхні. Це впливає з асимптотичного аналізу 3D – теорії пружності: при $\delta \rightarrow 0, \sigma_z \approx 0$, а деформації у напрямі осі z визначаються

$$\varepsilon_z = -\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) / (1-\nu). \quad (26)$$

Для сталеві мембрани при $\delta = 10$ мм, $s = 5$ м співвідношення $\delta/s = 0,002 < 0,1$, тож припущення обґрунтовано.

Перевагою є можливість застосування двовимірної моделі та спрощення алгоритму розрахунку. З'являється можливість застосування аналітичних методів.

Недоліком можна вважати нехтування зсувними ефектами по товщині для пластин із $\delta/s > 0,05$, що приводить до заниження прогину на 10 – 20%, та унеможливлення отримання крайових ефектів.

4) Приймається справедливність теорії Mindlin – Reissner стосовно нормалей, які залишаються прямими, але можуть повертатися незалежно від прогину, дозволяючи зсувні напруження $\tau_{xz}, \tau_{yz} \neq 0$. Це робить теорію точнішою для товстих пластин ($\delta/s > 0,1$), для яких зсув істотно впливає на прогини та напруження. Основне припущення полягає в тому, що тонка або середньої товщини пластинка має значно меншу товщину $\delta \ll s, H$, ніж у теорії Kirchhoff – Love – $\delta/s \leq 0,2$.

5) Пластинка має великі прогини, які співставні із розмірами пластинки, але деформації ε малі – $\varepsilon < 1$, не досягається межа пластичності, а повороти чи кути нахилу $\partial w / \partial x$ помірні – до 10–15°. Обґрунтування обумовлено тим, що у мембранах прогин викликає розтяг, але матеріал лишається пружним. В рівняннях деформацій зберігаються квадратичні доданки у вигляді деформацій Green ($\frac{1}{2}(\partial w / \partial x)^2$). Перевагами є обґрунтованість високих прогинів, можливість застосування геометричної нелінійності. Недоліками є обмеження на кути повороту, при великих значеннях > 20 реалізація алгоритму можлива за умови урахування нелінійності.

б) Реалізація геометричної нелінійності потребує урахування нелінійних членів в рівняннях деформацій через великі прогини, що викликає мембранні ефекти, зокрема – розтяг. Деформації включають нелінійні доданки:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (27)$$

де квадратичний член від прогину генерує розтяг.

Дане припущення пояснюється тим, що при великому прогині пластина «натягується» як мембрана, збільшуючи жорсткість. Це впливає з точного визначення деформацій за теорією Green – Lagrange та приводить до зменшення прогинів на один або два порядки, що робить їх правдоподібними. Недоліками інтеграції даного припущення в алгоритм є потреба в ітераційних процедурах. Алгоритм є непридатним для надвеликих деформацій у випадку класичних мембран – гумові або брезентові мембрани.

Геометрична сторона задачі та граничні умови. Розглядається прямокутна мембрана (пластина) товщиною δ із розмірами: s – довжина прольоту між палями вздовж осі x та H – висота вздовж осі y (див. рис. 2). Пластина закріплена шарнірно на краях $x=0$ та $x=s$ до жорстких паль, що означає нульові переміщення $w=0$ або прогини та нульові моменти $M_x=0$ на цих краях. На верхньому та нижньому краях при $y=0$ та $y=H$ припускаємо вільні умови або фіксовані залежно від моделі котловану.

Навантаження $p(y)$ діє перпендикулярно до площини мембрани (вздовж осі z), наприклад – лінійне трапецієподібне, що моделює тиск ґрунту. Координати: x – горизонтальний напрям, y – вертикальний, z – перпендикулярний до площини мембрани.

Граничні умови для шарнірного закріплення. На $x=0, s$: $w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ – шарнірне закріплення. Переміщення в площині $u=0$ – відсутність ковзання. На $y=0, H$: вільні або фіксовані, залежно від задачі – $N_y=0, M_y=0$.

Деформації та переміщення визначаються із урахуванням геометричної нелінійності. У нелінійній теорії Föppl – von Kármán деформації визначаються через тензор Green – Lagrange, але спрощуються для тонких мембран. Переміщення: $u(x, y)$ – вздовж осі x , $v(x, y)$ – вздовж осі y , $w(x, y)$ – прогин в напрямі осі z . Геометричні рівняння Föppl – von Kármán:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (28)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (29)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (30)$$

Перші доданки – мембранні деформації в серединній площині, натомість, нелінійні члени $\frac{1}{2}(\partial w / \partial \dots)^2$ враховують геометричну нелінійність – розтяг від прогину, а доданки із z враховують деформації згину – кривизни. Без нелінійних доданків зазначені рівняння зводяться до лінійної теорії Kirchhoff – Love.

Фізична сторона задачі: для ізотропного матеріалу в стані плоского напруженого стану справедливий закон Гука (23–25).

Інтегруючи по товщині, отримуємо мембранні зусилля:

$$N_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x dz = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right], \quad (31)$$

$$N_y = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right], \quad (32)$$

$$N_{xy} = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (33)$$

та моменти від згину:

$$M_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (34)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (35)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (36)$$

де $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість.

Статична сторона задачі представлена рівняннями рівноваги для тонкої пластини з урахуванням мембранних ефектів:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p(x, y) = 0. \quad (39)$$

Останнє рівняння є визначальним для моделювання нелінійності. Воно пов'язує мембранні зусилля N із кривизною прогину w та враховує додатковий опір від розтягу.

Повні рівняння Förrpl – von Kármán можна отримати введенням функції Airy ϕ для мембранних напружень:

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad (40)$$

тоді система зводиться до двох нелінійних рівнянь (9) та:

$$\nabla^4 \phi = -E\delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right). \quad (41)$$

Ці рівняння розв'язуються за ітераційною процедурою з урахуванням граничних умов.

Граничні умови. Шарнірне кріплення до абсолютно жорстких паль. Палі представляють вертикальні опори, які розташовані при $x=0$ та $x=s$, проліт мембрани між палями – s . Для шарнірно–нерухомого закріплення $u = v = 0$;

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad (42)$$

$$u(s, y) = 0, \quad v(s, y) = 0. \quad (43)$$

Тиск ґрунту на мембрану у вигляді трапеції з інтенсивністю p_1, p_2 діє по поверхні мембрани з боку ґрунту при $0 \leq x \leq s$:

$$p(y) = p_1 + (p_2 - p_1) \frac{y}{H}, \quad (44)$$

де H – висота ділянки тиску.

Тиск діє нормально до поверхні мембрани, то відповідно на границі:

$$\sigma_x(s, y) = -p(y), \quad \tau_{xy}(s, y) = 0. \quad (45)$$

На поверхні мембрани, що звернена в котлован:

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (46)$$

Для оцінювання зусиль, що діють у мембрані із товщиною δ використовуємо рівняння:

$$N_x = \sigma_x \delta, \quad (47)$$

$$N_y = \sigma_y \delta, \quad (48)$$

$$N_{xy} = \tau_{xy} \delta. \quad (49)$$

Тоді рівняння рівноваги для мембрани приймуть вигляд:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0. \quad (51)$$

де p_x, p_y – поверхневе розподілене навантаження.

Запропоновані рівняння дозволяють точно моделювати великі прогини мембрани, враховуючи мембранні ефекти. Для чисельної реалізації використовується ітераційний підхід з релаксацією для стабільності отриманих прогинів. Релаксація – це контрольований перерозподіл переміщень, який не вводиться повністю одразу, а частково – через множник релаксації $\omega \in (0, 1)$. Нове наближення прогину може бути записане як:

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + \omega \cdot \Delta w^{(k)}, \quad (52)$$

де $\Delta w^{(k)}$ – поправка, отримана на k -му кроці.

Релаксація дозволяє уникнути розбіжності розрахунку, особливо при сильній нелінійності або жорстких граничних умовах. Без геометричної нелінійності розрахунок призводить до переоцінки прогинів.

Розв'язок нелінійних рівнянь Föppl – von Kármán для тонких пластин (мембран) з геометричною нелінійністю є складним через наявність нелінійних доданків, які пов'язують прогин w з мембранними напруженнями. Аналітичні розв'язки можливі лише для простих випадків, наприклад – круглих або квадратних пластин з рівномірним навантаженням. Для загальних задач, таких як мембрана, що шарнірно закріплена до жорстких паль з довільним навантаженням $p(y)$, застосовуються чисельні методи, зокрема метод розкладання прогину в ряди Fourier з ітераційним процесом. Цей підхід поєднує аналітичне розкладання функцій з чисельною ітерацією для врахування нелінійності. Процес включає лінійну апроксимацію, ітераційне уточнення та перевірку конвергенції або збіжності [10]. Метод Fourier полягає в поданні невідомих функцій прогину $w(x, y)$ та функції Airy для мембранних напружень $\varphi(x, y)$ у вигляді подвійних рядів Fourier, що задовольняють граничним умовам. Для мембрани з шарнірним закріпленням на краях $x = 0$ та $x = s$, де $w = 0$, $M_x = 0$ і вільними або періодичними умовами по y , функції розкладаються в синус – ряди по x та по y , приймаються непарні гармоніки для симетрії. Прийнято наступне припущення для прогину:

$$w(x, y) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{s}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right), \quad (53)$$

вираз для функції Airy:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{s}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{H}\right). \quad (54)$$

Навантаження $p(y)$, яке незалежне від x розкладається в ряд по y :

$$p(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right), \quad (55)$$

$$p_n = \frac{2}{H} \int_0^H p(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy. \quad (56)$$

Для подвійного ряду по x , враховуючи незалежність від x :

$$p(x, y) \approx p(y) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{s}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right), \quad (57)$$

для непарних m :

$$p_{mn} = \frac{2}{s} \cdot \frac{2}{H} \int_0^s \int_0^H p(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{s}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy dx = \frac{4p_n}{m\pi}. \quad (58)$$

Це задовольняє граничні умови шарнірного закріплення:

$$w(0, y) = w(s, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0, s} = 0. \quad (59)$$

Ітераційний розв'язок нелінійних рівнянь Föppl – von Kármán:

$$D \nabla^4 w = \mathcal{L}(\varphi, w) + p(x, y), \quad (60)$$

$$\nabla^4 \varphi = -E \delta \mathcal{K}(w), \quad (61)$$

$$\mathcal{L}(\varphi, w) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (62)$$

$$\mathcal{K}(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (63)$$

Оскільки рівняння сполучені нелінійно, застосовується ітераційний метод послідовних наближень або метод Newton – Raphson. Починаємо з лінійного розв'язку ігноруючи нелінійні члени, тобто $\mathcal{L}(\varphi, w) = 0$, $\mathcal{K} = 0$. Розв'язуємо рівняння:

$$D \nabla^4 w^{(0)} = p, \quad (64)$$

що дає прогин без мембранних ефектів.

Ітерація для прогину w на ітерації k : обчислюємо $N_x^{(k-1)}$, $N_y^{(k-1)}$, $N_{xy}^{(k-1)}$ з попереднього $w^{(k-1)}$ через $\varphi^{(k-1)}$ або безпосередньо з деформацій. Розв'язуємо для $w^{(k)}$:

$$D \nabla^4 w^{(k)} + N_x^{(k-1)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2} + 2N_{xy}^{(k-1)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x \partial y} + N_y^{(k-1)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2} = p, \quad (65)$$

підставляючи ряди Fourier, отримуємо:

$$w_{mn}^{(k)} = \frac{P_{mn}}{D(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^4 + N_x^{(k-1)} \lambda_m^2 + N_y^{(k-1)} \lambda_n^2 + 2N_{xy}^{(k-1)} \lambda_m \lambda_n}, \quad (66)$$

де $\lambda_m = \frac{m\pi}{s}$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$ спрощено для домінуючого N_x для мембрани.

Перерахунок мембранних зусиль здійснюється через обчислення нелінійної деформації розтягу по площині:

$$\varepsilon_x^{(k)} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} \right)^2. \quad (67)$$

Перерахунок $N_x^{(k)}$ та $\varphi^{(k)}$ здійснюється з рівняння (54):

$$N_x^{(k)} = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \varepsilon_x^{(k)}. \quad (68)$$

Релаксація застосовується щоб уникнути осциляцій, як представлено на рис. 3, 4, де N_x та w коливаються між великим значенням і значеннями близькими до нуля:

$$w^{(k)} = (1 - \alpha) w^{(k-1)} + \alpha w_{\text{new}}^{(k)}, \quad N_x^{(k)} = (1 - \alpha) N_x^{(k-1)} + \alpha N_{\text{new}}^{(k)}, \quad (69)$$

де $\alpha = 0,2-0,5$ – коефіцієнт релаксації, при лінійній залежності α приймається ближче до 0,5, у випадку сильно вираженої нелінійності α приймається ближче до 0,2–0,3.

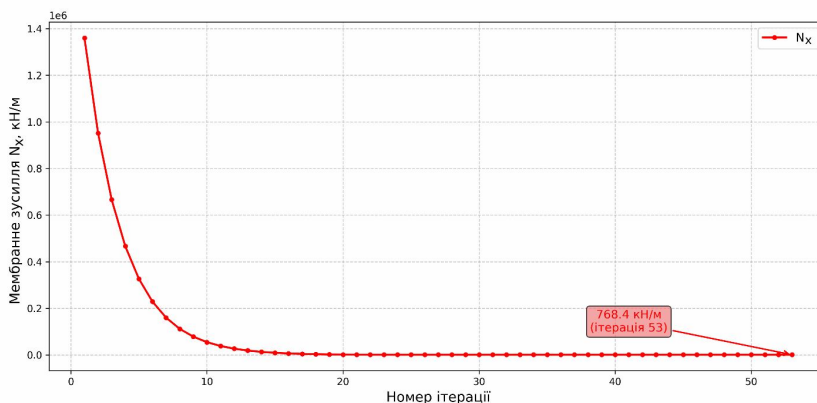
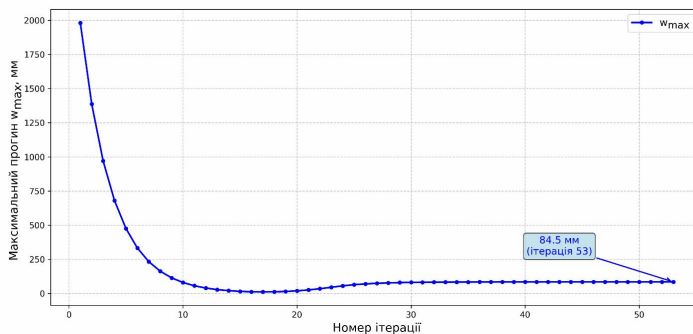


Рис. 3. Конвергенція мембранного зусилля N_x , кН/м

Критерій конвергенції або сходимості полягає у процедурі повторюваності до такого значення:

$$\max |w^{(k)} - w^{(k-1)}| < \varepsilon, \quad (70)$$

при цьому, у даному випадку прийнято $\varepsilon = 10^{-5}$ м, натомість можна прийняти фіксовану кількість ітерацій.

Рис. 4. Конвергенція максимального прогину w_{max} , мм

Урахування граничних умов полягає у тому, що ряди Фур'є автоматично задовольняють шарнірні умови по напрямку x . Для $y = 0$, H краї вільні від закріплень, тоді $N_y = 0$, $M_y = 0$.

Навантаження $p(y)$ розкладається в ряд по y , потім подвійний ряд для p_{mn} . На кожній ітерації обчислюється прогин w з урахуванням поточного зусилля N_x , здійснюється перерахунок N_x від середнього розтягу $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$.

Для стабілізації вводиться коефіцієнт релаксації $\alpha = 0,3$, здійснюється обмеження гармонік – 15 по m , 30 по n для уникнення осциляцій від високих значень.

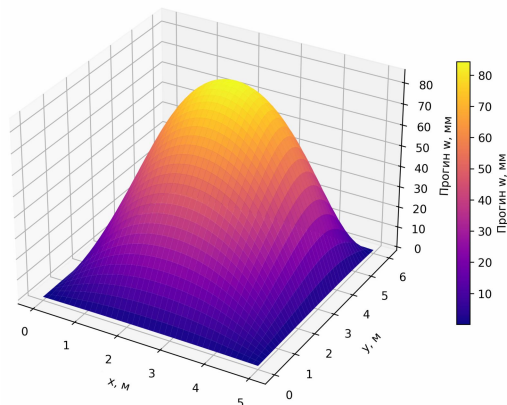
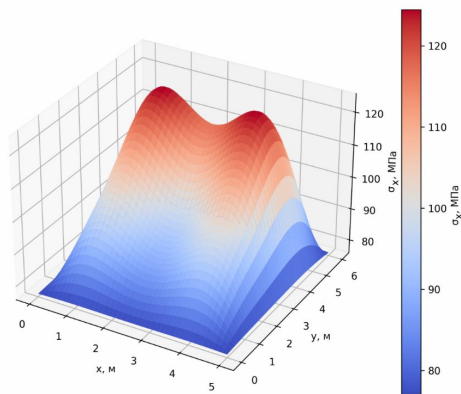
Ітераційний метод Фур'є з релаксацією дозволяє ефективно розв'язувати нелінійні рівняння Фюрбі – von Kármán з урахуванням граничних умов. Він поєднує аналітичну точність з чисельною стабільністю, що робить його придатним для інженерних розрахунків мембран.

У даному дослідженні чисельна реалізація здійснена в програмному коді на мові програмування Python в середовищі Google Collaboratory. У програмному коді алгоритм реалізовано з використанням рядів Фур'є та ітерацій з релаксацією, що дає змогу урахувати геометричну нелінійність. В алгоритмі використано бібліотеки numpy, matplotlib, scipy.

Для оцінювання точності результатів необхідно здійснювати їх валідацію з експериментами або іншими методами, наприклад – чисельні методи на основі МСЕ.

Аналіз отриманих результатів. Для вихідної мембрани завтовшки 10 мм отримано результати, представлені на рис. 5–9.

Характеристики напружено-деформованого стану дослідженої мембрани представлено на рис. 5–6. Приведені результати свідчать що максимальний прогин по середині прольоту $w_{max} = 84,5$ мм, максимальні напруження у мембрані, $\sigma_x = 149,1$ МПа і не перевищують межу текучості сталі.

Рис. 5. 3D поверхня прогинів мембрани, $w_{max} = 84,5$ ммРис. 6. 3D поверхня напружень у мембрані, σ_x , МПа

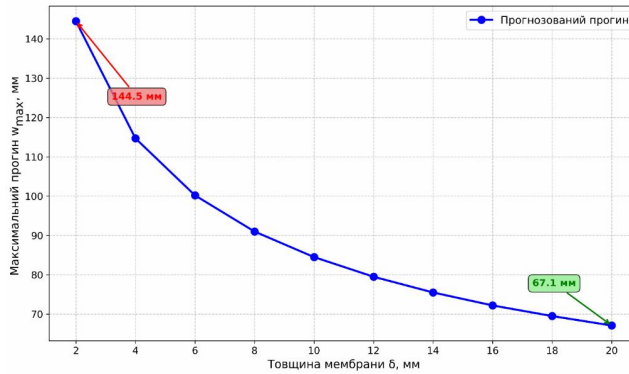


Рис. 7. Залежність максимального прогину від товщини мембрани

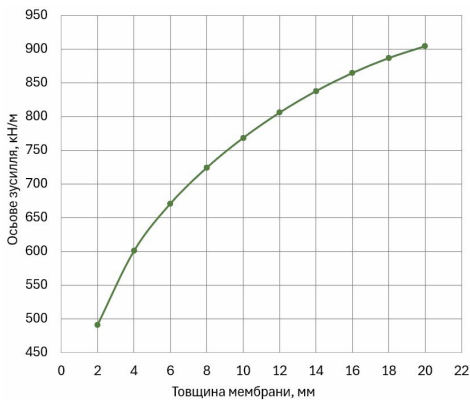
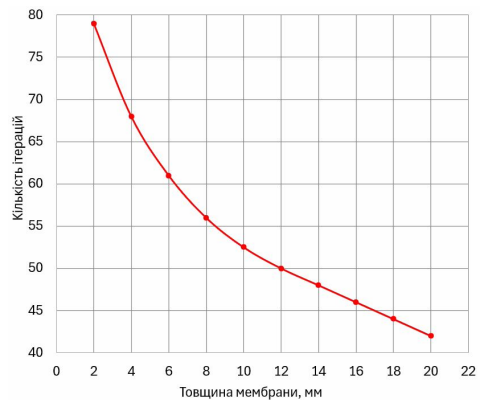
Рис. 8. Залежність інтегрального осьового зусилля N_x , кН/м від товщини мембрани

Рис. 9. Залежність кількості ітерацій від товщини мембрани

Залежність прогинів від товщини мембрани (див. рис. 7) обумовлена тим, що прогини зменшуються від 147,3 мм при товщині мембрани 2 мм до 65,6 мм при товщині 20 мм. Зі збільшенням товщини мембрани її жорсткість зростає, що зменшує деформації. Це відповідає класичним закономірностям теорії пружності – прогини обернено пропорційні жорсткості конструкції. Для забезпечення допустимих деформацій у конструкції необхідно враховувати мінімальну товщину мембрани. При товщині понад 12 мм прогини вже не перевищують 80 мм, що може відповідати нормативним вимогам.

Інтегральне осьове зусилля N_x зростає від 491,29 кН/м при товщині мембрани 2 мм, до 904,5 кН/м при товщині 20 мм (див. рис. 8). Отже товстіша мембрана здатна сприймати більші осьові зусилля. Це пояснюється збільшенням площі поперечного перерізу та жорсткості. Отже під час проектування слід враховувати, що збільшення товщини мембрани не лише зменшує прогини, але й підвищує несучу здатність.

Кількість ітерацій зменшується від 79 при товщині мембрани 2 мм до 42 при товщині мембрани 20 мм (див. рис. 9). Алгоритм розрахунку сходиться швидше для більш жорстких мембран. Це пов'язано з тим, що нелінійні ефекти, представлені великими деформаціями, менш виражені при більшій товщині мембрани. Отже для тонких мембран слід очікувати більшу обчислювальну складність і довший час розрахунку, що важливо при оптимізації чисельних методів.

Для тонких мембран 2–6 мм характерні великі прогини, менші осьові зусилля, більше ітерацій. Для мембран середньої товщини 8–12 мм слід відзначити баланс між допустимими прогинами та несучою здатністю. Для товстих мембран 14–20 мм характерними є мінімальні прогини, максимальні значення осьових зусиль N_x , швидка збіжність розрахунків, конструкція буде жорсткою, але зростає матеріаломісткість.

Під час проектування варто визначити оптимальну товщину, яка забезпечує допустимі прогини та достатню несучу здатність при мінімальних витратах матеріалу. З точки зору розрахунків, вибір товщини понад 12 мм значно зменшує обчислювальні витрати, що не є

пріоритетом у даному випадку. За критерієм економії матеріалу (при прольоті 5 м і висоті 6 м), слід розглядати діапазон товщин мембрани 8 – 12 мм, де прогини ще прийнятні, а осьові зусилля N_x достатньо високі.

Спрощена одновимірна модель за аналогією із мембранною смугою між двома жорсткими палями. Для пояснення поведінки мембранних систем скористаємось одновимірною моделлю по аналогії із мембранною смугою між двома жорсткими палями, що може послугувати адаптацією класичних підходів до пояснення нелінійних ефектів у мембранах [9– 11].

За вихідними даними палі розташовані із кроком s , між палями натягнута сталева мембрана товщиною δ . Тиск ґрунту діє нормально до мембрани й змінюється по висоті як трапеція:

$$p(y) = p_1 + (p_2 - p_1) \frac{y}{H}, \quad 0 \leq y \leq H, \quad (71)$$

де H – висота ділянки тиску.

Розглядається смуга мембрани висотою dy між двома палями висотою H . Кожне горизонтальне елементарне «волокно» мембрани на відмітці y працює як чиста мембранна нитка між жорсткими палями, що сприймає тиск ґрунту в основному розтягом у напрямку «від палі до палі». Невідомою є величина – мембранна сила між палями, схожа з аналогією «кванти». Позначимо через $N_x(y)$, зусилля розтягу в мембрані між палями на рівні y , у напрямку x .

Рівняння рівноваги отримуємо із розгляду рівноваги елементу мембрани висотою dy між палями на який діє горизонтальний тиск ґрунту $p(y)$ та змінна мембранна сила $N_x(y)$ по висоті. Розгляд рівноваги в горизонтальному напрямі дає вираз:

$$\frac{dN_x(y)}{dy} + p(y) s = 0, \quad (72)$$

де s – крок між палями.

Підставляємо трапецієдальний закон тиску (71) та отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dN_x(y)}{dy} + s \left[p_1 + (p_2 - p_1) \frac{y}{H} \right] = 0, \quad (73)$$

інтегрування якого по y дозволяє отримати розподіл мембранних зусиль:

$$N_x(y) = C - s \left[p_1 y + \frac{(p_2 - p_1)}{2H} y^2 \right], \quad (74)$$

де C – стала інтегрування, яка визначається з граничної умови.

Граничні умови – на нижній відмітці $y = H$:

$$N_x(H) = N_H, \quad (75)$$

де N_H – відоме значення зусилля розтягу в мембрані.

Тоді:

$$N_H = C - s \left[p_1 H + \frac{(p_2 - p_1)}{2} H \right], \quad (76)$$

звідки:

$$C = N_H + s \left[p_1 H + \frac{(p_2 - p_1)}{2} H \right]. \quad (77)$$

Підставляємо у формулу (76), та отримаємо розподіл мембранної сили між палями по висоті:

$$N_x(y) = N_H + s \left[p_1 (H - y) + \frac{(p_2 - p_1)}{2H} (H_2 - y_2) \right]. \quad (78)$$

Якщо взяти варіант $N_H = 0$, тобто присутній жорсткіший за мембрану контурний елемент, отримаємо:

$$N_x(y) = s \left[p_1 (H - y) + \frac{(p_2 - p_1)}{2H} (H_2 - y_2) \right]. \quad (79)$$

Середнє нормальне напруження в площині мембрани на рівні y :

$$\sigma_x(y) = \frac{N_x(y)}{\delta}, \quad (80)$$

де δ – товщина сталеві мембранної смуги.

Або в розгорнутому вигляді:

$$\sigma_x(y) = \frac{1}{\delta} s \left[p_1(H-y) + \frac{(P_2 - P_1)}{2H} (H_2 - y_2) \right]. \quad (81)$$

за умови $N_H = 0$,

Якщо на поверхні ґрунту на рівні $y = 0$ діє додаткове розподілене навантаження q , яке створює горизонтальну складову або додатковий тиск, воно може бути враховане як додаткова гранична умова:

$$N_x(0) = N_0, \quad (82)$$

де $N_x(0)$ складається з внеску від бічного тиску ґрунту $p(y)$, внеску від q перерахованого в еквівалентний тиск на мембрану.

Тоді замість умови внизу N_H задаємо умову вгорі $N_x(0)$ і так само визначаємо константу інтегрування C .

Визначаємо осереднений розтяг мембранної смуги на відмітці y між палями з кроком s . Для смуги нормальне напруження визначається за формулою (80).

За законом Гука для плоского напруженого стану, нехтуючи напруженням σ_y , отримаємо середню відносну деформацію розтягу мембрани між палями на рівні y :

$$\varepsilon_x(y) \approx \frac{\sigma_x(y)}{E} = \frac{N_x(y)}{E \delta}. \quad (83)$$

Середнє подовження «волокна» мембрани в горизонтальному напрямі унаслідок дії мембранного зусилля:

$$\Delta s(y) = \varepsilon_x(y) s = \frac{N_x(y)}{E \delta} s. \quad (84)$$

Визначаємо подовження Δs з максимальним прогином $w_{max}(y)$ між палями за аналогією із геометрією «провислої нитки». У напрямі осі x мембрана на рівні y поводить як симетрична гнучка нитка з прогином $w(x, y)$, що закріплена в точках $x = 0$ і $x = s$. При цьому, максимальний прогин w у середині прольоту $x = s/2$ дорівнюватиме:

$$w(0, y) = 0, \quad w(s, y) = 0, \quad w\left(\frac{s}{2}, y\right) = w_{max}(y). \quad (85)$$

При «квазіпараболічній» формі провисання, що відповідає класичному наближенню для гнучкої нитки:

$$w(x, y) \approx 4 w_{max}(y) \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right). \quad (86)$$

Довжина деформованої нитки:

$$l(y) = \int_0^s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx. \quad (87)$$

Для малих кутів, але значних прогинів доцільно використати розклад:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2. \quad (88)$$

Тоді:

$$l(y) \approx s + \frac{1}{2} \int_0^s \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx, \quad (89)$$

а подовження дорівнюватиме:

$$\Delta s(y) = l(y) - s \approx \frac{1}{2} \int_0^s \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (90)$$

Для параболическої форми отримаємо результат:

$$\Delta s(y) \approx \alpha \frac{w_{max}^2(y)}{s}, \quad (91)$$

де α – коефіцієнт близький до одиниці, для параболи $\alpha = 2/3$.

Для оціночної моделі можна прийняти:

$$\Delta s \approx \frac{w_{max}^2}{8}. \quad (92)$$

Виваємо зв'язок зусиль, деформації та прогину, прирівнявши формули (84) та (92) для $\Delta s(y)$:

$$\frac{N_x(y)}{E \delta} s \approx \alpha \frac{w_{max}^2(y)}{s}. \quad (93)$$

Тоді вираз для прогину матиме вигляд:

$$w_{max}(y) \approx \sqrt{\frac{N_x(y) s^2}{k E \delta}}. \quad (94)$$

Формула (94) встановлює зв'язок між зусиллям у мембрані, деформативністю сталі, товщиною мембрани і максимальним прогином мембрани.

Зробимо підстановку мембранного зусилля $N_x(y)$, вираженого через бічний тиск ґрунту за формулою (79), у формулу (94), та отримаємо:

$$w_{max}(y) \approx \sqrt{\frac{s^3 \left[p_1 (H-y) + \frac{(p_2 - p_1)}{2H} (H^2 - y^2) \right]}{k E \delta}}. \quad (95)$$

Прогнозування прогинів сталеві мембрани в залежності від її товщини за спрощеною методикою. Для прогнозу прогинів мембрани використана апроксимаційна формула з нелінійної мембранної теорії Förrpl – von Kármán для домінуючого мембранного режиму, коли внесок від згинання малий, порівняно із домінуючим розтяганням [9–11]:

$$w_{max} \approx \left[\frac{3(1-\nu^2) p_a s^4}{16E\delta} \right]^{1/3}, \quad (96)$$

де p_a – середній тиск бічного навантаження, $p_a = (p_1 + p_2) / 2 = 50$ кПа, s – прольот мембрани, $s = 5$ м, E – модуль пружності матеріалу мембрани, $E = 2,1 \cdot 10^8$ кПа, ν – коефіцієнт Poisson матеріалу мембрани, $\nu = 0,3$.

Отримано результати, які представлено на рис. 10–18.

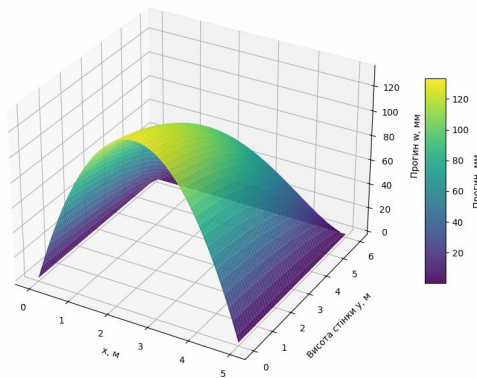


Рис. 10. 3D поверхня прогинів мембрани,
 $w_{max} = 131,4$ мм

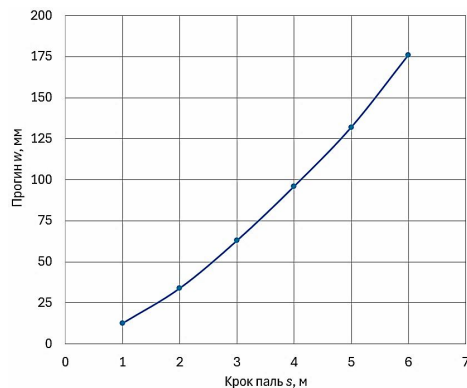


Рис. 11. Залежність прогину, мм від кроку паль, м при товщині мембрани 10 мм

Аналіз отриманих результатів свідчить, що залежність максимального прогину мембрани від кроку паль при фіксованій висоті та товщині мембрани майже лінійна (див. рис. 11). Прогин зменшується з ростом товщини мембрани, бо жорсткість на розтяг зростає, а мембранний ефект збільшується (див. рис. 12). Подвоєння товщини мембрани зменшує прогин лише на ~20% (див. рис. 12). Для малих товщин 2–4 мм прогин більше товщини у 50–70 разів, при цьому урахування геометричної нелінійності є критично важливим. Для великих товщин мембрани 18–20 мм прогин дорівнює 3–4 товщинам, тому може бути застосована лінійна теорія розрахунку, але теорія Förrpl – von Kármán із урахуванням геометричної нелінійності буде давати точніші результати для

величини прогину. Залежність необхідної товщини мембрани, за умови недосягнення межі текучості, від кроку паль практично лінійна, що має чітке логічне пояснення (див. рис. 13–14).

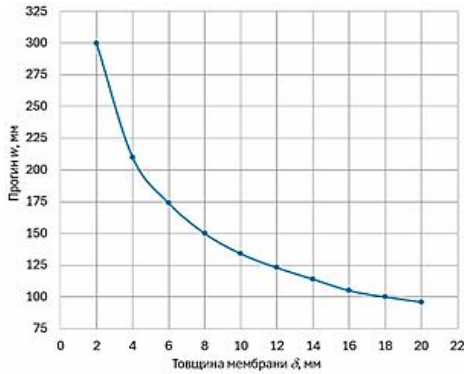


Рис. 12. Залежність прогину, мм від товщини мембрани, мм при кроці паль 5 м

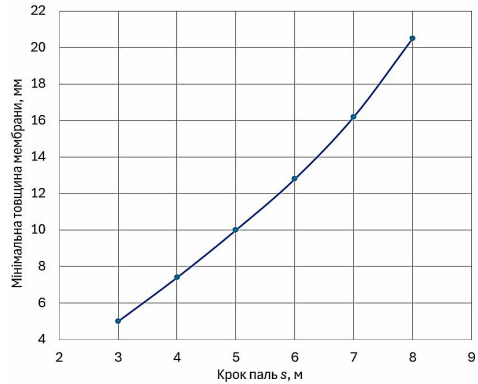


Рис. 13. Залежність мінімальної необхідної товщини мембрани, мм від кроку паль, м

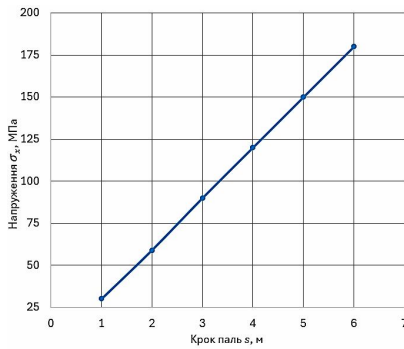


Рис. 14. Залежність максимального напруження σ_x , МПа в матеріалі мембрани від кроку паль, м при товщині мембрани 10 мм

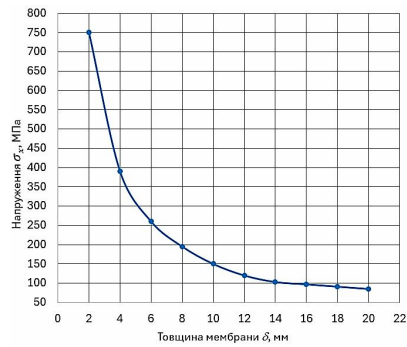


Рис. 15. Залежність максимального напруження σ_x , МПа в матеріалі мембрани від товщини мембрани, мм при кроці паль 5 м

Аналіз результатів демонструє зменшення максимального напруження σ_x , МПа у матеріалі мембрани зі збільшенням її товщини (див. рис. 15–16). При малих значеннях товщини напруження перевищує межу текучості 250 МПа, що вказує на небезпечний режим роботи. Із ростом товщини мембрани напруження поступово знижується та наближається до безпечного рівня. Таким чином, збільшення товщини є ефективним способом зменшення напруженого стану та забезпечення міцності конструкції, що продемонстровано при кроці паль 5 м.

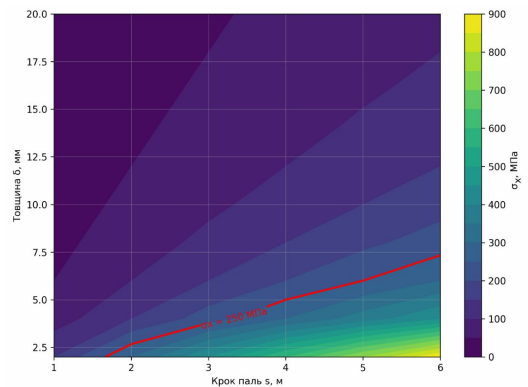


Рис. 16. Ізолінії максимальних напружень σ_x , МПа в матеріалі мембрани в залежності від товщини мембрани, мм та кроку паль, м

Чисельне моделювання шпунтового елемента комбінованої підпірної стіни огороження котловану в програмному комплексі LIRA-FEM. Розрахунок мембранних конструкцій у програмному комплексі LIRA-FEM базується на методі скінченних елементів (МСЕ) у формі переміщень, який є основним інструментом чисельного аналізу міцності та стійкості будівельних конструкцій. Методика дозволяє дискретизувати неперервну конструкцію

на скінчену кількість елементів, формуючи систему рівнянь для визначення переміщень, деформацій та напружень.

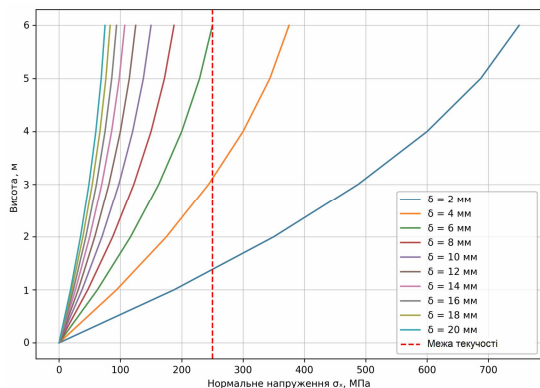


Рис. 17. Залежність максимального напруження σ_{\max} , МПа в матеріалі мембрани в залежності від висоти y , м для різної товщини мембрани, мм при кроці паль 5 мм

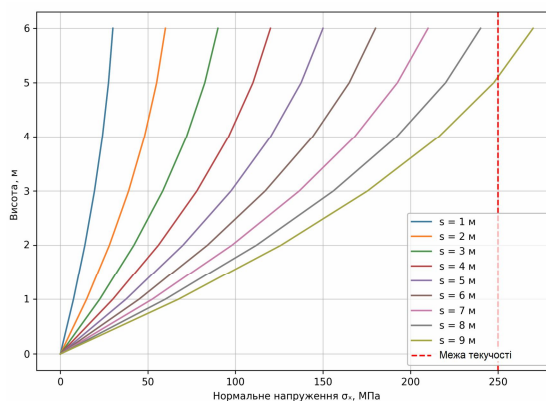


Рис. 18. Залежність максимального напруження σ_{\max} , МПа в матеріалі мембрани в залежності від висоти y , м для різного кроку паль при товщині мембрани 10 мм

Мембрана моделюється як оболонка з мінімальною або нульовою згинною жорсткістю. За основу взято теорію Kirchhoff – Love для тонких оболонок [14–16], де мембранні зусилля – розтяг або стиск домінують над згинальними моментами. У нелінійній постановці враховується теорія великих переміщень Föppl – von Kármán, де зміна геометрії під навантаженням впливає на жорсткість, що реалізує ефект «stress stiffening» або геометричне зміцнення від розтягу [8, 12, 13, 17].

Врахування геометричної нелінійності є обов'язковою для мембран, оскільки лінійна теорія дає необмежено великі переміщення через відсутність поперечної жорсткості.

Використана методика забезпечує перехід від реальної конструкції до математичної моделі, дискретизації та інтерпретації результатів, з акцентом на нелінійний аналіз для реалістичних значень. Переміщення зменшуються в 50–500 разів порівняно з лінійним розрахунком.

В дослідженні виконано моделювання вертикальної сталеві мембрани висотою 6 м, шириною 5 м, товщиною 10 мм. Навантаження на мембрану прийнято трапецієподібне, що моделює тиск ґрунту, та змінюється від 20 кПа до 80 кПа за висотою мембрани (див. рис. 19). Мембрана має шарнірно-нерухомі опори по висоті та вільні грані по ширині. Мембрана моделювалась скінченними елементами із розмірами 200×200 мм. Розрахунок мембрани виконано в трьох варіантах.

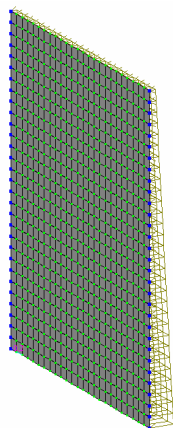


Рис. 19. Розрахункова схема мембрани

Варіант 1 передбачає моделювання мембрани геометрично нелінійними прямокутними скінченними елементами оболонки (KE 341). Даний скінченний елемент допускає врахування сильного вигину. У цьому випадку матриця жорсткості враховує всі накопичені зусилля і зміни геометрії системи. Побудова матриці проводиться в системі координат «нового положення» елементів, а потім виконується її перехід у вихідну систему координат за допомогою матриці косинусів. У цьому випадку зусилля і напруження обчислюються в системі координат «нового положення». Даний тип скінченного елемента призначено для моделювання оболонок та мембран з урахуванням великих переміщень та змін форми за рахунок геометричної нелінійності без врахування фізичної нелінійності. Матеріал вважається лінійно-пружним, без пластичності, в'язкості чи тріщиноутворення. KE 341 ігнорують фізичну нелінійність, тому не

моделюють перерозподіл напружень після досягнення межі текучості сталі при рівнях напружень ≈ 250 МПа. Конструкція поводить як ідеальна мембрана і працює виключно на розтяг або стиск у площині, без опору згину. Поперечні навантаження компенсуються виключно мембранними зусиллями через зміну геометрії, при цьому великі прогини викликають розтяг, що створює додаткову жорсткість.

Варіант 2 реалізує моделювання мембрани геометрично нелінійними прямокутними скінченими елементами оболонки (KE 341), обрано вид роботи скінченого елемента – оболонка, що передбачає великі переміщення. Елемент враховує повну жорсткість оболонки, як мембрану так і згинну. Це відповідає повній теорії тонких оболонок з урахуванням великих переміщень. Відбувається оновлення координат вузлів на кожному кроці ітерації, як у методі Newton – Raphson. Згин додає опір поперечним навантаженням на початкових етапах деформації. При великих прогинах мембранні зусилля домінують, але згин допомагає на початкових етапах завантаження. Конструкція жорсткіша на старті, тому має менші початкові прогини. При великих деформаціях з'являється геометричне зміцнення, подібне до мембрани, але згин розподіляє навантаження.

Варіант 3 передбачає моделювання мембрани прямокутними скінченими елементами оболонки з врахуванням фізичної та геометричної нелінійності (KE 441), що дає змогу враховувати одночасно фізичну і геометричну нелінійності. Жорсткісні характеристики задаються як для фізично нелінійного елемента. Розрахунок виконується кроковим методом. На кожному кроці матриця жорсткості формується в системі координат «нового положення» з врахуванням зміни дотичного модуля деформації.

У першому варіанті мембранні зусилля незначно, але перевищують отримані в варіанті 2 (рис. 20, 21). Вся робота на опір навантаженню лягає на мембрану. Без згинної жорсткості модель потребує більшого розтягу для стабілізації, що незначно підвищує поздовжні зусилля.

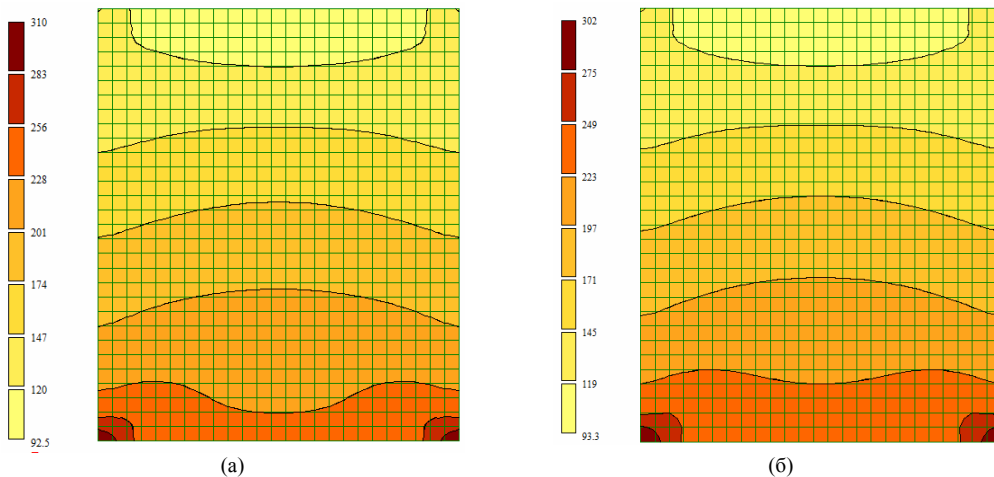


Рис. 20. Ізополя напружень N_x , МПа по нормалі до опор при обраному виді роботи скінчених елементів, як: (а) – мембрана (варіант 1); (б) – оболонка - великі переміщення (варіант 2)

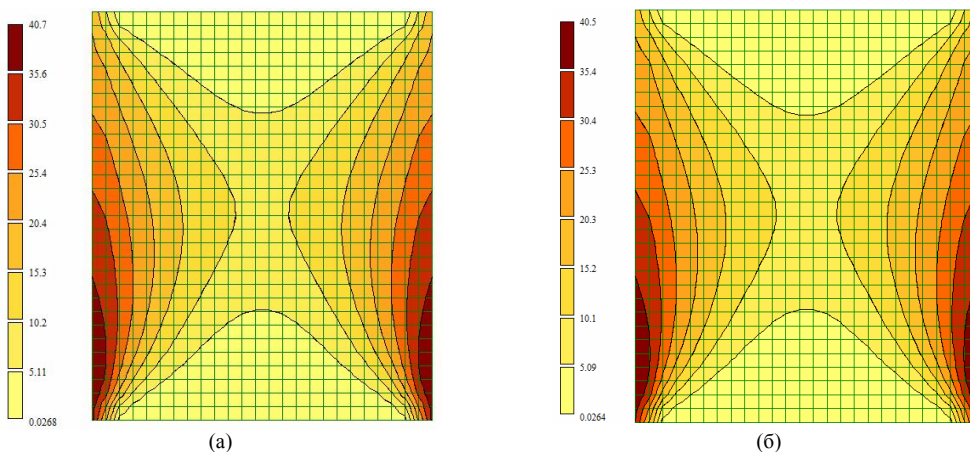


Рис. 21. Ізополя напружень N_y , МПа вздовж опор при обраному виді роботи скінчених елементів, як: (а) – мембрана (варіант 1); (б) – оболонка - великі переміщення (варіант 2)

У варіанті 2 в порівнянні з варіантом 1 мембранні зусилля нижчі. Згинна жорсткість сприяє компенсації навантаження, тому мембрана менш напружена. У теорії оболонок зусилля розподіляються таким чином, що частина навантаження сприймається згинальними моментами, зменшуючи потребу в розтягу. У нелінійному режимі це призводить до менших значень середніх поздовжніх напружень, але більших локальних згинальних моментів біля опор. Для сталевих мембран це реалістичніше, бо сталь сприймає згин до певного прогину.

Для сталеві вертикальної мембрани тільки геометрична нелінійність дає завищену жорсткість і недооцінені переміщення та деформації в пластичних зонах (рис. 22). У LIRA-FEM це реалізується через білінійну діаграму $\sigma - \varepsilon$ для сталі.

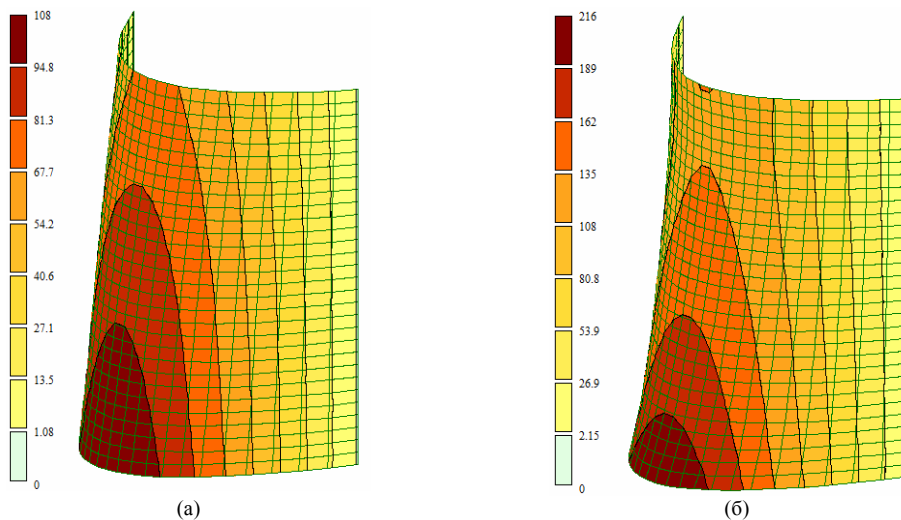


Рис. 22. Ізополя переміщень при: (а) – врахуванні тільки геометричної нелінійності; (б) – врахуванні геометричної і фізичної нелінійності

Використання скінченного елемента, що реалізує геометричну нелінійність, враховує зміну геометрії та додаткову жорсткість від розтягу, тобто мембранний ефект, тому переміщення обмежуються порівняно з лінійним розрахунком. Але матеріал вважається ідеально пружним, тому переміщення недооцінюються, особливо якщо з'являється пластичність. При використанні скінченних елементів, що враховують фізичну та геометричну нелінійності, матеріал «розм'якшується» після досягнення межі текучості, тому прогини та деформації реалістично зростають у пластичних зонах. Це запобігає штучному завищенню жорсткості моделі.

В програмному комплексі також варіювалась товщина мембрани від 2 до 20 мм кроком 2 мм. Результати розрахунку наведені на рис. 23–25.

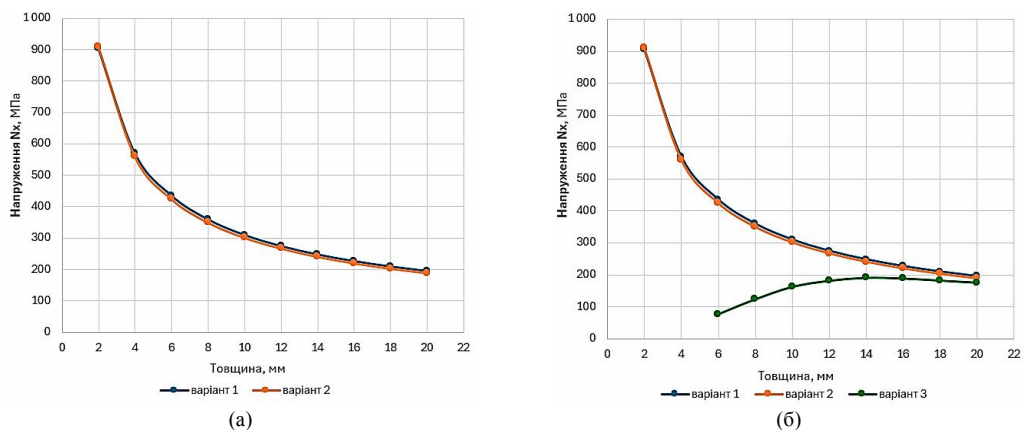


Рис. 23. Залежність напружень N_x від товщини мембрани, варіанти при: (а) – врахуванні тільки геометричної нелінійності; (б) – врахуванні геометричної і фізичної нелінійності

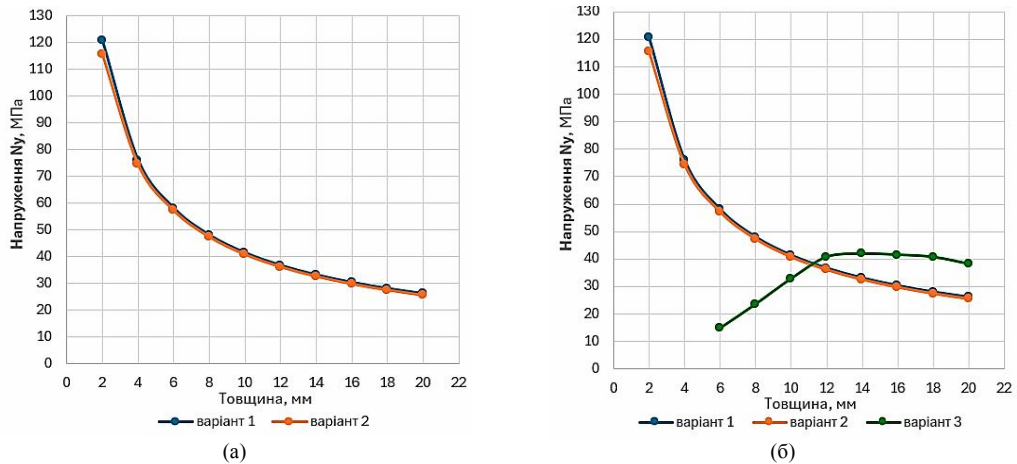


Рис. 24. Залежність напружень N_y від товщини мембрани, варіанти при:
(а) – врахуванні тільки геометричної нелінійності; (б) – врахуванні геометричної і фізичної нелінійності

Для сталевих мембран режим оболонки з великими переміщеннями дає точніші результати.

Врахування тільки геометричної нелінійності можна вважати доцільним, коли весь матеріал залишається в пружній зоні. Врахування фізичної нелінійності робить модель реалістичнішою, дозволяє правильно оцінити запас міцності та уникнути переоцінки несучої здатності.

Аналіз результатів (див. табл. 1, 2) показує суттєві відмінності між різними методами розрахунку деформованого стану шпунта у вигляді мембрани. Аналітичний метод за теорією Förrpl – von Kármán дає базове значення максимальних переміщень 84,5 мм, яке можна вважати еталонним. Хоча слабким місцем є складність урахування складних схем зовнішнього навантаження. Одновимірною моделлю мембранної смуги значно завищує результат з відхиленням понад 55%, і свідчить про обмеженість спрощених підходів для складних просторових задач.

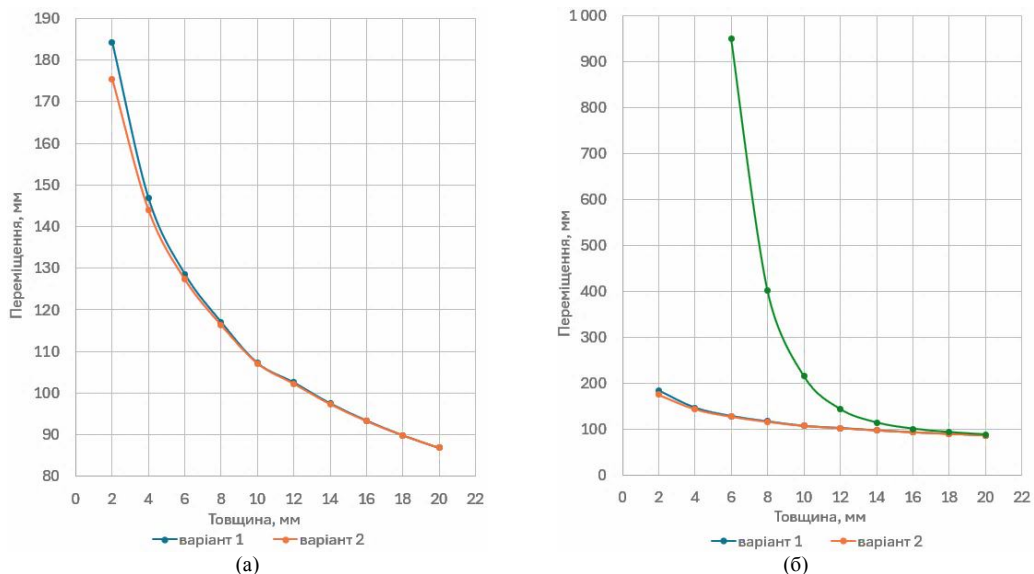


Рис. 25. Залежність переміщень від товщини мембрани для варіантів при:
а – врахуванні тільки геометричної нелінійності; б – врахуванні геометричної і фізичної нелінійності

Методи скінченних елементів (МСЕ) у варіантах 1 та 2 дають близькі результати (108,9 та 108,4 мм), з відхиленням близько 28–29%. Це свідчить про адекватність моделювання мембранного режиму та врахування геометричної нелінійності, хоча певне завищення переміщень порівняно з аналітичним рішенням залишається.

Таблиця 1

Порівняння параметрів деформованого стану вертикальної сталеві мембрани висотою 6 м, шириною 5 м, товщиною 10 мм отриманих за різними методами

Найменування методу розрахунку	Максимальні переміщення, w_{max} , мм	Відхилення від аналітичного рішення, %
Аналітичний метод з урахуванням геометричної нелінійності. Теорія Föppl – von Kármán. Ітераційний метод послідовних наближень або Newton – Raphson	84,5	-
Одновимірний модель за аналогією із мембранною смугою за нелінійною мембранною теорією Föppl – von Kármán для домінуючого мембранного режиму	131,4	+55,5%
МСЕ. Варіант 1. Геометрично нелінійні прямокутні скінченні елементи оболонки (КЕ 341). Моделює чисту мембрану	108,9	+28,9%
МСЕ. Варіант 2. Геометрично нелінійні прямокутні скінченні елементи оболонки (КЕ 341 – оболонка з великими переміщеннями)	108,4	+28,3%
МСЕ. Варіант 3. Прямокутні скінченні елементи оболонки з врахуванням фізичної та геометричної нелінійності (КЕ 441)	215,5	+155,0%

Таблиця 2

Порівняння параметрів напруженого стану вертикальної сталеві мембрани висотою 6 м, шириною 5 м, товщиною 10 мм отриманих за різними методами

Найменування методу розрахунку	Максимальні напруження біля опори, МПа	Максимальні напруження в прольоті, МПа
Аналітичний метод з урахуванням геометричної нелінійності. Теорія Föppl – von Kármán. Ітераційний метод послідовних наближень або Newton – Raphson	78,4	124,8
Одновимірний модель за аналогією із мембранною смугою за нелінійною мембранною теорією Föppl – von Kármán для домінуючого мембранного режиму	149,1	149,1
МСЕ. Варіант 1. Геометрично нелінійні прямокутні скінченні елементи оболонки (КЕ 341). Моделює чисту мембрану	310,0	233,5
МСЕ. Варіант 2. Геометрично нелінійні прямокутні скінченні елементи оболонки (КЕ 341 – оболонка з великими переміщеннями). Враховує повну жорсткість оболонки – мембранну і гинну. Оновлення координат вузлів на кожному кроці ітерації, як у методі Newton – Raphson	301,5	231,3
МСЕ. Варіант 3. Прямокутні скінченні елементи оболонки з врахуванням фізичної та геометричної нелінійності (КЕ 441). Розрахунок виконується кроковим методом. На кожному кроці матриця жорсткості формується в системі координат «нового положення» з врахуванням зміни дотичного модуля деформації	162,4	113,6

Найбільші розбіжності спостерігаються у варіанті 3, де враховано фізичну нелінійність і зміну дотичного модуля деформації.

Отже, для практичного використання найбільш збалансованими є аналітичний метод, варіант 2 за МСЕ, який добре моделює мембрану до межі текучості, і варіант 3, коли напруження в мембрані перевищують межу текучості.

Одновимірні моделі варто застосовувати лише для попередніх оцінок. Загалом результати підтверджують, що вибір методу розрахунку суттєво впливає на прогнозовані переміщення, і для інженерної практики доцільно комбінувати аналітичні та чисельні підходи, орієнтуючись на перевірені моделі.

Аналіз результатів (див. табл. 2) показує суттєві відмінності між різними методами розрахунку напружень у оболонках. Аналітичний метод із врахуванням геометричної нелінійності дає відносно низькі значення напружень (78,4 МПа біля опори та 124,8 МПа в прольоті), що свідчить про його більш «згладжений» характер. Одновимірна мембранна модель демонструє однакові напруження в опорі та прольоті (149,1 МПа), що відображає домінування мембранного режиму без урахування згинної жорсткості.

Методи МСЕ у варіантах 1 та 2 показують значно вищі напруження (понад 300 МПа біля опори та понад 230 МПа в прольоті), що пояснюється моделюванням чистої мембрани та врахуванням великих переміщень. Це свідчить про чутливість чисельних моделей до вибору типу елементів та алгоритму оновлення координат.

Натомість варіант 3 МСЕ, який враховує як геометричну, так і фізичну нелінійність, дає більш помірні значення (162,4 МПа біля опори та 113,6 МПа в прольоті), це пов'язано з перерозподілом згинальних і мембранних зусиль у процесі деформації оболонки. Це наближує його результати до аналітичного методу, але з урахуванням реалістичної зміни модуля деформації.

Таким чином, можна зробити висновок, що аналітичні методи та МСЕ з фізичною нелінійністю дають більш збалансовані результати, тоді як моделі чистої мембрани значно завищують напруження. Вибір методу має базуватися на необхідному рівні точності та врахуванні реальних жорсткісних характеристик оболонки. Це підтверджує важливість комплексного підходу до моделювання, де поєднуються аналітичні оцінки та чисельні експерименти.

Висновки. При розгляді мембран за аналітичною методикою із варіюванням товщин від 2 мм до 20 мм в залежності від співвідношення δ/s , у даному випадку $s = 5$ м, тож δ/s від 0,0004 до 0,004, та величини прогину слід дотримуватись рекомендацій приведених нижче.

1) Для товщин мембран 2–6 мм співвідношення товщини до прольоту більше 0,001, а прогин значно більше товщини. У цьому випадку застосування теорії Föppl – von Kármán є обов'язковою через урахування геометричної нелінійності. Лінійна теорія Kirchhoff – Love непридатна, тому що дає прогини завищені в 10–100 разів. У випадку істотного впливу зсувних ефектів, що спостерігається вкрай рідко для тонких мембран, необхідно використовувати теорію Mindlin – Reissner із геометричною нелінійністю.

Окремо слід зазначити, коли для тонких мембран існує істотний вплив зсувних ефектів. Зсувні деформації у класичній теорії Kirchhoff – Love ігноруються, бо вважається, що нормалі до середньої поверхні залишаються прямими і перпендикулярними після деформації. Для дуже тонких мембран при співвідношенні товщини до прольоту $< 0,01$, зсувні ефекти зазвичай малі, але вони можуть стати значущими у випадках локальних навантажень – точкових або концентрованих сил, коли виникають великі градієнти напружень; високочастотні коливання або динамічні навантаження, де зсувні деформації впливають на власні частоти; мембрани з шаруватою структурою або композитні матеріали, де зсувна жорсткість нижча, ніж у класичних ізотропних матеріалів; крайові ефекти поблизу закріплень чи отворів, де поля напружень і деформацій різко змінюються. У більшості випадків для тонких однорідних мембран зсувні ефекти незначні, але в перелічених ситуаціях їх врахування стає необхідним.

Необхідність застосування Теорія Mindlin – Reissner з нелінійністю обумовлена тим, що теорія Föppl – von Kármán враховує геометричну нелінійність, що виникає унаслідок великих прогинів при малих деформаціях, коли зміна геометрії впливає на рівняння рівноваги. Натомість теорія Mindlin – Reissner призначена для оцінювання зсуву для товстих пластин або оболонок, яка враховує зсувні деформації. Якщо її застосовують у нелінійній постановці, то йдеться про геометричну нелінійність, як у Föppl – von Kármán за рахунок великих прогинів і зміни геометрії.

В окремих випадках слід враховувати фізичну нелінійність, коли матеріал не є лінійно-пружним або має властивості пластичності, ортотропії або є композитним.

У контексті тонких мембран, зазвичай, мається на увазі геометрична нелінійність у поєднанні з урахуванням зсувних деформацій. Тобто рівняння Mindlin – Reissner записуються у нелінійній формі, щоб врахувати одночасно нелінійну кінематику, що спричиняє великі прогини та вплив зсувних деформацій на розподіл напружень.

В підсумку можна зазначити, що застосування теорії Föppl – von Kármán виправдано при урахуванні геометричної нелінійності без зсувних ефектів, вона підходить для тонких мембран, коли зсувні ефекти не є значущими. Теорія Mindlin – Reissner з урахуванням геометричної нелінійності та зсувних деформацій потрібна у випадках локальних навантажень, крайових ефектів, композитних матеріалів або динамічних впливів. Фізична нелінійність може додатково враховуватися, якщо матеріал мембрани працює поза межами пружності.

2) Для мембран завтовшки $\delta = 8 - 14$ мм ($\delta/s \approx 0,002$, $w > \delta$) теорія Föppl – von Kármán є оптимальною. Теорія Kirchhoff – Love можлива для застосування, але дає наближене рішення та недооцінює жорсткість мембрани без урахування геометричної нелінійності.

3) Для мембран завтовшки $\delta = 16 - 20$ мм ($\delta/s > 0,003$, $w \approx 3 - 4 \delta$) підходить теорія Föppl – von Kármán або Mindlin – Reissner із урахуванням зсувних ефектів та нелінійності. Теорія Kirchhoff – Love прийнятна для лінійного режиму, якщо прогин w співставний із товщиною мембрани δ .

Розрахунок мембранних конструкцій у програмних комплексах, що базуються на методи скінчених елементів (МСЕ) свідчить, що найбільш доцільним для практичного застосування є варіант 3 МСЕ. Він враховує як геометричну, так і фізичну нелінійність, що дозволяє отримати більш реалістичні значення напружень і переміщень у порівнянні з іншими методами. На відміну від моделей чистої мембрани, які суттєво завищують результати, варіант 3 забезпечує збалансоване відображення роботи конструкції з урахуванням зміни модуля деформації. Це робить його більш надійним для прогнозування поведінки оболонок у діапазоні напружень, що перевищують межу текучості. Аналітичні методи залишаються корисними для базових оцінок і перевірки чисельних моделей, однак для інженерної практики варіант 3 МСЕ має перевагу завдяки комплексності та точності. Таким чином, його можна рекомендувати як основний інструмент для розрахунків у складних просторових задачах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самородов О. В., Єсакова С. В., Бондар О. П., Кротов О. В. Удосконалена конструкція комбінованої підпірної стіни котловану у водонасичених ґрунтах. *Наука та будівництво*. 2025. Т. 44, вип. 2. С. 28–35. DOI:10.33644/2313–6679–2–2025–3
2. Заява на патент на винахід №a202505968, Україна МПК E02D 29/02. Комбінована гнучка підпірна стіна (Самородов О. В., Ватуля Г. Л., Бондар О. П.). Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова. – Заявл. 01.12.2025.
3. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Journal of Applied Mechanics*. 1953. Vol. 20, No. 3. P. 327–344. DOI:10.1115/1.4010702
4. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1945. Vol. 12, No. 2. P. 69–77. DOI:10.1115/1.4009435
5. Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI:10.1201/9780849384165
6. Ugural A. C. Stresses in beams, plates, and shells. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2009. 596 p. DOI:10.1201/b17516
7. Peterson M. A. Geometrical methods for the elasticity theory of membranes. *Journal of mathematical physics*. 1985. Vol. 26, No. 4. P. 711–717. DOI:10.1063/1.526612
8. Lewicka M., Mahadevan L., Pakzad M. R. The Föppl–von Kármán equations for plates with incompatible strains. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2011. Vol. 467, No. 2126. P. 402–426. DOI:10.1098/rspa.2010.0138
9. Novozhilov V. V. The Theory of Thin Shells / transl. by P. G. Lowe ; ed. by J. R. M. Radok. 2nd rev. ed. Groningen : P. Noordhoff, 1964. 417 p.
10. Timoshenko S., Woinowsky–Krieger S. Theory of Plates and Shells. 2nd edition. New York : McGraw–Hill, 1959. 580 p.
11. Ciarlet P. G. Mathematical Elasticity : Volume III: Theory Of Shells. Amsterdam : North–Holland, 2000. 599 p.
12. Vidoli S. Discrete approximations of the Föppl–Von Kármán shell model: From coarse to more refined models. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, No. 9. P. 1241–1252. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2012.12.017
13. Bartels S. Numerical solution of a Föppl–von Kármán model. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2017. Vol. 55, No. 3. P. 1505–1524. DOI:10.1137/16M1069791

14. Ciarlet P. G., Gratie L., Kesavan S. Numerical analysis of the generalized von Kármán equations. *Comptes rendus. Mathématique*. 2005. Vol. 341, Is. 11. P. 695–699. DOI:10.1016/j.crma.2005.09.031
15. Pimenta P. M., Almeida Neto E. S., Campello E. M. B. A Fully Nonlinear Thin Shell Model of Kirchhoff-Love Type. In : De Mattos Pimenta P., Wriggers P. (eds). *New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer : Vienna. 2010. Vol. 519. P. 29–58. DOI:10.1007/978-3-7091-0231-2_2
16. Viebahn N., Pimenta P. M., Schröder J. A simple triangular finite element for nonlinear thin shells: statics, dynamics and anisotropy. *Computational Mechanics*. 2017. Vol. 59. P. 281–297. DOI:10.1007/s00466-016-1343-6
17. Ciarletta P., Pozzi G., Riccobelli D. The Föppl–von Kármán equations of elastic plates with initial stress. *Royal Society Open Science*. 2022. Vol. 9. P. 220421. DOI:10.1098/rsos.220421

REFERENCES

1. Samorodov O. V., Yesakova S. V., Bondar O. P., Krotov O. V. Udoskonalena konstruktsiya kombinovanoi pidpironoyi stiny kotlovanu u vodonasychenykh gruntakh (Improved design of a combined retaining wall for a foundation pit in water-saturated soils). *Nauka ta budivnytstvo*. 2025. T. 44, vyp. 2. S. 28–35. DOI:10.33644/2313–6679–2–2025–3
2. Patent application for invention №202505968, Ukraine IPC E02D 29/02. Combined flexible retaining wall (Samorodov O. V., Vatulia G. L., Bondar O. P.). O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. – Declared Dec. 01, 2025.
3. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Journal of Applied Mechanics*. 1953. Vol. 20, No. 3. P. 327–344. DOI:10.1115/1.4010702
4. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1945. Vol. 12, No. 2. P. 69–77. DOI:10.1115/1.4009435
5. Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI:10.1201/9780849384165
6. Ugural A. C. Stresses in beams, plates, and shells. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2009. 596 p. DOI:10.1201/b17516
7. Peterson M. A. Geometrical methods for the elasticity theory of membranes. *Journal of mathematical physics*. 1985. Vol. 26, No. 4. P. 711–717. DOI:10.1063/1.526612
8. Lewicka M., Mahadevan L., Pakzad M. R. The Föppl–von Kármán equations for plates with incompatible strains. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2011. Vol. 467, No. 2126. P. 402–426. DOI:10.1098/rspa.2010.0138
9. Novozhilov V. V. The Theory of Thin Shells / transl. by P. G. Lowe ; ed. by J. R. M. Radok. 2nd rev. ed. Groningen : P. Noordhoff, 1964. 417 p.
10. Timoshenko S., Woinowsky–Krieger S. Theory of Plates and Shells. 2nd edition. New York : McGraw–Hill, 1959. 580 p.
11. Ciarlet P. G. Mathematical Elasticity : Volume III: Theory Of Shells. Amsterdam : North–Holland, 2000. 599 p.
12. Vidali S. Discrete approximations of the Föppl–Von Kármán shell model: From coarse to more refined models. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, No. 9. P. 1241–1252. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2012.12.017
13. Bartels S. Numerical solution of a Föppl–von Kármán model. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2017. Vol. 55, No. 3. P. 1505–1524. DOI:10.1137/16M1069791
14. Ciarlet P. G., Gratie L., Kesavan S. Numerical analysis of the generalized von Kármán equations. *Comptes rendus. Mathématique*. 2005. Vol. 341, Is. 11. P. 695–699. DOI:10.1016/j.crma.2005.09.031
15. Pimenta P. M., Almeida Neto E. S., Campello E. M. B. A Fully Nonlinear Thin Shell Model of Kirchhoff-Love Type. In : De Mattos Pimenta P., Wriggers P. (eds). *New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer : Vienna. 2010. Vol. 519. P. 29–58. DOI:10.1007/978-3-7091-0231-2_2
16. Viebahn N., Pimenta P. M., Schröder J. A simple triangular finite element for nonlinear thin shells: statics, dynamics and anisotropy. *Computational Mechanics*. 2017. Vol. 59. P. 281–297. DOI:10.1007/s00466-016-1343-6
17. Ciarletta P., Pozzi G., Riccobelli D. The Föppl–von Kármán equations of elastic plates with initial stress. *Royal Society Open Science*. 2022. Vol. 9. P. 220421. DOI:10.1098/rsos.220421

Стаття надійшла 21.03.2026

Мозговий А.О., Спіранде К.В., Самородов О.В., Спіранде О.С.

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ПЛОСКОГО ШПУНТА ЯК МЕМБРАННОГО ЕЛЕМЕНТА КОМБІНОВАНОЇ ПІДПІРНОЇ СТІНИ

Будівництво підземних споруд є однією з ключових тенденцій у сучасному будівництві з додатковим врахуванням небезпеки з боку країни-агресора. Це неминуче пов'язане з розробкою глибоких котлованів, що потребує влаштування коштовних конструкцій підпирних стін, особливо у водонасичених ґрунтах. Запропоновано ефективну конструкцію комбінованої гнучкої підпирної стіни, що включає плоский шпунт, який працює в системі на розтяг як мембранний елемент, виконуючий також функцію протифільтраційної завіси.

Для моделювання роботи плоского шпунта застосовуються класичні теорії пружності: Kirchhoff – Love для тонких пластин, Mindlin – Reissner для елементів середньої товщини та Föppl – von Kármán для випадків значних прогинів і геометричної нелінійності. Вибір теорії залежить від співвідношення товщини мембрани до її характерних розмірів та від типу навантаження. Посадання аналітичних рішень із чисельними методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ), дозволяє забезпечити достовірність та надійність результатів.

Досліджено вплив товщини мембрани на прогини, осьові зусилля та збіжність чисельних алгоритмів. Встановлено, що зі збільшенням товщини від 2 до 20 мм прогини зменшуються з 147,3 до 65,6 мм, а максимальне осьове зусилля N_x зростає від 491,29 до 904,5 кН/м. Товстіші мембрани характеризуються більшою жорсткістю, меншою деформацією та швидшою

збіжністю розрахунків. Для тонких мембран (2–6 мм) необхідне застосування теорії Föppl – von Kármán, тоді як для середніх товщин (8–12 мм) доцільний баланс між допустимими прогинами та навантажувальною здатністю. Для товстих мембран (14–20 мм) рекомендовано використання теорії Mindlin – Reissner із врахуванням зсувних ефектів. Оптимальний діапазон товщин 8–12 мм забезпечує прийнятні деформації, достатню несучу здатність та економію матеріалу.

Моделювання у програмному комплексі LIRA-FEM базується на методи скінченних елементів у формі переміщень. Мембрана розглядається як оболонка з мінімальною згинною жорсткістю, де домінують мембранні зусилля. Використання теорії Kirchhoff – Love та Föppl – von Kármán дозволяє врахувати ефект геометричного зміцнення, а застосування фізично-геометричної нелінійності забезпечує реалістичні результати. У дослідженні виконано моделювання сталеві мембрани висотою 6 м, шириною 5 м, товщиною 10 мм під дією трапецієподібного тиску ґрунту. Розглянуто три варіанти моделювання: лише геометрична нелінійність, оболонка з повною жорсткістю та фізично-геометрична нелінійність. Порівняння показало, що врахування фізичної нелінійності дозволяє уникнути переоцінки несучої здатності та правильно оцінити запас міцності.

Таким чином, комплексний підхід, що поєднує аналітичні моделі та чисельні методи, дає змогу сформувати багаторівневу методичну базу для проєктування та розрахунку конструкцій комбінованих підпірних стін з плоским шпунтом (мембранним елементом). Це забезпечує точність розрахунків та достовірність результатів для сучасної інженерної практики.

Ключові слова: огороження котловану, комбінована підпірна стіна, плоский шпунт, тиск ґрунту, мембрана, гнучка пластина, напружено-деформований стан, геометрична нелінійність, максимальний прогин, метод скінченних елементів (МСЕ).

Mozgheviy A.O., Spirande K.V., Samorodov O.V., Spirande O.S.

FEATURES OF THE CALCULATION OF A FLAT SHEET AS A MEMBRANE ELEMENT OF A COMBINED RETAINING WALL

The construction of underground structures is one of the key trends in modern construction, with additional consideration given to the threat posed by an aggressor state. This inevitably involves the excavation of deep pits, which requires the installation of costly retaining wall structures, particularly in water-saturated soils. An effective design for a combined flexible retaining wall is proposed, incorporating a flat sheet pile that functions within the system under tension as a membrane element, also serving as an anti-seepage curtain.

Classical elasticity theories are used to model the behaviour of flat sheet piles: the Kirchhoff–Love theory for thin plates, the Mindlin–Reissner theory for elements of intermediate thickness, and the Föppl–von Kármán theory for cases involving significant deflections and geometric non-linearity. The choice of theory depends on the ratio of the membrane thickness to its characteristic dimensions and on the type of loading. Combining analytical solutions with numerical methods, in particular the finite element method (FEM), ensures the accuracy and reliability of the results.

The effect of membrane thickness on deflections, axial forces and the convergence of numerical algorithms was investigated. It was found that as the thickness increases from 2 to 20 mm, deflections decrease from 147,3 to 65,6 mm, whilst the maximum axial force N_x increases from 491,29 to 904,5 kN/m. Thicker membranes are characterised by greater stiffness, lower deformation and faster convergence of calculations. For thin membranes (2–6 mm), the application of the Föppl–von Kármán theory is necessary, whilst for medium thicknesses (8–12 mm), a balance between permissible deflections and load-bearing capacity is advisable. For thick membranes (14–20 mm), the use of the Mindlin–Reissner theory, taking into account shear effects, is recommended. The optimal thickness range of 8–12 mm ensures acceptable deflections, sufficient load-bearing capacity and material savings.

Modelling in the LIRA-FEM software package is based on the displacement-based finite element method. The membrane is treated as a shell with minimal bending stiffness, where membrane forces dominate. The use of the Kirchhoff–Love and Föppl–von Kármán theories allows the effect of geometric stiffening to be taken into account, whilst the application of physically-based geometric non-linearity ensures realistic results. The study involved modelling a steel membrane 6 m high, 5 m wide and 10 mm thick under trapezoidal soil pressure. Three modelling variants were considered: geometric non-linearity only, a shell with full stiffness, and physical-geometric non-linearity. The comparison showed that taking physical non-linearity into account allows the bearing capacity to be correctly estimated and the safety factor to be accurately assessed.

Thus, an integrated approach combining analytical models and numerical methods makes it possible to establish a multi-level methodological framework for the design and calculation of composite retaining wall structures incorporating flat sheet piles (membrane elements). This ensures the accuracy of calculations and the reliability of results for modern engineering practice.

Keywords: excavation shoring, composite retaining wall, sheet piling, earth pressure, membrane, flexible plate, stress-strain state, geometric non-linearity, maximum deflection, finite element method (FEM).

УДК 624.137.5 : 539.3

Мозговий А.О., Спіранде К.В., Самородов О.В., Спіранде О.С. Особливості розрахунку плоского шпунта як мембранного елемента комбінованої підпірної стіни // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.–тех. збірник – К.: КНУБА, 2026. – Вип. 116. – Стр. 133–159.

Представлено аналітичне розв'язання задачі напружено-деформованого стану плоского сталевго шпунта як мембранного конструктивного елемента комбінованої підпірної стіни огороження котловану. В алгоритм розрахунку залучено класичні теорії розрахунку гнучких пластин та мембран: Kirchhoff–Love, Mindlin – Reissner, Föppl – von Kármán. Верифікація результатів аналітичних розрахунків здійснена із чисельними розрахунками мембранних конструкцій у програмному комплексі LIRA-FEM методом скінченних елементів. Виявлено закономірності роботи мембранних конструкцій під час нехарактерних навантажень, що доводить валідацію аналітичного алгоритму.

Табл. 2. Іл. 24. Бібліогр. 17 назв.

UDK 624.137.5 : 539.3

Mozghovyi A.O., Spirande K.V., Samorodov O.V., Spirande O.S. Features of the calculation of a flat sheet as a membrane element of a combined retaining wall // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. – К.: KNUBA, 2026. – Issue 116. – Pp. 133–159. – Ukr.

An analytical solution is presented for the stress-strain problem of a flat steel sheet pile acting as a membrane structural element in a composite retaining wall for an excavation. The calculation algorithm incorporates classical theories for the design of flexible plates and membranes: Kirchhoff–Love, Mindlin–Reissner, and Föppl–von Kármán. The results of the analytical calculations were verified using numerical calculations of membrane structures in the LIRA-FEM software package via the finite element method. Patterns in the behaviour of membrane structures under non-standard loads have been identified, which confirms the validity of the analytical algorithm.

Tab. 2. Fig. 24. Ref. 17

Автор: доктор технічних наук, доцент, професор кафедри геотехніки, підземних споруд та гідротехнічного будівництва МОЗГОВИЙ Андрій Олексійович

Адреса: 61002 Україна, м. Харків, вулиця Сумська 40, Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, МОЗГОВОМУ Андрію Олексійовичу.

Тел.: +38(050) 749-03-04

Е-mail: mozgovoyandrey@ukr.net; Andrii.Mozghovyi@kname.edu.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-9142-3169>

Автор: кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельних конструкцій СПІРАНДЕ Каріна Віталіївна

Адреса: 61002 Україна, м. Харків, вулиця Сумська 40, Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, СПІРАНДЕ Каріні Віталіївні.

Тел.: +38(050) 631-86-16 ;

Е-mail: karina.spirande@kname.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5552-7817>

Автор: доктор технічних наук, професор, професор кафедри геотехніки, підземних споруд та гідротехнічного будівництва САМОРОДОВ Олександр Віталійович

Адреса: 61002 Україна, м. Харків, вулиця Сумська 40, Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, САМОРОДОВУ Олександрю Віталійовичу.

Тел.: +38(050) 301-76-99

Е-mail: osamorodov@ukr.net; oleksandr.samorodov@kname.edu.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-4395-9417>

Автор: аспірант кафедри геотехніки, підземних споруд та гідротехнічного будівництва СПІРАНДЕ Олександр Сергійович

Адреса: 61002 Україна, м. Харків, вулиця Сумська 40, Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова, СПІРАНДЕ Олександрю Сергійовичу.

Тел.: +38(099) 495-83-09

Е-mail: oleksandr.spirande@kname.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0005-1311-2006>