УДК 539.3

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАЛКИ ЕЙЛЕРА-БЕРНУЛЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ГРІНА

Н.В. Бондаренко,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

В.В. Отрашевська,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.115.204-212

Досліджується динамічна реакція простої опертої балки Ейлера-Бернуллі, на яку одночасно діють зосереджені сили та моменти. За допомогою методу функцій Гріна отримано аналітичний розв'язок у замкненій формі, що дає можливість визначати реакцію балки та аналізувати особливості її динамічної поведінки. Отримані розв'язки крайової задачі Ейлера-Бернуллі, що ілюструють характер переміщень для різних значень навантажень.

Ключові слова: коливання балки, рівняння Ейлера-Бернуллі, функція Гріна, аналітичний розв'язок.

Вступ. Фізичні та інженерні крайові задачі моделюються здебільшого за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для їх розв'язання використовують аналітичні та чисельні методи, а також їх комбінації. Найбільш поширені та ефективні чисельні методи, оскільки вони дозволяють знаходити наближені розв'язки навіть для систем зі складною геометрією та нелінійністю. Хоча ці методи дають конкретні числові результати, вони не завжди забезпечують фізичне розуміння властивостей моделі. Для розв'язання деяких типів рівнянь можна застосовувати аналітичні методи, які дають більш загальну форму розв'язків та глибше розуміння поведінки моделі в широкому діапазоні умов.

Аналіз динамічної поведінки балок під дією різних типів розподілених навантажень має велике практичне значення для забезпечення безпеки та надійності інженерних конструкцій у будівництві, машинобудуванні, авіації та суднобудуванні, залізничній індустрії та ін. Такі дослідження важливі в задачах зниження вібрацій, забезпечення довговічності та запобігання катастрофічним наслідкам. Зважаючи на велике практичне значення, аналіз динамічної поведінки балок під дією різних типів розподілених навантажень є актуальним напрямом досліджень [1, 2, 4, 5]. Вимушені поперечні коливання балок, зумовлені стаціонарними та рухомими навантаженнями, математично описуються рівнянням Ейлера-Бернуллі [6]. Вибір методу його розв'язання залежить від граничних умов, характеру навантаження (локальне/розподілене; стаціонарне/рухоме), неоднорідності балки та наявності демпфування. Найчастіше для аналізу таких рівнянь застосовується метод розкладання навантажень і реакцій за власними функціями незатухаючих балок [6, 7] у поєднанні з чисельними методами. Цей метод призводить до розв'язків у вигляді нескінченних рядів і вимагає утримання певної кількості членів рядів. Недоліком цього методу є повільна збіжність при локалізованих збуреннях, неточність при змінних коефіцієнтах чи складних граничних умовах. Пошук аналітичних розв'язків та різних наближених розв'язків крайової задачі Ейлера-Бернуллі завжди був і залишається актуальною задачею досліджень. Fryba L. [3] використав інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа для визначення динамічної реакції балки під дією рухомих навантажень і отримав розв'язок у формі рядів. Hamada R. [8] застосував подвійне перетворення Лапласа для задачі просто опертої балки з демпфуванням, по якій рухається сила сталої величини, та отримав точний розв'язок у замкненій формі. У роботі [9] представлений метод знаходження наближеного розв'язку задачі коливання балки, який полягає у знаходженні так званих розв'язувальних поліномів, які тотожно задовольняють рівняння Ейлера-Бернуллі.

Одним із підходів до розв'язання задачі коливання балки є метод функцій Гріна, який ґрунтується на побудові спеціальної функції – розв'язку рівняння з правою частиною у вигляді дельта-функції Дірака при заданих граничних умовах. Функція Гріна фактично описує реакцію балки на локалізоване збурення (точкове джерело). Завдяки цьому будь-яке зовнішнє навантаження, представлене у вигляді інтеграла від дельта-функцій, може бути враховане через інтегральне згорткове перетворення. У роботі [10] використовуються функції Гріна та метод розділення змінних для аналізу вільних коливань комбінованих динамічних систем, що складаються з балок і масово-пружинних осциляторів, та отримані точні власні частоти й нормальні моди. Також за допомогою розкладу за власними формами визначається динамічна реакція системи на довільне збурення. У подальших роботах метод функцій Гріна застосовується для дослідження вільних і вимушених коливань балок Ейлера-Бернуллі з різними варіантами закріплення, додатковими масами та пружними опорами [11, 12, 13]. Багато робіт присвячено використанню динамічних функцій Гріна для розв’язання задач із рухомими навантаженнями та різними крайовими умовами [14, 15]. Метод функцій Гріна має низку переваг порівняно з класичними методами розкладання за власними функціями. Він дозволяє отримувати загальні, точні розв’язки в замкненій формі, що особливо важливо для випадків із довільними крайовими умовами, коли спектральний підхід потребує громіздких обчислень. Також цей метод природним чином враховує як зосереджені, так і розподілені навантаження, включно з комбінаціями силових та моментних дій. Крайові умови інтегруються безпосередньо у побудову функції Гріна, що робить подальший розрахунок більш універсальним [15].

У роботі розглядається застосування методу функцій Гріна для визначення динамічної реакції балок Ейлера-Бернуллі, що піддаються одночасній дії зосереджених сил та моментів. Такий підхід відповідає реальним інженерним застосуванням. З математичної точки зору, зосереджена сила та момент можуть бути включені до рівняння руху балки за допомогою розподілу Дірака. Зокрема, зосереджена сила моделюється дельта-функцією Дірака $\delta(x)$ (як, наприклад, у роботах [14, 16]), а дія зосередженого моменту описується за допомогою її першої похідної $\delta'(x)$. Порівнюються розв'язки задачі про вимушені коливання балки, отримані двома різними аналітичними методами: методом функцій Гріна та методом розкладання за власними функціями. Наведені графіки, що ілюструють поведінку розв'язків для різних значень зосереджених сил та моментів.

1. Аналітичне розв’язання. Поперечні коливання однорідної пружної балки Ейлера-Бернуллі без демпфування описуються диференціальним рівнянням у частинних похідних

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t), \tag{1}$$

де $w(x,t)$ – прогин балки в точці x в момент часу t, E – модуль Юнга матеріалу, I – момент інерції поперечного перерізу балки, m – маса балки на одиницю довжини, а $f(x,t)$ позначає навантаження на одиницю довжини балки в точці x в момент часу t.

Ми розглядаємо просту оперту балку, що піддається одночасній дії точкової гармонічної сили та точкового гармонічного моменту в точці $\xi=x_0$ (рис. 1). Це означає, що функція навантаження $f(x,t)$ має вигляд

$$f(x,t)=(F_0\ \delta(x-\xi)+M_0\ \delta'(x-\xi))\cos\omega t, \tag{2}$$

де F_0 – зосереджена гармонічна сила $F(t)$ у точці ξ, M_0 – гармонічне моментне навантаження $M(t)$ у точці ξ, $\delta(x-\xi)$ – дельта функція Дірака, ω – кругова частота гармонічного збурення, тобто частота коливань прикладеної сили F_0 та моменту M_0 у точці ξ.

Рівняння руху балки задовольняє початкові (3) та крайові (4) умови:

$$\begin{cases} w(x,0)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}w(x,0)=0. \end{cases} \tag{3}$$

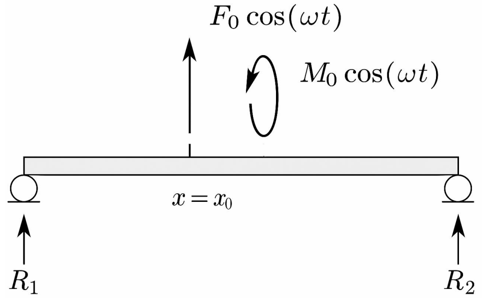

Рис. 1

$$\begin{cases} w(0,t)=0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}w(0,t)=0, \\ w(l,t)=0, \\ EI\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}w(l,t)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Розглянемо рівняння

$$EI\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=p(x)e^{i\omega t}, \tag{5}$$

де $p(x)=F_0\ \delta(x-\xi)+M_0\ \delta'(x-\xi)$, а i – уявна одиниця ($i^2=-1$).

Розв'язок рівняння (5) шукатимемо у вигляді

$$v(x,t)=X(x)e^{i\omega t}. \tag{6}$$

Тоді розв'язок рівняння (1) матиме вигляд

$$w(x,t)=\mathrm{Re}\{v(x,t)\}. \tag{7}$$

Підставляючи розв'язок (6) у рівняння (5), отримуємо:

$$EI\ X^{IV}e^{i\omega t}-m\omega^2 Xe^{i\omega t}=p(x)e^{i\omega t};$$

$$EI\ X^{IV}-m\omega^2 X=p(x);$$

$$X^{IV}-\frac{m\omega^2}{EI}X=\frac{p(x)}{EI};$$

$$X^{IV}-k^4X=\frac{p(x)}{EI},\ \text{де}\ k^4=\frac{m\omega^2}{EI}. \tag{8}$$

Розв'язок рівняння (8) можна подати у вигляді (див. [13, 15])

$$X(x)=\int_0^l p(\xi)G(x,\xi)d\xi, \tag{9}$$

де l – довжина балки, $G(x,\xi)$ – функція Гріна, яку потрібно знайти.

Зручний та компактний спосіб запису розв'язку через функцію Гріна $G(x,\xi)$ для оператора $L=\dfrac{d^4}{dx^4}-k^4$ має вигляд

$$LG(x,\xi)=\delta(x-\xi),\quad 0<x<l.$$

Тоді розв'язок для джерел з δ та δ' записується як

$$X(x)=\frac{F_0}{EI}G(x,\xi)+\frac{M_0}{EI}\tilde{G}(x,\xi), \tag{10}$$

де $\tilde{G}$ – функція, що відповідає джерелу δ'.

Оскільки $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\delta(x-\xi)=-\delta'(x-\xi)$, то

$$\tilde{G}(x,\xi)=-\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi).$$

Таким чином, розв'язок (10) для простої опертої балки має вигляд

$$X(x)=\frac{F_0}{EI}G(x,\xi)-\frac{M_0}{EI}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi} \tag{11}$$

з крайовими умовами:

$$X(0)=X''(0)=0,\ X(l)=X''(l)=0.$$

Знайдемо функцію Гріна $G(x,\xi)$ з тими ж крайовими умовами що й $X(x)$:

$$G(0,\xi) = G''(0,\xi) = 0, \quad G(l,\xi) = G''(l,\xi) = 0 .$$

На кожному з інтервалів $x \le \xi$ та $x \ge \xi$ маємо однорідне диференціальне рівняння відповідне до рівняння (5)

$$Y^{IV} - k^4 Y = 0 . \tag{12}$$

Базисом простору розв'язків рівняння (12) є функції

$$\cosh(kx), \ \sinh(kx), \ \cos(kx), \ \sin(kx) . \tag{13}$$

Застосовуючи ліві крайові умови у точці $x = 0$ до цих чотирьох функцій, дістанемо, що будь-яка лінійна комбінація функцій $u_1(x) = \sinh(kx)$, $u_2(x) = \sin(kx)$

$$Y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) , \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$$

задовольняє умови $Y(0) = Y''(0) = 0$.

Аналогічно, для правого краю зручно взяти функції, «прив'язані» до точки $x = l$:

$$v_1(x) = \sinh(k(l-x)) , \quad v_2(x) = \sin(k(l-x)) .$$

Тоді будь-яка лінійна комбінація функцій $Y(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ задовольняє умови $Y(l) = Y''(l) = 0$.

Функцію Гріна шукатимемо у вигляді

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A_1(\xi) u_1(x) + A_2(\xi) u_2(x), \ 0 \le x \le \xi, \\ B_1(\xi) v_1(x) + B_2(\xi) v_2(x), \ \xi \le x \le l, \end{cases} \tag{14}$$

де коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2 залежать тільки від ξ .

У точці $x = \xi$ накладемо стандартні умови для функції Гріна 4-го порядку:

1) неперервність G, G', G'' :

$$G(\xi^-,\xi) = G(\xi^+,\xi) , \ G'(\xi^-,\xi) = G'(\xi^+,\xi) , \ G''(\xi^-,\xi) = G''(\xi^+,\xi) ;$$

2) стрибок третьої похідної

$$G'''(\xi^-,\xi) - G'''(\xi^+,\xi) = 1 .$$

Ці чотири умови дають систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів A_1, A_2, B_1, B_2 .

Позначимо для зручності значення базисів у точці ξ :

$$u_1 = u_1(\xi) , \ u_2 = u_2(\xi) , \ u_1' = u_1'(\xi) , \ u_2' = u_2'(\xi) ,$$
$$u_1'' = u_1''(\xi) , \ u_2'' = u_2''(\xi) , \ u_1''' = u_1'''(\xi) , \ u_2''' = u_2'''(\xi) ,$$

$$v_1 = v_1(\xi) , \ v_2 = v_2(\xi) , \ v_1' = -v_1'(\xi) , \ v_2' = -v_2'(\xi) ,$$
$$v_1'' = -v_1''(\xi) , \ v_2'' = -v_2''(\xi) , \ v_1''' = -v_1'''(\xi) , \ v_2''' = -v_2'''(\xi) .$$

Зауважимо, що похідні u_i', u_i'', u_i''', v_i', v_i'', v_i''' ($i = 1,2$) беруться за змінною x, а потім підставляється $x = \xi$.

Таким чином, маємо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & -v_1 & -v_2 \\ u_1' & u_2' & -v_1' & -v_2' \\ u_1'' & u_2'' & -v_1'' & -v_2'' \\ u_1''' & u_2''' & -v_1''' & -v_2''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Розв'язуючи цю систему методом Гаусса, дістанемо розв'язок $A_1(\xi), A_2(\xi), B_1(\xi), B_2(\xi)$.

Після алгебраїчних перетворень отримаємо симетричну форму функції Гріна

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2025. № 115

$$G(x,\xi)=\frac{1}{k^3\Delta}\begin{cases}(\sinh(kx)-\sin(kx))(\sinh(k(l-\xi))+\sin(k(l-\xi))), & x\le\xi,\\ (\sinh(k\xi)-\sin(k\xi))(\sinh(k(l-x))+\sin(k(l-x))), & x\ge\xi,\end{cases} \tag{15}$$

де $\Delta=\sinh(kl)\cos(kl)-\cosh(kl)\sin(kl)$.

Для компактного запису позначимо:

$$s_-(x)=\sinh(kx)-\sin(kx)\,,\quad s_+(x)=\sinh(k(l-x))+\sin(k(l-x))\,.$$

Тоді функція Гріна набере вигляду

$$G(x,\xi)=\frac{1}{k^3\Delta}\begin{cases}s_-(x)\cdot s_+(\xi), & x\le\xi,\\ s_-(\xi)\cdot s_+(x), & x\ge\xi.\end{cases}$$

Похідна по ξ функції Гріна має вигляд

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi}=\frac{1}{k^2\Delta}\begin{cases}-s_-(x)\cdot(\cosh(k(l-\xi))+\cos(k(l-\xi))), & x\le\xi,\\ (\cosh(k\xi)-\cos(k\xi))s_+(x), & x\ge\xi.\end{cases}$$

З рівності (11) отримаємо розв’язок $X(x)$:

якщо $0\le x\le\xi$, то

$$X(x)=\frac{F_0}{EI}\frac{s_-(x)s_+(\xi)}{k^3\Delta}+\frac{M_0}{EI}\frac{s_-(x)(\cosh(k(l-\xi))+\cos(k(l-\xi)))}{k^2\Delta}\,; \tag{16}$$

якщо $\xi\le x\le l$:

$$X(x)=\frac{F_0}{EI}\frac{s_-(\xi)s_+(x)}{k^3\Delta}-\frac{M_0}{EI}\frac{s_+(x)(\cosh(k\xi)-\cos(k\xi))}{k^2\Delta}\,. \tag{17}$$

Таким чином, розв’язок крайової задачі (1)

$$w(x,t)=X(x)\cos\omega t\,.$$

Зауваження. 1. Розв’язки (16) та (17) задовольняють крайові умови $X(0)=X''(0)=X(l)=X''(l)=0$ завдяки вибору функцій s_- та s_+.

2. У точці $x=\xi$ виконуються умови неперервності функцій X та X':

$$X(\xi^-)=X(\xi^+)\,,\quad X'(\xi^-)=X'(\xi^+)$$

та мають місце стрибки другої та третьої похідних функції X:

$$X''(\xi^+)-X''(\xi^-)=-\frac{M_0}{EI}\,,\quad X'''(\xi^+)-X'''(\xi^-)=\frac{F_0}{EI}\,.$$

3. Якщо $\Delta=0$ для деяких параметрів (випадок резонансу), потрібно вводити демпфування або регуляризацію знаменника.

2. Приклади. Розглянемо приклад крайової задачі Ейлера-Бернуллі (1) – (3) з такими параметрами:

$$l=3\,,\ k=1\,,\ F_0=1\,,\ M_0=0{,}5\,,\ EI=1\,,\ \zeta=x_0=1{,}5\,. \tag{18}$$

Розв'язок крайової задачі методом розкладання в ряд за власними функціями має вигляд

$$X(x)=\frac{2}{lEI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-k^4}\left(F_0\sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)-M_0\frac{n\pi}{l}\cos\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)\right).$$

На рис. 2 зображені графіки розв’язків, отриманих двома методами: методом з використанням функцій Гріна та методом розкладання в ряд за власними функціями. Графіки цих двох розв'язків практично збігаються.

Розглянемо задачу Ейлера-Бернуллі для сталевої балки з такими параметрами.

Матеріал: сталь ($E=2{,}1\cdot10^{11}$ Па, $\rho=7850$ кг/м^3).

Переріз: $b=0{,}1$ м, $h=0{,}2$ м $\Longrightarrow$ $A=0{,}02$ м^2, $I=6{,}667\cdot10^{-5}$ м^4.

Довжина $l=10$ м, точка прикладення $x_0=1{,}5$ м.

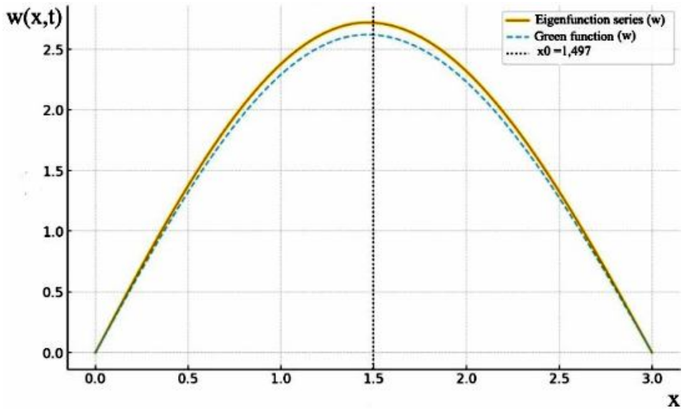

Рис. 2

На рис. 3 зображені графіки прогину балки Ейлера-Бернуллі для вказаних параметрів при різних значеннях моментів $M_0 = 50, 100, 200$ Н/м та зосередженою силою $F_0 = 500$ Н, отримані методом функцій Гріна.

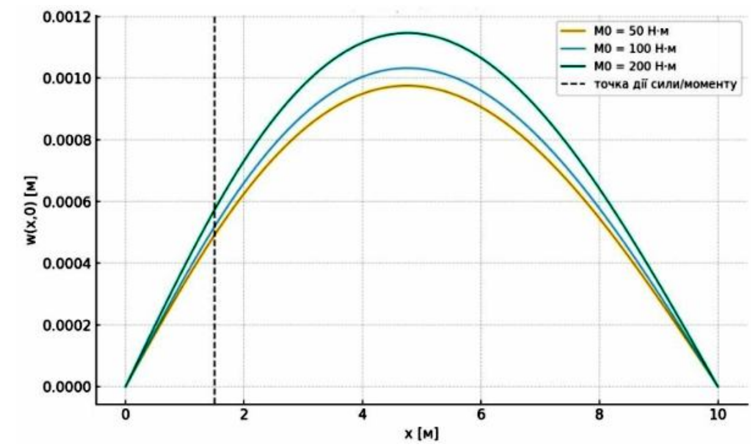

Рис. 3

На рис. 4 зображені графіки прогину балки Ейлера-Бернуллі для вказаних параметрів при різних значеннях зосередженої сили $F_0 = 100, 300, 500$ Н та для моменту $M_0 = 50$ Н/м, отримані методом функцій Гріна.

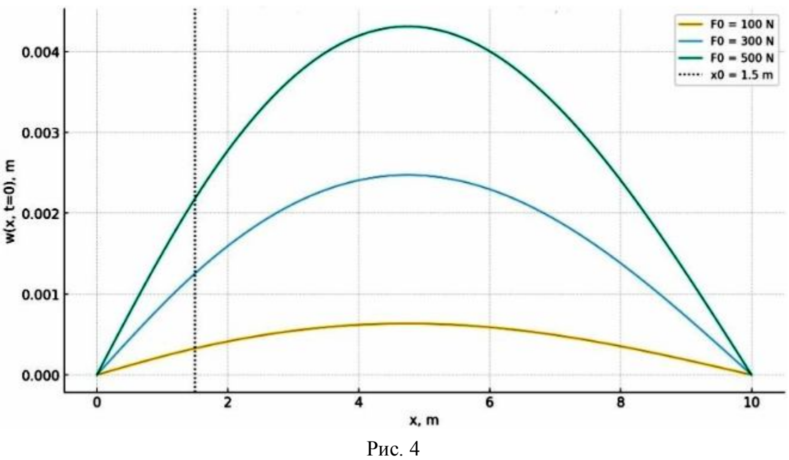

Рис. 4

Висновки. У роботі отриманий аналітичний розв’язок крайової задачі Ейлера-Бернуллі для балки, на яку одночасно діють зосереджена сила та моментне навантаження. На відміну від більшості досліджень, де ці випадки розглядаються окремо, у даній роботі враховано їх сумісний вплив. Перевага методу функцій Гріна порівняно з методами розкладу в ряди полягає у можливості отримання точного розв’язку у замкненій формі. Такий підхід є особливо важливим для розрахунку динамічних напружень і реакцій балок з різними схемами закріплення. Крім того, метод функцій Гріна не потребує окремого розв’язання задачі про вільні коливання для визначення власних значень та власних функцій, що зазвичай потрібні при використанні послідовних наближень. Отриманий аналітичний розв’язок може слугувати еталонною моделлю для перевірки чисельних методів (зокрема методу скінченних елементів), використовуватись у задачах оптимізації конструкцій, а також стати базою для подальших досліджень складніших систем із різними схемами закріплення та комбінованими навантаженнями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Oni S.T., Ayankop-Andi E.* On the response of a simply supported non-uniform Rayleigh beam subjected to traveling distributed loads. – J. Nigerian Math. Soc. – 2017. – Vol. 36. – No. 2. – P. 435–457.
2. *Pasterer C.A., Tan C.A., Bergman L.A.* A new method for calculating bending moment and shear force in moving load problems. – J. Appl. Mech. – 2001. – Vol. 68. – No. 2. –P. 252–259.
3. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads. – Noordhoff International, Groningen. – 1972.
4. *Mutman U.* Free vibration analysis of an Euler beam of variable width on the Winkler foundation using homotopy perturbation method. – Math. Probl. Eng. – 2013. – Issue 1. – P. 1–9.
5. *Kozien M.S.* Analytical Solutions of Excited Vibrations of a Beam with Application of Distribution. Acta physica polonica A. – 2013. – Vol. 123. – No. 6. – P. 1029–1033.
6. *Weaver W., Jr., Timoshenko S. P., Young D.H.* Vibration Problems in Engineering (5th ed.). – New York, NY: John Wiley & Sons., 1991. – 624 p.
7. *Thomson W.T.* Theory of Vibration with Applications, 4th Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
8. *Hamada R.* Dynamic analysis of a beam under a moving force: a double Laplace transform solution, Journal of Sound and Vibration. –Vol. 74. – 1981. – P. 221–233.
9. *Al-Khatib M.J., Grysa K., Maciąg A.* The method of solving polynomials in the beam vibration problem. – Journal of theoretical and applied mechanics, Warsaw. – Vol. 46. – 2008. – No. 2. – P. 347-366.
10. *Nicholson J.W., Bergman L.A.* Free vibration of combined dynamical systems. – American Society of Civil Engineers Journal of Engineering Mechanics. – Vol. 112. – 1986. – P. 1–13.
11. *Yavaria A., Sarkanib S.* On applications of generalized functions to the analysis of Euler–Bernoulli beam columns with jump discontinuities, International Journal of Mechanical Sciences. – Vol. 43. – Issue 6. – 2001. – P. 1543–1562.
12. *Kukla S., Zamojska I.* Application of the Green's function method in free vibration analysis of non-uniform beams. – Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science. Vol. 4. – Issue 1. – 2005. – P. 87-94.
13. *Kukla S., Posiadala B.* Green’s function approach to transverse vibrations of Euler-Bernoulli beams with attached oscillators. – Journal of Sound and Vibration. Vol. 252. –No. 1. – 2002. –P. 69–89.
14. *Mehri B., Davar A., Rahmani O.* Dynamic Green Function Solution of Beams Under a Moving Load with Different Boundary Conditions, Transaction B: Mechanical Engineering. – Vol. 16. – No. 3. – P. 273-279.
15. *Abu-Hilal M.* Forced vibration of Euler–Bernoulli beams by means of dynamic Green functions. – Journal of Sound and Vibration. – Vol. 267. – 2003. – P. 191–207.
16. *Abu-Hilal M.* Deflection of Beams by Means of Static Green Functions. – Universal Journal of Mechanical Engineering. –Vol. 4. – No. 2. – 2016. –P. 19-24.

REFERENCES

1. *Oni S.T., Ayankop-Andi E.* On the response of a simply supported non-uniform Rayleigh beam subjected to traveling distributed loads. – J. Nigerian Math. Soc. – 2017. – Vol. 36. – No. 2. – P. 435–457.
2. *Pasterer C.A., Tan C.A., Bergman L.A.* A new method for calculating bending moment and shear force in moving load problems. – J. Appl. Mech. – 2001. – Vol. 68. – No. 2. –P. 252–259.
3. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads. – Noordhoff International, Groningen. – 1972.
4. *Mutman U.* Free vibration analysis of an Euler beam of variable width on the Winkler foundation using homotopy perturbation method. – Math. Probl. Eng. – 2013. – Issue 1. – P. 1–9.
5. *Kozien M.S.* Analytical Solutions of Excited Vibrations of a Beam with Application of Distribution. Acta physica polonica A. – 2013. – Vol. 123. – No. 6. – P. 1029–1033.
6. *Weaver W., Jr., Timoshenko S. P., Young D.H.* Vibration Problems in Engineering (5th ed.). – New York, NY: John Wiley & Sons., 1991. – 624 p.
7. *Thomson W.T.* Theory of Vibration with Applications, 4th Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
8. *Hamada R.* Dynamic analysis of a beam under a moving force: a double Laplace transform solution, Journal of Sound and Vibration. –Vol. 74. – 1981. – P. 221–233.

9. *Al-Khatib M.J., Grysa K., Maciąg A.* The method of solving polynomials in the beam vibration problem. – Journal of theoretical and applied mechanics, Warsaw. – Vol. 46. – 2008. – No. 2. – P. 347-366.
10. *Nicholson J.W., Bergman L.A.* Free vibration of combined dynamical systems. – American Society of Civil Engineers Journal of Engineering Mechanics. – Vol. 112. – 1986. – P. 1–13.
11. Yavaria A., Sarkanib S. *On applications of generalized functions to the analysis of Euler–Bernoulli beam columns with jump discontinuities, International Journal of Mechanical Sciences. – Vol. 43. – Issue 6. – 2001. – P. 1543–1562.*
12. *Kukla S., Zamojska I.* Application of the Green's function method in free vibration analysis of non-uniform beams. – Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science. Vol. 4. – Issue 1. – 2005. – P. 87-94.
13. *Kukla S., Posiadala B.* Green's function approach to transverse vibrations of Euler-Bernoulli beams with attached oscillators. – Journal of Sound and Vibration. Vol. 252. –No. 1. – 2002. –P. 69–89.
14. *Mehri B., Davar A., Rahmani O.* Dynamic Green Function Solution of Beams Under a Moving Load with Different Boundary Conditions, Transaction B: Mechanical Engineering. – Vol. 16. – No. 3. – P. 273-279.
15. *Abu-Hilal M.* Forced vibration of Euler–Bernoulli beams by means of dynamic Green functions. – Journal of Sound and Vibration. – Vol. 267. – 2003. – P. 191–207.
16. *Abu-Hilal M.* Deflection of Beams by Means of Static Green Functions. – Universal Journal of Mechanical Engineering. –Vol. 4. – No. 2. – 2016. –P. 19-24.

Стаття надійшла 18.09.2025

Бондаренко Н.В, Отрашеська В.В.

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАЛКИ ЕЙЛЕРА-БЕРНУЛЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ГРІНА

Аналіз динамічної поведінки балок є фундаментальною задачею в будівельній, транспортній та машинобудівній галузях, оскільки він відіграє ключову роль у забезпеченні безпеки, надійності та довговічності інженерних конструкцій. У роботі досліджується динамічна реакція простої опертої балки Ейлера-Бернуллі, на яку одночасно діють зосереджена сила та моментне навантаження. На відміну від більшості попередніх досліджень, де ці фактори розглядалися окремо, тут враховано їх сумісний вплив. Для розв'язання задачі застосовано метод функцій Гріна, що забезпечує отримання аналітичного розв'язку у замкненій формі. Такий підхід має низку суттєвих переваг: він дозволяє уникнути додаткового визначення власних значень і власних функцій, необхідних у методі розкладу в ряди, а також є універсальним інструментом для аналізу різних типів навантажень. Оскільки функція Гріна описує реакцію балки на локалізоване збурення, то будь-яке зовнішнє навантаження, представлене у вигляді інтеграла від дельта-функцій Дірака, може бути враховане через інтегральне згорткове перетворення. Зокрема, зосереджена сила моделюється дельта-функцією Дірака, а дія зосередженого моменту описується за допомогою її першої похідної. У результаті отримано аналітичний розв'язок крайової задачі Ейлера-Бернуллі у замкненій формі, що дозволяє не лише визначити реакцію балки, але й досліджувати поведінку балки за різних параметрів навантаження. Побудовані графіки ілюструють вплив різних значень навантажень на форму і характер конструкції. Отриманий аналітичний розв'язок може слугувати еталонною моделлю для перевірки чисельних методів, використовуватись у задачах оптимізації конструкцій, а також стати базою для подальших досліджень складніших систем із різними схемами закріплення та комбінованими навантаженнями.

Ключові слова: коливання балки, рівняння Ейлера-Бернуллі, функція Гріна, аналітичний розв'яок.

Bondarenko N.V., Otrashevska V.V.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EULER-BERNOULLIE BEAM USING GREEN FUNCTIONS

Analysis of the dynamic behavior of beams is a fundamental task in the construction, transport and mechanical engineering industries, as it plays a key role in ensuring the safety, reliability and durability of engineering structures. The paper investigates the dynamic response of a simply supported Euler-Bernoulli beam, which is simultaneously subjected to a concentrated force and a moment load. Unlike most previous studies, where these factors were considered separately, their combined effect is taken into account here. To solve the problem, the Green's function method was used, which provides an analytical solution in closed form. This approach has a number of significant advantages: it allows you to avoid additional determination of eigenvalues and eigenfunctions, which are required in the series decomposition method, and is also a universal tool for analyzing various types of loads. Since the Green's function describes the response of a beam to a localized disturbance, any external load, represented as an integral of Dirac delta functions, can be taken into account through an integral convolution transformation. In particular, the concentrated force is modeled by the Dirac delta function, and the action of the concentrated moment is described by its first derivative. As a result, an analytical solution of the Euler-Bernoulli boundary value problem in a closed form is obtained, which allows not only to determine the response of the beam, but also to study the behavior of the beam under different load parameters. The constructed graphs illustrate the influence of different values of loads on the shape and nature of the structure. The obtained analytical solution can serve as a reference model for testing numerical methods, be used in structural optimization problems, and also become a basis for further research of more complex systems with different fastening schemes and combined loads.

Keywords: beam oscillations, Euler-Bernoulli equation, Green's function, analytical solution.

УДК 539.3
Бондаренко Н.В., Отрашевська В.В. **Аналітичне розв'язання крайової задачі для балки Ейлера-Бернуллі за допомогою функцій Гріна** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – Київ: КНУБА, 2025. – Вип. 115. – С. 204-212.
Досліджується динамічна реакція простої опертої балки Ейлера-Бернуллі, на яку одночасно діють зосереджені сили та моменти. За допомогою методу функцій Гріна отримано аналітичний розв'язок у замкненій формі, що дає можливість визначати реакцію балки та аналізувати особливості її динамічної поведінки. Отримані розв'язки крайової задачі Ейлера-Бернуллі, що ілюструють характер переміщень для різних значень навантажень.
Іл. 4. Бібліогр. 16 назв.

UDC 539.3
Bondarenko N.V., Otrashevska V.V. **Analytical solution of the boundary value problem for Euler-Bernoullie beam using Green functions** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2025. – Issue 115. – P. 204-212.
The dynamic response of a simply supported Euler-Bernoulli beam, on which concentrated forces and moments act simultaneously, is investigated. Using the Green's function method, an analytical solution in closed form is obtained, which makes it possible to determine the response of the beam and analyze the features of its dynamic behavior. Solutions of the Euler-Bernoulli boundary value problem are obtained, which illustrate the nature of the displacements for different values of the loads.
Fig. 4. Ref. 16.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
Адреса: 03035 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра вищої математики
Тел.: +38(044) 241-55-59
E-mail: natvbond@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-6078-9467

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики ОТРАШЕВСЬКА Валентина Володимирівна
Адреса: 03035 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра вищої математики
Тел.: +38(044) 241-55-59
E-mail: otrashevska_vv@ukr.net
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9879-1442