

УДК 539.3/6

ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПЕРЕРІЗІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КРИВОЛІНІЙНИХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНІВ

В.М. Соков,

канд. техн. наук, в.о. доцента

*Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова,
Миколаїв, просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв. 54007*

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.115.396-415

В даній роботі представлена реалізація розробленого модифікованого методу перерізів (ММП) для розрахунку плоских криволінійних стержнів, які у свою чергу апроксимовані послідовністю прямих стержнів при плоскому деформуванні в рамках лінійної теорії Бернуллі-Ейлера. Наведено залежності для перетворення встановлених внутрішніх силових та кінематичних параметрів при переході границі стиковки двох прямих стержнів з'єднаних під кутом на площині. Ефективність ММП підтверджується точним розрахунком криволінійного стержня з використанням апарату диференціальної геометрії.

Ключові слова: опір матеріалів, модифікований метод перерізів, внутрішні зусилля, криволінійний стержень.

Вступ. Класичний метод перерізів для розрахунку прямих та криволінійних стержнів є загальновідомим і вивчається навіть в навчальних закладах низької акредитації. Для звичайних прямих стержнів цей метод не становить ніяких труднощів. Проте для криволінійних стержнів в загальному випадку при застосуванні класичного методу перерізів доводиться застосовувати апарат диференціальної геометрії, що не є завжди зручним, зважаючи на те, що курс диференціальної геометрії не у всіх навчальних закладах вивчається. Більш того, не у всіх випадках вдається перейти до натуральної параметризації у явному вигляді, або цей перехід є громіздким або ускладненим. Задача ускладнюється, якщо стержнева система є кусково-апроксимованою і/або статично невизначеною. Але розрахунок криволінійних стержнів, особливо на площині часто буває затребуваним.

Ситуацію дещо виручають графоаналітичні методи типу Верещагіна, які мають свої недоліки, вимагаючи графічної побудови епюр в масштабі, що звужує їх застосування при розрахунках великих систем.

Диференціальні (або інші) залежності, які описують деформування криволінійних стержнів не мають точних рішень у загальному випадку, за винятками, коли лінія стержня задана простими залежностями типу коло, еліпс тощо. В усіх інших випадках необхідно застосовувати чисельні методи.

Виникає проблема розробки і застосування саме аналітичного методу розрахунку криволінійних або кусково-апроксимованих стержнів на площині на основі методу перерізів, який би міг забезпечити простоту і достатню точність розрахунку статично визначених і невизначених систем, а також відносно легку реалізацію на ЕОМ.

Огляд літератури. В статті [1] був запропонований модифікований метод перерізів (ММП) для визначення внутрішніх зусиль і кінематичних параметрів для прямих стержнів. Цей метод подібний до методу граничних параметрів [2], де встановлюються граничні параметри, від яких залежать закони внутрішніх зусиль. Проте згаданий метод в [2] залишає питання у визначенні вказаних граничних параметрів і не є розвиненим для практичного використання. Суть ММП представленого в [1] полягає в тому, що розглядається рівновага кожної з ізольованих ділянок, які виділені по границям поділу. Це дозволяє зменшити трудомісткість розрахунків для великої кількості ділянок в порівнянні з класичним методом перерізів.

Подальший огляд зроблений з метою виявлення можливих нових ідей і тенденцій в розрахунках криволінійних стержнів.

Аналіз багатьох видань з опору та механіки матеріалів та будівельної механіки різних років і навіть таких останніх і поважних, як [3-8], показав відсутність нових модифікацій та розробок для методу перерізів, окрім можливо [1, 2], не приймаючи до уваги графоаналітичні методи. Як

і раніше, стержень поділяється на дві частини і розглядається рівновага однієї з розділених частин для встановлення законів внутрішніх зусиль. Також, не дивлячись на розвиток теорій криволінійних стержнів, в сучасних підручниках з опору та механіки матеріалів [3, 6, 7, 8] представлені класичні теорії тонкостінних стержнів. Це викликано тим, що хоча нові теорії криволінійних тонкостінних стержнів і забезпечують вищу точність розрахунків, проте є складними для практичного використання.

У статті [9] представлено параметричне дослідження впливу кількох геометричних параметрів на поведінку напружень та деформацій неоднорідної криволінійної балки з рухомою границею, де розроблено ітеративний варіаційний метод заснований на оновленні геометрії на кожному кроці. Сама ідея варіаційного методу, запропонованого в [9] є перспективною, але в даному випадку не загальною, щоб її можна було застосувати для всіх криволінійних навіть ізотропних балок при будь-яких граничних умовах. Трудомісткість [9] для інженерних розрахунків необхідно досліджувати.

Одним з підходів в розрахунках криволінійних стержнів є застосування чисельних методів, найчастіше методу скінчених елементів (МСЕ), коли криволінійний стержень замінюється сукупністю прямих стержнів, або рідше, коли розробляються спеціалізовані скінченні криволінійні елементи, як це зроблено, наприклад, в [10]. Статей по МСЕ для криволінійних стержнів, подібних до [10] багато. Всі вони вирізняються різноманітністю підходів і складністю для практичної реалізації. Вищевказані способи застосування МСЕ є складними і потребують багато часу для ручного розрахунку або наявності готових програм, які коштують грошей або є обмеженими в безкоштовному вигляді. Для подолання вищевказаної проблеми розробляють різні вузькоспеціалізовані чисельні методи/напрями розрахунку криволінійних стержнів регулярної форми, для яких легко отримати залежності для компонентів деформування, як це зроблено, наприклад, в статті [11] для криволінійних балок поліноміальної форми. Зокрема в оригінальній статті [12] представлена одновимірна механічна модель для аналізу статичних та динамічних властивостей неоднорідних криволінійних балок та замкнутих кілець симетричного поперечного перерізу, де введені оригінальні внутрішні силові фактори та кінематичні параметри, отримані зі звичайних. Форма поля переміщень відповідає теорії Бернуллі-Ейлера. Трудомісткість практичної реалізації [12] залишається невизначеною через унікальність методу. В статті [13] вивчається асимптотична поведінка конструкцій виконаних з криволінійних стержнів, де в результаті використання оригінальних підходів отримано закон рівноваги вузлів для конструкції виконаної з криволінійних стержнів. А тому трудомісткість практичної реалізації є невизначеною. В статті [14] отримано набір рівнянь для розрахунку внутрішніх зусиль в будь-якій точці криволінійної балки, яка складається з двох прямих відрізків та однієї кільцевої арки під дією вертикального зовнішнього навантаження. В [14] розроблений також спрощений метод розрахунку вказаної конструкції шляхом трансформації апроксимованого сегменту в еквівалентну модель прямої балки, де показана прийнятність результатів для такого підходу.

Вказаний спрощений метод в [14] наштовхнув на думку, що будь-яку складну криву можна апроксимувати послідовністю прямих стержнів, до кожного з яких можна застосувати модифікований метод перерізів [1]. Залишилося тільки розробити залежності для перетворення внутрішніх силових та кінематичних параметрів при переході границі між двома прямими стержнями і оцінити точність вказаної заміни криволінійної балки послідовністю прямих стержнів. Для початку ці залежності будуть розроблені для деформування на площині.

Мета роботи. На основі ММП розробити метод розрахунку плоских криволінійних стержнів апроксимованих послідовністю прямолінійних стержнів для можливості розрахунків з умов міцності і жорсткості.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі.

- 1) Представити коротко модифікований метод перерізів [1] для прямого стержня для того, щоб нагадати основні його етапи і показати напрямок розвитку.
- 2) Вивести залежності для перетворення силових внутрішніх факторів при переході границі стиковки двох прямих стержнів з'єднаних під кутом на площині.
- 3) Вивести залежності для перетворення кінематичних параметрів при переході границі стиковки двох прямих стержнів з'єднаних під кутом на площині.

4) Представити приклад розрахунку статично визначеного криволінійного стержня у вигляді дуги четверті кола за залежностями диференціальної геометрії та розрахунок ламаного стержня, який апроксимує вказану дугу за модифікованим методом перерізів і порівняти результати між собою.

1. Модифікований метод перерізів для прямого стержня

Основні етапи модифікованого методу перерізів для прямих стержнів будуть пояснені на прикладі розрахунку поперечного згину статично визначеної балки, яка представлена на рис. 1.

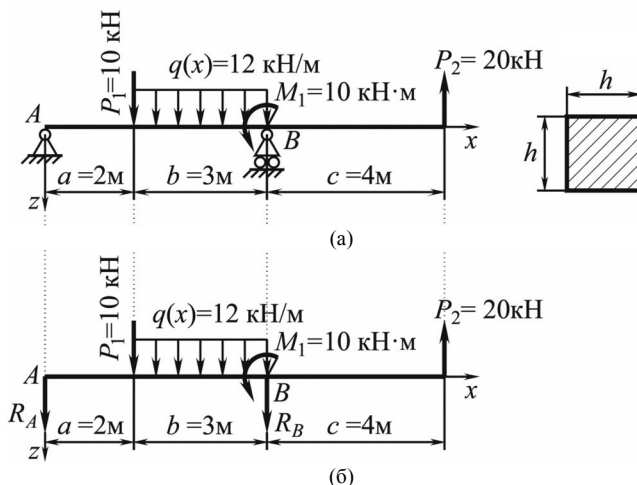


Рис. 1. Пряма статично визначена балка: (а) – початкова схема; (б) – статично еквівалентна схема

В табл. 1 представлені розрахункові схеми та закони зрізуючих сил $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$ внутрішніх сил пружності, які записані в локальних координатах, де відлік координати x для кожної ділянки починається з її лівого торця. Згідно модифікованого методу перерізів всі розподілені закони (зовнішнього навантаження, температурного поля тощо) повинні бути визначені в локальній системі координат для кожної з ділянок. А тому розподілене навантаження $q_{II}(x)$ в табл. 1 буде визначене формулою

$$q_{II}(x) = q(x + a). \quad (1)$$

З рівнянь статки отримуємо: $R_A = -34,8$ кН; $R_B = 8,8$ кН.

З табл. 1 можна зрозуміти суть модифікованого методу. Для 1-ї ділянки немає відмінності між класичним та модифікованим методами перерізів. Проте починаючи з 2-ї ділянки і далі можна побачити, що розглядається рівновага ізольованої ділянки при відкиданні всіх попередніх та наступних ділянок. При чому дія відкинутих ділянок на розглядувану (ділянку) замінюється внутрішніми зусиллями згідно визначених правил знаків (див. схеми табл. 1). В цьому є перевага модифікованого методу перерізів, коли маємо справу з великою кількістю ділянок, тому що не треба складати рівняння рівноваги для всіх силових факторів з початку стержня кожного разу для кожного нового перерізу, як це робиться у класичному методі. В модифікованому методі перерізів всі розподілені закони внутрішніх сил отримуються в локальних координатах. Використовуючи формули при паралельному зсуві координатних осей можна отримати закони в глобальній координатній системі і навпаки. Всі інтеграли у модифікованому методі перерізів беруться від нуля до верхньої змінної межі x . А складова для згинального моменту M_{qi} від будь-якого складного поперечного розподіленого навантаження $q_i(x)$ визначається простою формулою

$$M_{qi} = x \cdot \int_0^x q_i(s) ds - \int_0^x s \cdot q_i(s) ds, \quad (2)$$

де i – номер ділянки.

Повний опис методу наведено в [1].

Використовуючи закони внутрішніх зусиль з табл. 1 можна визначити і кінематичні параметри деформування. В табл. 2 записані відповідні закони кінематичних параметрів, такі,

як кути повороту $\theta_i(x)$ та прогини $w_i(x)$ для кожної i -ї ділянки в локальних координатних системах, де θ_0 та w_0 – невідомі параметри, які залежать від умов закріплення балки. В табл. 2: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па – модуль пружності при розтяганні для сталі; $I = h^4/12$ – головний центральний момент інерції поперечного квадратного перерізу стержня (рис. 1).

Невідомі параметри θ_0 та w_0 знайдуться з наступних кінематичних умов

$$\left. \begin{aligned} w_I(0) &= 0; \\ w_{II}(b) &= 0 \quad \text{або} \quad w_{III}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

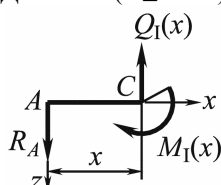
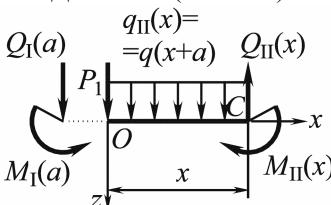
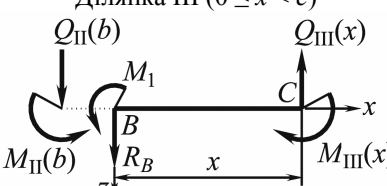
Вирішуючи систему (3) знаходимо, що

$$\theta_0 = \frac{127,9}{EI}; \quad w_0 = 0. \quad (4)$$

На рис. 2 представлені епюри обраних характерних елементів згину, визначені згідно законів табл. 1 і табл. 2.

Таблиця 1

Розрахунок внутрішніх силових факторів за модифікованим методом перерізів

№	Розрахункова схема	Закони внутрішніх зусиль
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$) 	$\Sigma \text{Сил}_z = 0: R_A - Q_I(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_I(x) = -34.8 \text{ кН.}$ $\Sigma \text{Мом}_C = 0: R_A x - M_I(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_I(x) = -34.8x \text{ кН} \cdot \text{м.}$
2	Ділянка II ($0 \leq x < b$) 	$\Sigma \text{Сил}_z = 0: Q_I(a) + P_1 + \int_0^x q_{II}(s) ds - Q_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{II}(x) = 12x - 24.8 \text{ кН.}$ $\Sigma \text{Мом}_C = 0: M_I(a) + Q_I(a)x + P_1 x +$ $+ \left(x \int_0^x q_{II}(s) ds - \int_0^x s \cdot q_{II}(s) ds \right) - M_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{II}(x) = -24.8x + 6x^2 - 69.6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$
3	Ділянка III ($0 \leq x < c$) 	$\Sigma \text{Сил}_z = 0: Q_{II}(b) + R_B - Q_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{III}(x) = 20 \text{ кН.}$ $\Sigma \text{Мом}_C = 0: M_{II}(b) + Q_{II}(b)x +$ $+ M_1 + R_B x - M_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{III}(x) = 20x - 80 \text{ кН} \cdot \text{м.}$

Як бачимо, значення відповідного внутрішнього зусилля або кінематичного параметру на кінці попередньої ділянки дорівнює за модулем значенню відповідного внутрішнього зусилля або кінематичного параметру на початку наступної ділянки (див. схеми табл. 1). Розрахунки за ММП виконуються за ланцюгом від одного з обраних кінців до іншого.

Проте, якщо б ділянки були поєднані/розташовані під деяким кутом одне до одного, то вказана рівність була б порушена, тому що, наприклад, зрізуюча сила або прогин на кінці попередньої ділянки вже не були б перпендикулярними до осі наступної ділянки.

А тому необхідно провести проектування необхідних внутрішніх зусиль та кінематичних параметрів, які визначені на кінці попередньої ділянки на місцеві координатні осі наступної ділянки. Надалі прямолінійні ділянки на площині, які розташовані під кутом одна до одної йменуватимемо стержнями.

Таблиця 2

Закони кінематичних параметрів

№	Розрахункова схема	Закони внутрішніх зусиль
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$)	$\theta_I(x) = \theta_0 + \int_0^x \frac{M_I(x)}{EI} dx = \theta_0 - \frac{17,4 \cdot 10^3 x^2}{EI};$ $w_I(x) = w_0 + \int_0^x \theta_I(x) dx = w_0 + \theta_0 x - \frac{5,8 \cdot 10^3 x^3}{EI}.$
2	Ділянка II ($0 \leq x < b$)	$\theta_{II}(x) = \theta_I(a) + \int_0^x \frac{M_{II}(x)}{EI} dx = \theta_0 - \frac{69,6}{EI} - \frac{0,4x(31x - 5x^2 + 174)}{EI};$ $w_{II}(x) = w_I(a) + \int_0^x \theta_{II}(x) dx = w_0 + \theta_0(x+2) - \frac{46,4}{EI} -$ $- \frac{0,0333(2088x + 1044x^2 + 124x^3 - 15x^4)}{EI}.$
3	Ділянка III ($0 \leq x < c$)	$\theta_{III}(x) = \theta_{II}(b) + \int_0^x \frac{M_{III}(s)}{EI} ds = \theta_0 - \frac{69,6}{EI} - \frac{266,4}{EI} + \frac{10x(x-8)}{EI};$ $w_{III}(x) = w_{II}(b) + \int_0^x \theta_{III}(s) ds = w_0 + \theta_0(x+5) - \frac{46,4}{EI} - \frac{593,1}{EI}$ $- \frac{0,333(1008x + 120x^2 - 10x^3)}{EI}.$

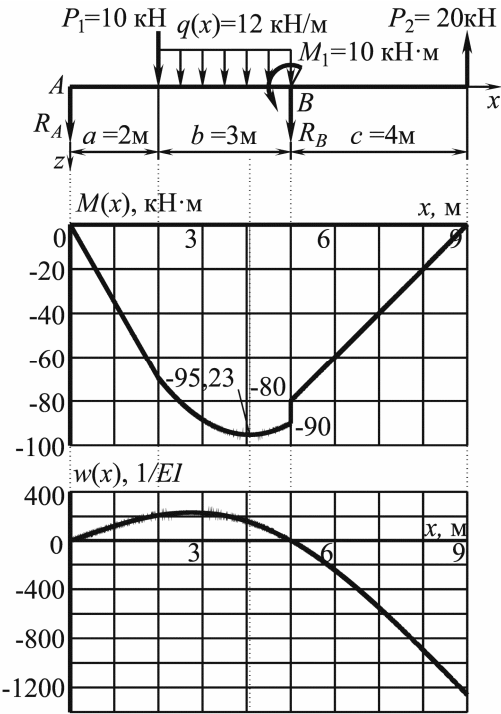


Рис. 2. Епюри елементів згину

2. Виведення залежностей для перетворення силових внутрішніх факторів на границі стиковки двох прямих стержнів з'єднаних під кутом на площині

Згідно мети роботи плоский криволінійний стержень a замінюємо/апроксимуємо послідовністю з'єднаних прямолінійних стержнів b , як це показано на рис. 3, де x_1y_1A , x_2y_2B , x_3y_3C – місцеві/локальні системи координат відповідно стержнів 1, 2, 3, коли система прямолінійних стержнів b розраховується за ланцюгом від 1-го стержня до 3-го. Місцеві координатні системи x_1y_1A , x_2y_2B , x_3y_3C лежать у площині xOy . Всі координатні системи на рис. 3 праві, вісь (осі) z направлена на нас і не показана. Кожен прямолінійний стержень розраховується у своїй місцевій системі координат.

З метою виявлення внутрішніх факторів, які підлягають перетворенню при переході границі від одного прямого стержня до іншого, розглянемо взаємодію 1-го та 2-го стержнів на їх границі в точці B у тривимірному просторі (рис. 4).

На рис. 4 векторами з однією стрілочкою показані зосереджені сили, а з двома – зосереджені моменти, а проєкції на рис. 4 (б) зображені однакової довжини зі збереженням дійсних напрямів відносно місцевих осей. В подальшому вектора позначатимемо жирним шрифтом, а значок вектора в позначеннях використовуватимемо, коли необхідно буде підкреслити саме операції над векторами. В решті випадків значок вектора не застосовуватиметься.

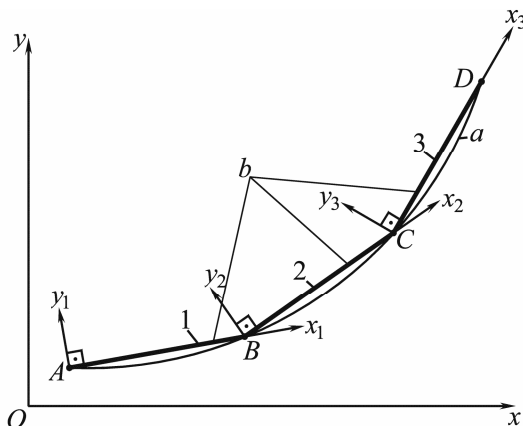


Рис. 3. Апроксимація криволінійного стержня a на площині системою послідовно з'єднаних прямолінійних стержнів b

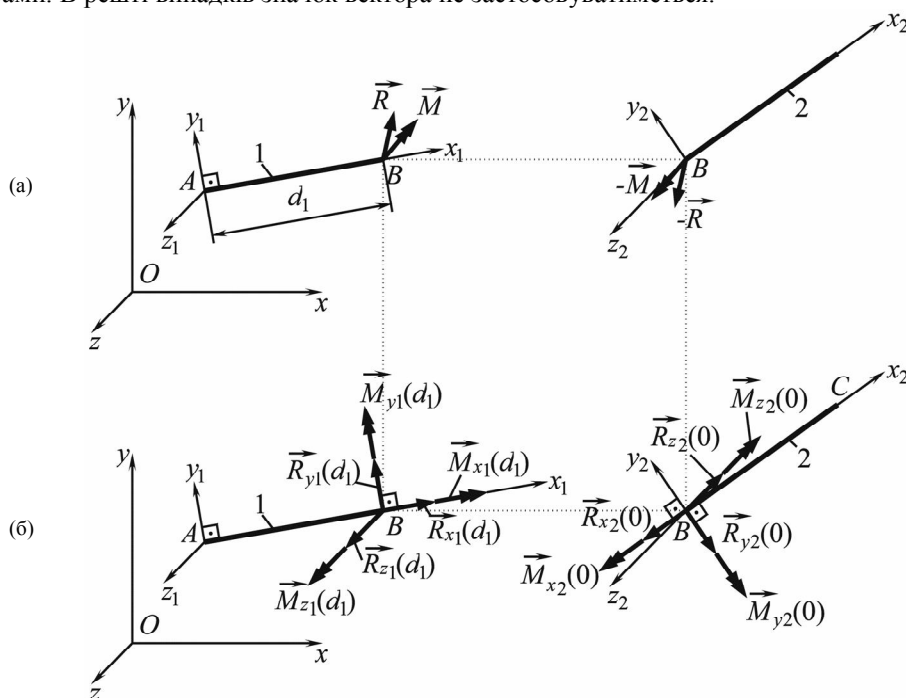


Рис. 4. Внутрішні силові фактори на границі 1-го та 2-го стержнів в точці B : (а) – головний вектор R та головний момент M внутрішніх сил; (б) – проєкції головних вектора та моменту внутрішніх сил на координатні осі

Головні вектори R та головні моменти M внутрішніх зусиль взаємодії 1-го та 2-го стержнів у точці B у тривимірному просторі протилежні, згідно 3-го закону Ньютона (рис. 4, (а)). Вказані головні вектори та моменти проєктуються на місцеві координатні осі кожного зі стержнів в

точці B . Так що точка B на 1-му та 2-му стержнях містить по шість складових внутрішніх зусиль спроектованих на координатні осі: по три зосереджені сили та моменти (рис. 4, (б)), де R_{xi} , R_{yi} , R_{zi} – проекції головного вектора R , а M_{xi} , M_{yi} , M_{zi} – проекції головного моменту M на місцеві осі x_i , y_i , z_i i -го прямолінійного стержня. Наприклад, позначення $R_{z1}(d_1)$ означає проекцію головного вектора R на вісь z_1 стержня 1 при $x_1 = d_1$.

Хоча головні вектори R та головні моменти M внутрішніх зусиль в точці B за модулем однакові, але їх проекції на місцеві координатні осі стержнів 1 та 2 в точці B будуть різні, тому що стержні 1 та 2 розташовані під певним кутом один до одного на площині.

Справедливі наступні залежності для векторів

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{R}_{x1}(d_1) + \bar{R}_{y1}(d_1) + \bar{R}_{z1}(d_1); & -\bar{R} &= \bar{R}_{x2}(0) + \bar{R}_{y2}(0) + \bar{R}_{z2}(0); \\ \bar{M} &= \bar{M}_{x1}(d_1) + \bar{M}_{y1}(d_1) + \bar{M}_{z1}(d_1); & -\bar{M} &= \bar{M}_{x2}(0) + \bar{M}_{y2}(0) + \bar{M}_{z2}(0), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де позначення зрозумілі з рис. 4, (б).

Всі місцеві осі z_i кожного i -го прямого стержня колінеарні і співнаправлені з віссю z глобальної координатної системи $xуzO$. А тому проекції внутрішніх сил на вісь z не зазнаватимуть змін модулів при переході границі від одного прямого стержня до іншого. Тому що ці проекції завжди перпендикулярні до площини xOy і не залежать від кутів між прямими стержнями на границях переходів. На основі вищесказаного можна підсумувати, що вектори $R_{z1}(d_1)$ та $R_{z2}(0)$ протилежні. Те ж саме вектори $M_{z1}(d_1)$, $M_{z2}(0)$. Тому справедливі рівності

$$\bar{R}_{z1}(d_1) = -\bar{R}_{z2}(0); \quad \bar{M}_{z1}(d_1) = -\bar{M}_{z2}(0). \quad (6)$$

Враховуючи (6) і (5) отримаємо, що

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{x1}(d_1) + \bar{R}_{y1}(d_1) &= -(\bar{R}_{x2}(0) + \bar{R}_{y2}(0)); \\ \bar{M}_{x1}(d_1) + \bar{M}_{y1}(d_1) &= -(\bar{M}_{x2}(0) + \bar{M}_{y2}(0)) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Тому можна зробити висновок, що внутрішні фактори R_{xi} , R_{yi} , M_{xi} , M_{yi} зазнають перетворень при переході границі від одного прямолінійного стержня до іншого і залежать від кута між стержнями на границі переходу. А внутрішні фактори R_{zi} та M_{zi} зовсім не залежать від особливостей просторового розташування прямих стержнів на площині. Внутрішні силові фактори M_{xi} , M_{yi} для криволінійного стержня викликають тривимірне деформування, або ж депланцію стержня, тобто матимемо переміщення вздовж осі z (та осей z_i). Так як ми розглядаємо двовимірне деформування на площині, то фактори M_{xi} , M_{yi} до уваги не прийматимемо і вважатимемо, що зовнішні сили, які викликають появу внутрішніх силових факторів M_{xi} , M_{yi} – відсутні.

Таким чином для плоскої стержневої системи, складеної з послідовної сукупності прямих

стержнів, при переході границі від одного стержня до іншого, перетворень зазнають лише внутрішні силові фактори R_{xi} , R_{yi} , і ці перетворення здійснюються за першими рівняннями (7).

На рис. 5 показані внутрішні фактори взаємодії прямих стержнів 1 та 2 на границі їх з'єднання в точці B , де внутрішнім факторам R_{xi} , R_{yi} (рис. 3) відповідають внутрішні силові фактори, такі як осьові сили N та зрізуючі Q сили, зображені згідно додатних напрямів правила знаків опору матеріалів. Прямолінійні стержні на рис. 5 мають додатні кути нахилу до глобальних осей $xуO$. Кут α між 1-м

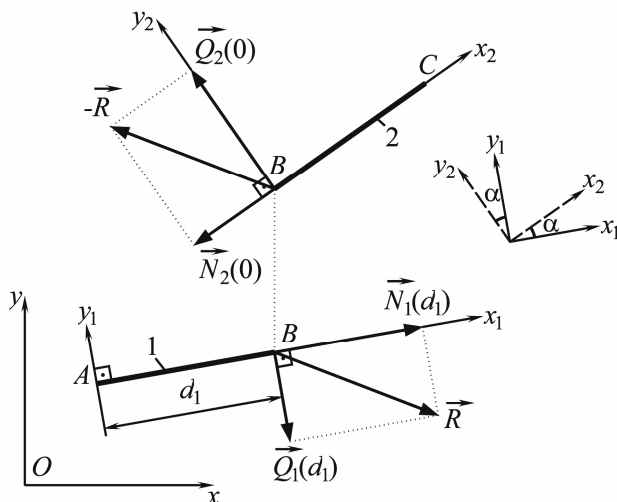


Рис. 5. Внутрішні фактори взаємодії стержнів 1 та 2 на площині

та 2-м стержнями визначається як кут між відповідними місцевими осями x_1y_1A та x_2y_2B цих стержнів (рис. 5).

Вважаємо, що система стержнів b розраховується послідовно від 1-го до 3-го стержня (рис. 3). Кожен прямолінійний стержень розраховується у своїй місцевій системі координат. Вважаємо, що на кінці 1-го стержня в точці B відомі значення його внутрішніх зусиль $N_1(d_1)$ та $Q_1(d_1)$. Виникає задача представити внутрішні зусилля $N_2(0)$ та $Q_2(0)$ на початку 2-го стержня в точці B , які будуть виражені через відомі зусилля $N_1(d_1)$ та $Q_1(d_1)$ (рис. 5).

Кут α відомий і може бути виражений через напрямні косинуси стержнів 1 та 2. Справедливі наступні залежності для векторів:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{N}_1(d_1) + \bar{Q}_1(d_1); \\ -\bar{R} &= \bar{N}_2(0) + \bar{Q}_2(0); \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{N}_1(d_1) + \bar{Q}_1(d_1) = -(\bar{N}_2(0) + \bar{Q}_2(0)). \quad (8)$$

На основі (8) можна заключити, що вектор $-\bar{R}$ є сумою відомих векторів $N_1(d_1)$ та $Q_1(d_1)$, взятих з протилежними знаками. Тобто на основі (8) отримаємо:

$$-\bar{R} = -(\bar{N}_1(d_1) + \bar{Q}_1(d_1)) = -\bar{N}_1(d_1) - \bar{Q}_1(d_1). \quad (9)$$

Для подальших пояснень використаємо рис. 6.

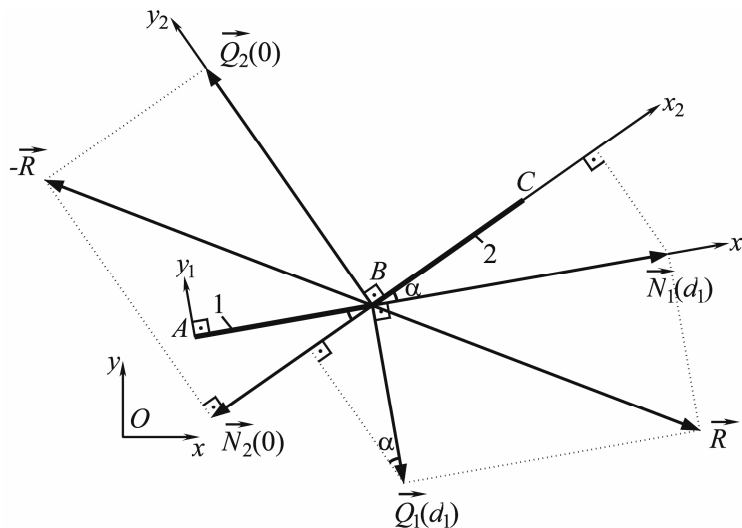


Рис. 6. Проекції внутрішніх факторів на границі стержнів 1 та 2

Вектор $N_2(0)$ – це проекція вектора $-\bar{R}$ на вісь x_2 . Значення осьової сили $N_2(0)$ внутрішніх сил зі своїм знаком знайдеться наступним чином (рис. 6)

$$\begin{aligned} -N_2(0) &= \text{пр}_{x_2}(-\bar{R}) = \text{пр}_{x_2}(-\bar{N}_1(d_1) - \bar{Q}_1(d_1)) = -\text{пр}_{x_2}(\bar{N}_1(d_1) + \bar{Q}_1(d_1)) = \\ &= -[\text{пр}_{x_2} \bar{N}_1(d_1) + \text{пр}_{x_2} \bar{Q}_1(d_1)] = -[N_1(d_1) \cdot \cos \alpha - Q_1(d_1) \cdot \sin \alpha] \Rightarrow \\ N_2(0) &= N_1(d_1) \cdot \cos \alpha - Q_1(d_1) \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

де значення внутрішніх зусиль $Q_1(d_1)$, $N_1(d_1)$ беруться зі своїм знаком, отриманим в результаті розрахунку.

Вектор $Q_2(0)$ – це проекція вектора $-\bar{R}$ на вісь y_2 . Значення зрізуючої сили $Q_2(0)$ внутрішніх сил зі своїм знаком знайдеться наступним чином (рис. 6)

$$\begin{aligned} Q_2(0) &= \text{пр}_{y_2}(-\bar{R}) = \text{пр}_{y_2}(-\bar{N}_1(d_1) - \bar{Q}_1(d_1)) = -\text{пр}_{y_2}(\bar{N}_1(d_1) + \bar{Q}_1(d_1)) = \\ &= -[\text{пр}_{y_2} \bar{N}_1(d_1) + \text{пр}_{y_2} \bar{Q}_1(d_1)] = -[-N_1(d_1) \cdot \sin \alpha - Q_1(d_1) \cdot \cos \alpha] \Rightarrow \\ Q_2(0) &= N_1(d_1) \cdot \sin \alpha + Q_1(d_1) \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

де значення внутрішніх зусиль $Q_1(d_1)$, $N_1(d_1)$ беруться зі своїм знаком, отриманим в результаті розрахунку.

На основі формул (10), (11) та 2-го рівняння (6) запишемо загальні залежності

$$\left. \begin{aligned} N_i(0) &= N_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \cos \alpha_{i-1,i} - Q_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \sin \alpha_{i-1,i} \\ Q_i(0) &= N_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \sin \alpha_{i-1,i} + Q_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \cos \alpha_{i-1,i} \\ M_i(0) &= M_{i-1}(d_{i-1}) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

де i -номер/індекс розглядуваного стержня; $i-1$ – номер попереднього стержня; d_{i-1} – довжина попереднього стержня; $\alpha_{i-1,i}$ – кут між $i-1$ -м та i -м стержнями, взятий зі своїм знаком і виміряний за найкоротшим поворотом від $i-1$ -го до i -го стержня.

Рівняння (10), (11), (12) також можна отримати з рівнянь рівноваги за силами та моментами для плоскої стержневої системи.

3. Виведення залежностей для перетворення кінематичних параметрів на границі стиковки двох прямих стержнів під кутом на площині

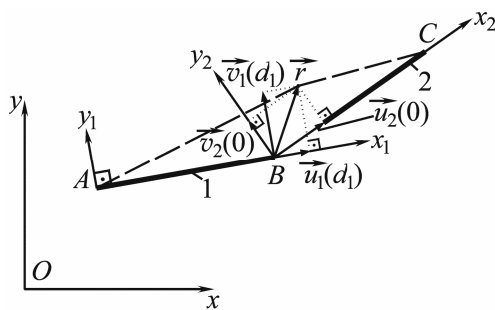


Рис. 7. Сумісні переміщення для стержнів 1 та 2 в точці B

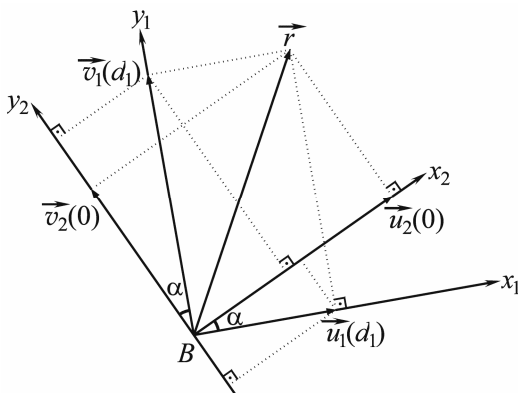


Рис. 8. Проекції переміщень для стержнів 1 та 2 в точці B

Справедливі наступні залежності:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{u}_1(d_1) + \vec{v}_1(d_1); \\ \vec{r} &= \vec{u}_2(0) + \vec{v}_2(0); \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1(d_1) + \vec{v}_1(d_1) = \vec{u}_2(0) + \vec{v}_2(0). \quad (13)$$

Вектор $\vec{u}_2(0)$ – це проекція вектора $\vec{r}$ на вісь x_2 . Значення осьового переміщення $u_2(0)$ зі своїм знаком знайдеться наступним чином (рис. 8)

$$\left. \begin{aligned} u_2(0) &= \text{пр}_{x_2} \vec{r} = \text{пр}_{x_2} (\vec{u}_1(d_1) + \vec{v}_1(d_1)) = \text{пр}_{x_2} \vec{u}_1(d_1) + \text{пр}_{x_2} \vec{v}_1(d_1) \\ &= u_1(d_1) \cdot \cos \alpha + v_1(d_1) \cdot \sin \alpha \Rightarrow u_2(0) = u_1(d_1) \cdot \cos \alpha + v_1(d_1) \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

де значення переміщень $u_1(d_1)$, $v_1(d_1)$ беруться зі своїм знаком, отриманим в результаті розрахунку.

На рис. 7 показані сумісні переміщення прямих стержнів 1 та 2 на границі їх з'єднання в точці B, які зображені згідно додатних напрямів правила знаків опору матеріалів, де пунктиром показано положення стержнів 1 та 2 після деформації. Переміщення $\vec{u}_i$, $\vec{v}_i$ – направлені відповідно вздовж і поперек i -го стержня, а $\vec{r}$ – це вектор повного переміщення в точці B.

Вказані переміщення в точці B для стержнів 1 та 2 є сумісними, тобто однаковими. Переміщення в точці B на рис. 7 показані перебільшеними для кращого розуміння. Насправді вказані переміщення малі по відношенню до розмірів стержнів і тому в силу геометричної лінійності або відносної жорсткості вважається, що кут між прямими стержнями 1 та 2 після деформації не змінюється.

Задача полягає в тому, щоб розробити залежності для визначення переміщень $\vec{u}_2(0)$ і $\vec{v}_2(0)$ в точці B, визначених в місцевій системі координат $x_2 y_2 B$ стержня 2 за відомими переміщеннями $\vec{u}_1(d_1)$ і $\vec{v}_1(d_1)$ в точці B, визначених в місцевій системі координат $x_1 y_1 A$ стержня 1.

Для подальших пояснень використаємо рис. 8.

Вектор $v_2(0)$ – це проекція вектора $\vec{r}$ на вісь вісь y_2 . Значення поперечного переміщення $v_2(0)$ зі своїм знаком знайдеться наступним чином (рис. 8)

$$\begin{aligned} v_2(0) &= \text{пр}_{y_2} \vec{r} = \text{пр}_{y_2} (\vec{u}_1(d_1) + \vec{v}_1(d_1)) = \text{пр}_{y_2} \vec{u}_1(d_1) + \text{пр}_{y_2} \vec{v}_1(d_1) = \left. \begin{aligned} &= -u_1(d_1) \cdot \sin \alpha + v_1(d_1) \cdot \cos \alpha \Rightarrow v_2(0) = v_1(d_1) \cdot \cos \alpha - u_1(d_1) \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

де значення переміщень $u_1(d_1)$, $v_1(d_1)$ беруться зі своїм знаком, отриманим в результаті розрахунку.

На основі формул (14), (15) запишемо загальні залежності

$$\left. \begin{aligned} u_i(0) &= v_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \sin \alpha_{i-1,i} + u_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \cos \alpha_{i-1,i}, \\ v_i(0) &= v_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \cos \alpha_{i-1,i} - u_{i-1}(d_{i-1}) \cdot \sin \alpha_{i-1,i}, \\ \theta_i(0) &= \theta_{i-1}(d_{i-1}), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

де θ – кут повороту, рад, поперечного перерізу прямого стержня, викликаний деформацією, наприклад згином, і який не зазнає перетворень при переході границі між двома прямими стержнями.

4) Приклад розрахунку. В рамках цього розділу буде виконано розрахунок статично визначеного криволінійного стержня у вигляді дуги четверті кола за залежностями диференціальної геометрії та розрахунок ламаного стержня, який апроксимує вказану дугу за ММП, а результати будуть порівняні між собою. Обчислення виконувалися тримаючи в числах 15-16 знаків після коми, але показано лише 3-4.

Розрахунок ламаного стержня за ММП. Мається криволінійний стержень у вигляді четверті кола, рівномірно апроксимований послідовністю прямолінійних стержнів/ділянок, як це показано на рис. 9. Поперечний переріз квадратний, тобто симетричний у площині згину, а матеріал стержня ізотропний однорідний, що дозволить уникнути деплації (warping) стержня із площини при плоскому деформуванні. Для даного криволінійного стержня можна отримати точне аналітичне рішення, яке пізніше буде використано для аналізу і порівняння результатів.

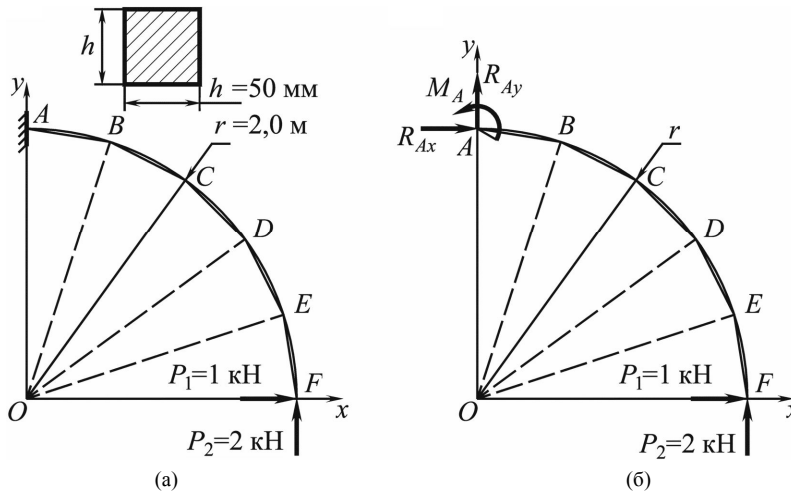


Рис. 9. Статично визначений криволінійний стержень апроксимований послідовністю прямих стержнів

В табл. 3 і 4 представлені параметри точок і стержнів системи на рис. 9.

З рівнянь статки маємо:

$$R_{Ax} = -1 \text{ кН}; \quad R_{Ay} = -2 \text{ кН}; \quad M_A = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (17)$$

Перед початком розрахунку спроектуємо сили R_{Ax} , R_{Ay} , P_1 , P_2 на місцеві осі прямих стержнів (рис. 10), де P_{Ax} , P_{Ay} – проекції рівнодіючої сил R_{Ax} , R_{Ay} на координатні осі x_1 та y_1 стержня 1, а F_x , F_y – проекції рівнодіючої сил P_1 , P_2 на осі x_5 та y_5 стержня 5.

Таблиця 3

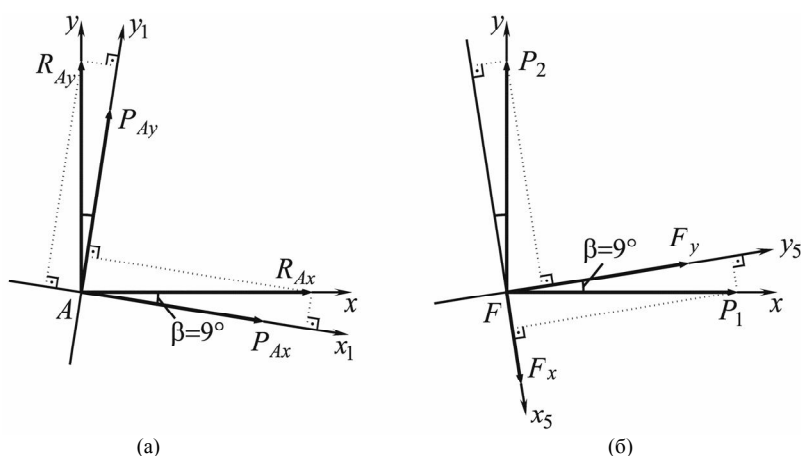
Параметри точок

№	Точки	Кути відносно точки O		Координати точок, м	
		$\beta, ^\circ$	$\beta, \text{рад}$	x	y
1	A	90	1.571	0.000	2.000
2	B	72	1.257	0.618	1.902
3	C	54	0.942	1.176	1.618
4	D	36	0.628	1.618	1.176
5	E	18	0.314	1.902	0.618
6	F	0	0.000	2.000	0.000

Таблиця 4

Параметри стержнів

№ стержня	Проекції, м		Довжина, м	Напрямні косинуси		Кут між стержнями	
	a_x	a_y		l	m	$\alpha_{i-1,j}, \text{рад}$	$\alpha_{i-1,j}, ^\circ$
1	0.618	-0.098	0.626	0.988	-0.156	—	—
2	0.558	-0.284	0.626	0.891	-0.454	-0.314	-18
3	0.442	-0.442	0.626	0.707	-0.707	-0.314	-18
4	0.284	-0.558	0.626	0.454	-0.891	-0.314	-18
5	0.098	-0.618	0.626	0.156	-0.988	-0.314	-18

Рис. 10. Проекції зовнішніх сил на місцеві координатні осі: a – проекції сил R_{Ax} , R_{Ay} на осі x_1 та y_1 стержня 1; b – проекції сил P_1 , P_2 на осі x_5 та y_5 стержня 5

Значення сил P_{Ax} , P_{Ay} , F_x , F_y , які обчислюються за формулами

$$\left. \begin{aligned} P_{Ax} &= R_{Ax} \cdot \cos \beta - R_{Ay} \cdot \sin \beta, \\ P_{Ay} &= R_{Ay} \cdot \cos \beta + R_{Ax} \cdot \sin \beta, \\ F_x &= P_1 \cdot \sin \beta - P_2 \cdot \cos \beta, \\ F_y &= P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \sin \beta, \\ \beta &= 9^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

становлять:

$$P_{Ax} = -0,675 \text{ кН}; \quad P_{Ay} = -2,132 \text{ кН}; \quad F_x = -1,819 \text{ кН}; \quad F_y = 1,301 \text{ кН}, \quad (19)$$

які будуть використані для перевірки епюр.

В табл. 5 представлений розрахунок прямих стержнів/ділянок згідно ММП. Вважається, що переміщення викликані лише деформаціями розтягу-стиску та поперечним згином. Зсув та вплив осьових зусиль на згин до уваги не приймаються. Значення $N_i(0)$, $Q_i(0)$, $M_i(0)$, де $i = 2, 3, 4, 5$, обчислювалися за формулами (12).

Таблиця 5

Розрахунок внутрішніх силових факторів за ММП

№	Розрахункова схема	Закони внутрішніх зусиль в місцевих координатах
1	Ділянка 1 ($0 \leq x < d_1$)	$\Sigma Cил_{x1} = 0 : P_{Ax} + N_1(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) = 0,675 \text{ кН.}$ $\Sigma Cил_{y1} = 0 : P_{Ay} - Q_1(x) = 0 \Rightarrow Q_1(x) = -2,132 \text{ кН}$ $\Sigma Mom_G = 0 : M_A - P_{Ay} \cdot x + M_1(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_1(x) = 6 - 2,132x, \text{ кН} \cdot \text{м.}$
2	Ділянка 2 ($0 \leq x < d_2$)	$\Sigma Cил_{x2} = 0 : -N_2(0) + N_2(x) = 0 \Rightarrow N_2(x) = -0,017 \text{ кН.}$ $\Sigma Cил_{y2} = 0 : Q_2(0) - Q_2(x) = 0 \Rightarrow Q_2(x) = -2,236 \text{ кН}$ $\Sigma Mom_G = 0 : -M_2(0) - Q_2(0) \cdot x + M_2(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_2(x) = 4,666 - 2,236x, \text{ кН} \cdot \text{м.}$
3	Ділянка 3 ($0 \leq x < d_3$)	$\Sigma Cил_{x3} = 0 : -N_3(0) + N_3(x) = 0 \Rightarrow N_3(x) = -0,707 \text{ кН.}$ $\Sigma Cил_{y3} = 0 : Q_3(0) - Q_3(x) = 0 \Rightarrow Q_3(x) = -2,121 \text{ кН}$ $\Sigma Mom_G = 0 : -M_3(0) - Q_3(0) \cdot x + M_3(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_3(x) = 3,267 - 2,121x \text{ кН} \cdot \text{м.}$
4	Ділянка 4 ($0 \leq x < d_4$)	$\Sigma Cил_{x4} = 0 : -N_4(0) + N_4(x) = 0 \Rightarrow N_4(x) = -1,328 \text{ кН.}$ $\Sigma Cил_{y4} = 0 : Q_4(0) - Q_4(x) = 0 \Rightarrow Q_4(x) = -1,799 \text{ кН}$ $\Sigma Mom_G = 0 : -M_4(0) - Q_4(0) \cdot x + M_4(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_4(x) = 1,940 - 1,799x \text{ кН} \cdot \text{м.}$
5	Ділянка 5 ($0 \leq x < d_5$)	$\Sigma Cил_{x5} = 0 : -N_5(0) + N_5(x) = 0 \Rightarrow N_5(x) = -1,819 \text{ кН.}$ $\Sigma Cил_{y5} = 0 : Q_5(0) - Q_5(x) = 0 \Rightarrow Q_5(x) = -1,301 \text{ кН}$ $\Sigma Mom_G = 0 : -M_5(0) - Q_5(0) \cdot x + M_5(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_5(x) = 0,814 - 1,301x \text{ кН} \cdot \text{м.}$

Підставивши в останні залежності $N_5(x)$, $Q_5(x)$, $M_5(x)$ значення аргумента $x = d_5 = 0,626 \text{ м}$, отримаємо: $|N_5(d_5 = 0,626)| = |F_x| = 1,819 \text{ кН}$; $|Q_5(d_5 = 0,626)| = |F_y| = 1,301 \text{ кН}$; $M_5(d_5 = 0,626) = 0,814 - 1,301 \cdot 0,626 \approx 0$, що свідчить про правильність обчислень внутрішніх факторів за ланцюгом від 1-го до 5-го стержнів.

Розрахунки кінематичних параметрів стержнів в табл. 6 з використанням законів внутрішніх зусиль $N_i(0)$, $Q_i(0)$, $M_i(0)$ з табл. 5 проводяться за формулами:

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_1(x) &= \theta_0 + \int_0^x \frac{M_1(s)}{EI} ds; & v_1(x) &= v_0 + \int_0^x \theta_1(s) ds; & u_1(x) &= u_0 + \int_0^x \frac{N_1(s)}{Ef} ds; \\
 \theta_i(x) &= \theta_i(0) + \int_0^x \frac{M_i(s)}{EI} ds; & v_i(x) &= v_i(0) + \int_0^x \theta_i(s) ds; & u_i(x) &= u_i(0) + \int_0^x \frac{N_i(s)}{Ef} ds; \\
 \theta_0 &= 0; & v_0 &= 0; & u_0 &= 0; & i &= 2, 3, 4, 5,
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

де $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ – модуль пружності при розтяганні для сталі; $I = h^4/12$, $f = h^2$ – відповідно головний центральний момент інерції та площа поперечного квадратного перерізу стержня

(рис. 9); значення $\theta_i(0)$, $v_i(0)$, $u_i(0)$ обчислювалися за формулами (16), а початкові умови $u_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $v_0 = 0$ впливають з умов закріплення стержня в точці A .

Таблиця 6

Розрахунок кінематичних за ММП

№	Розрахункова схема	Закони кінематичних параметрів в місцевих координатах
1	Ділянка 1 ($0 \leq x < d_1$)	$\theta_1(x) = 5,76 \cdot 10^{-2} x - 1,023 \cdot 10^{-2} x^2$, рад, $v_1(x) = -3,411 \cdot 10^{-3} x^3 + 2,88 \cdot 10^{-2} x^2$, м, $u_1(x) = 1,35 \cdot 10^{-6} x$, м.
2	Ділянка 2 ($0 \leq x < d_2$)	$\theta_2(x) = 4,479 \cdot 10^{-2} x - 1,073 \cdot 10^{-2} x^2 + 3,204 \cdot 10^{-2}$, рад, $v_2(x) = 3,204 \cdot 10^{-2} x + 2,24 \cdot 10^{-2} x^2 - 3,578 \cdot 10^{-3} x^3 + 9,93 \cdot 10^{-3}$, м, $u_2(x) = -3,395 \cdot 10^{-8} x - 3,226 \cdot 10^{-3}$, м.
3	Ділянка 3 ($0 \leq x < d_3$)	$\theta_3(x) = 3,136 \cdot 10^{-2} x - 1,018 \cdot 10^{-2} x^2 + 5,586 \cdot 10^{-2}$, рад, $v_3(x) = 5,586 \cdot 10^{-2} x + 1,568 \cdot 10^{-2} x^2 - 3,394 \cdot 10^{-3} x^3 + 3,502 \cdot 10^{-2}$, м, $u_3(x) = -1,414 \cdot 10^{-6} x - 1,477 \cdot 10^{-2}$, м.
4	Ділянка 4 ($0 \leq x < d_4$)	$\theta_4(x) = 1,862 \cdot 10^{-2} x - 8,635 \cdot 10^{-3} x^2 + 7,15 \cdot 10^{-2}$, рад, $v_4(x) = 7,15 \cdot 10^{-2} x + 9,31 \cdot 10^{-3} x^2 - 2,878 \cdot 10^{-3} x^3 + 6,703 \cdot 10^{-2}$, м, $u_4(x) = -2,656 \cdot 10^{-6} x - 3,731 \cdot 10^{-2}$, м.
5	Ділянка 5 ($0 \leq x < d_5$)	$\theta_5(x) = 7,813 \cdot 10^{-3} x - 6,243 \cdot 10^{-3} x^2 + 7,977 \cdot 10^{-2}$, рад, $v_5(x) = 7,977 \cdot 10^{-2} x + 3,906 \cdot 10^{-3} x^2 - 2,081 \cdot 10^{-3} x^3 + 9,757 \cdot 10^{-2}$, м, $u_5(x) = -3,638 \cdot 10^{-6} x - 7,094 \cdot 10^{-2}$, м.

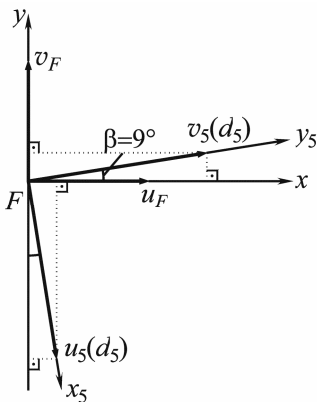


Рис. 11. Проекції місцевих переміщень $u_5(d_5)$, $v_5(d_5)$ на глобальні осі x , y

З метою подальшої перевірки переміщень на кінці стержня за аналітичними залежностями для криволінійного стержня спроектуємо переміщення $u_5(d_5)$, $v_5(d_5)$, які визначені на кінці стержня 5 в точці F на глобальні координатні осі x , y в цій же точці, використовуючи рис. 11.

Значення переміщень u_F , v_F вздовж глобальних осей відповідно x та y , які визначаються залежностями:

$$\left. \begin{aligned} u_F &= v_5(d_5) \cdot \cos \beta + u_5(d_5) \cdot \sin \beta, \\ v_F &= v_5(d_5) \cdot \sin \beta - u_5(d_5) \cdot \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

становлять

$$u_F = u_F^* = 0,1356 \text{ м}; \quad v_F = v_F^* = 0,0933 \text{ м}, \quad (22)$$

де позначення зірочкою означає, що вказані переміщення u_F , v_F були отримані з використанням ММП для сукупності прямих стержнів.

Розрахунок криволінійного стержня. З використанням рис. 12 були отримані параметричні залежності внутрішніх зусиль $N(t)$, $Q(t)$, $M(t)$, які обчислюються за формулами

$$\left. \begin{aligned} \Sigma C_{ил\xi} &= 0: N(t) + R_{Ax} \cdot \sin t - R_{Ay} \cdot \cos t = 0 \Rightarrow N(t) = 1,0 \cdot \sin t - 2,0 \cdot \cos t, \text{ кН}, \\ \Sigma C_{ил\eta} &= 0: -Q(t) + R_{Ax} \cdot \cos t - R_{Ay} \cdot \sin t = 0 \Rightarrow Q(t) = -1,0 \cdot \cos t - 2,0 \cdot \sin t, \text{ кН}, \\ \Sigma M_{омH} &= 0: M(t) + M_A - R_{Ax} \cdot c_y - R_{Ay} \cdot c_x = 0 \Rightarrow M(t) = 2,0 \cdot \sin t - 4,0 \cdot \cos t + 4,0, \text{ кН}, \\ c_x &= r \cdot \cos t, \quad c_y = r(1 - \sin t). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В натуральній параметризації [15] залежності (23) запишуться:

$$\left. \begin{aligned} N(s) &= 1,0 \cdot \sin \frac{s}{2} - 2,0 \cdot \cos \frac{s}{2}, \text{ кН}, \\ Q(s) &= -1,0 \cdot \cos \frac{s}{2} - 2,0 \cdot \sin \frac{s}{2}, \text{ кН}, \\ M(s) &= 2,0 \cdot \sin \frac{s}{2} - 4,0 \cdot \cos \frac{s}{2} + 4,0, \text{ кН}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

де s – довжина дуги, яка для зручності відміряється від точки F .

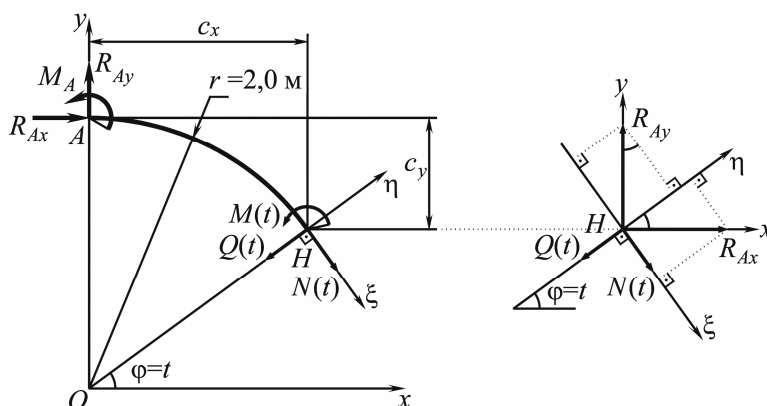


Рис. 12. Параметричні залежності внутрішніх зусиль для криволінійного стержня

З метою подальшого визначення переміщень u_F , v_F (рис. 11) за методом/інтегралом Мора складемо допоміжні системи, які представлені на рис. 13.

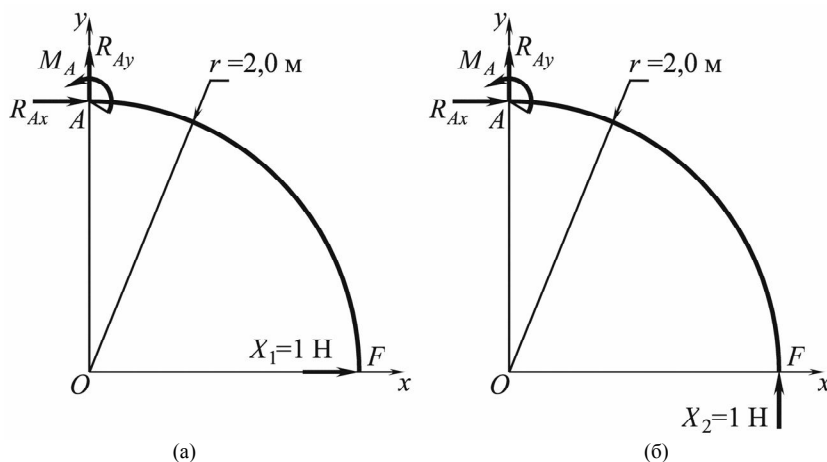


Рис. 13. Допоміжні системи для визначення переміщень u_F та v_F : (а) – для u_F ; (б) – для v_F

Знаходячи реакції R_{Ax} , R_{Ay} , M_A для кожного випадку на рис. 13, а також використовуючи залежності (23) та рис. 12 в загальному випадку отримаємо залежності законів внутрішніх зусиль від одиничних сил на рис. 13. Вказані закони в параметричному вигляді представлені в табл. 7.

Згідно методу/інтегралу Мора переміщення u_F , v_F обчислюються за формулами

$$\left. \begin{aligned} u_F &= \int_0^L \frac{M(s) \cdot M_{X_1}(s)}{EI} ds + \int_0^L \frac{N(s) \cdot N_{X_1}(s)}{Ef} ds + 1,2 \int_0^L \frac{Q(s) \cdot Q_{X_1}(s)}{Gf} ds, \\ v_F &= \int_0^L \frac{M(s) \cdot M_{X_2}(s)}{EI} ds + \int_0^L \frac{N(s) \cdot N_{X_2}(s)}{Ef} ds + 1,2 \int_0^L \frac{Q(s) \cdot Q_{X_2}(s)}{Gf} ds, \\ L &= \frac{\pi}{2} r, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

де $G \approx 8 \cdot 10^{10}$ Па – модуль зсуву; L – довжина четверті дуги (рис. 9); 1,2 – коефіцієнт форми поперечного перерізу.

Таблиця 7

Закони внутрішніх зусиль у параметричному вигляді для допоміжних систем (рис. 13)

Для переміщення	Закони внутрішніх зусиль	
	Звичайна параметризація від t	Натуральна параметризація від довжини дуги s
u_F	$N_{X_1}(t) = \sin t,$ $Q_{X_1}(t) = -\cos t,$ $M_{X_1}(t) = 2 \sin t,$	$N_{X_1}(s) = \sin \frac{s}{2},$ $Q_{X_1}(s) = -\cos \frac{s}{2},$ $M_{X_1}(s) = 2 \sin \frac{s}{2},$
v_F	$N_{X_2}(t) = -\cos t,$ $Q_{X_2}(t) = -\sin t,$ $M_{X_2}(t) = 2 - 2 \cos t,$	$N_{X_2}(s) = -\cos \frac{s}{2},$ $Q_{X_2}(s) = -\sin \frac{s}{2},$ $M_{X_2}(s) = 2 - 2 \cos \frac{s}{2},$

Отримані значення за (25) становлять

$$u_F = 0,1371 \text{ м}; \quad v_F = 0,0931 \text{ м}. \quad (26)$$

Зауважимо, що значення переміщень u_F , v_F обчислені за (25) враховують також і вплив зсуву, а тому є найбільш точними переміщеннями для стержня на рис. 9 в рамках звичайної стержневої теорії.

Порівняння переміщень. Різниці між переміщеннями u_F^* , v_F^* , які були отримані з використанням ММП для сукупності прямих стержнів за (22) і точними значеннями переміщень u_F , v_F , які були отримані згідно методу Мора за (25) становлять:

$$\left. \begin{aligned} \delta_u &= \frac{u_F - u_F^*}{u_F} 100\% = \frac{0,1371 - 0,1356}{0,1371} 100\% = 1,14\%, \\ \delta_v &= \frac{v_F - v_F^*}{v_F} 100\% = \frac{0,0931 - 0,0933}{0,0931} 100\% = -0,17\%, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

де δ_u – різниця, %, між u_F та u_F^* ; δ_v – різниця, %, між v_F та v_F^* .

Порівняння внутрішніх силових факторів. Виконаємо порівняння значень внутрішніх зусиль, які отримані за ММП в табл. 5 та за точними аналітичними залежностями (23) або (24), з використанням рис. 14, де зліва представлені результати отримані за ММП, а справа – за точними аналітичними залежностями. Як видно з рис. 14 значення згинальних моментів у вузлових точках, обчислених як за ММП, так і за точними формулами є однакові. Всередині прольотів значення моментів відрізняються на долі відсотків, не беручи порівняння малих величин, які прямують до нуля в точці F .

Закони осьових зусиль N та зрізуючих сил Q є постійними в межах прямолінійних стержнів. Такі епюри називатимемо прямокутними. Площі прямокутних та криволінійних відповідних епюр в межах виділених ділянок між точками (AB , BC тощо) є рівними. Покажемо це на прикладі.

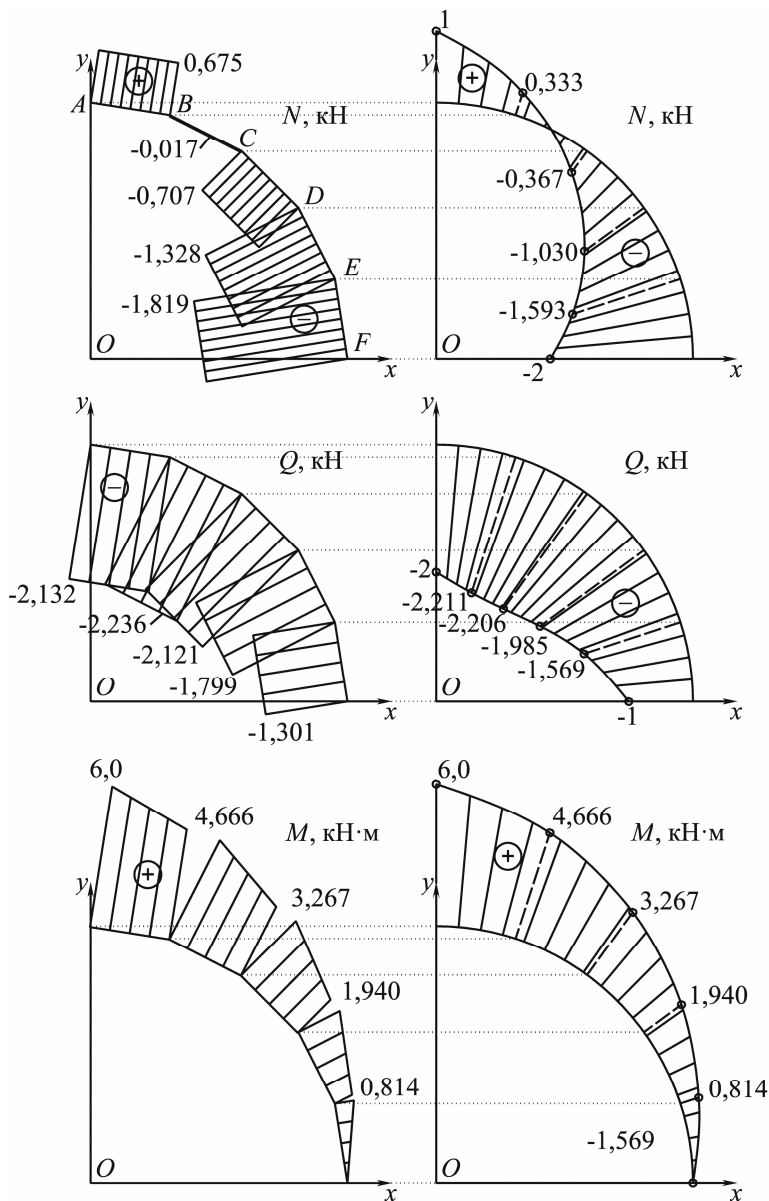


Рис. 14. Епюри внутрішніх зусиль

Площа Ar криволінійної епюри зрізуючих сил Q на ділянці CD обчислюється за формулою

$$\left. \begin{aligned} Ar &= \int_{s_D}^{s_C} Q(s) ds = \int_{s_D}^{s_C} \left(-1,0 \cdot \cos \frac{s}{2} - 2,0 \cdot \sin \frac{s}{2} \right) ds = -1,327, \\ s_D &= \frac{36^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 1,257 \text{ м}; \quad s_C = \frac{54^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 1,885 \text{ м}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Площа Ars прямокутної епюри зрізуючих сил Q на ділянці CD обчислюється за формулою

$$\left. \begin{aligned} Ars &= -2,121 \cdot d_5 = -2,121 \cdot 0,626 = -1,327, \\ d_5 &= 0,626 \text{ м.} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Рівність площ справедлива для всіх ділянок епюр N , Q та M . Це означає, що в криволінійному стержні та в послідовності прямих стержнів, якими апроксимований криволінійний стержень накопичена однакова потенціальна пружна енергія. Тобто використання ММП не порушує енергетичний баланс. Додатковим доказом цього є те, що переміщення u_F , v_F із (26), які отримані за енергетичним методом Мора (25), практично дорівнюють переміщенням u_F , v_F із (22), які отримані за звичайними формулами опору матеріалів.

Середнє значення зрізуючої сили $Q_{CD \text{ mid}}$ з криволінійної епюри на ділянці CD становить

$$Q_{CD \text{ mid}} = \frac{Ar}{s_C - s_D} = \frac{-1,327}{1,885 - 1,257} = -2,113 \text{ м,} \quad (30)$$

яке менше на 0,4% від значення $Q = -2,121$ кН на ділянці CD прямокутної епюри. Подібні малі похибки отримуються для всіх ділянок епюр N та Q при порівнянні середніх значень, отриманих з криволінійних та прямокутних епюр. Значення внутрішнього зусилля за модулем на прямокутній епюрі завжди буде більшим за середнє значення, яке отримане з відповідної криволінійної епюри. Тому що довжина криволінійної дуги завжди більша ніж довжина її відповідної хорди, якою є прямий стержень, при рівності площ відповідних криволінійної та прямокутної епюр. Звісно, що при збільшенні кількості прямих стержнів, якими апроксимований криволінійний стержень і відповідно зменшенні довжини кожного з них, вказана похибка прямуватиме до нуля, тому що довжина прямого стержня прямуватиме до довжини дуги на відповідному відрізку.

Висновки. В результаті досліджень були виконані всі поставлені задачі. Висновки можна представити наступним чином.

1) Було продемонстровано застосування ММП для прямого стержня і показана можливість розвитку цього методу для криволінійних стержнів, апроксимованих послідовністю прямих стержнів на площині шляхом перетворення внутрішніх силових і кінематичних параметрів при переході границь між двома прямими стержнями в межах апроксимуючої послідовності прямих стержнів.

2) Було встановлено, що плоске деформування криволінійного стержня забезпечують такі внутрішні зусилля, як згинальні моменти, вектор яких перпендикулярний до площини деформування, зрізуючі та осьові сили, у випадку, якщо поперечний переріз стержня є симетричним відносно площини розрахунку. При переході границі стиковки двох прямих стержнів розташованих під кутом один до одного на площині перетворень зазнають осьові та зрізуючі сили.

3) Плоске деформування криволінійного стержня можливе при таких кінематичних параметрах, як кути повороту поперечних перерізів, вектор яких перпендикулярний до площини деформування, прогини та осьові переміщення. Вказані кінематичні параметри не є прямо відповідними вказаним вище внутрішнім силовим факторам. Кут повороту і прогин в місцевій системі координат прямого стержня (із числа послідовності апроксимуючих) викликаний згинальним моментом, але додатково можуть зазнавати впливу і від зрізуючої сили.

4) В результаті проведення порівняння контрольних значень, отриманих за МПП та за точними аналітичними залежностями для криволінійного стержня можна зробити наступні висновки. Таким чином можна стверджувати, що у випадку наявності прямокутних епюр для внутрішніх зусиль N та Q , які отримуються при використанні ММП, значення постійного внутрішнього зусилля на прямому стержні практично прямує до середнього значення внутрішнього зусилля на аналогічній криволінійній ділянці. Це створює невизначеності при перевірці міцності, або при виконанні проектувального розрахунку, тому що в цьому випадку на прямокутній епюрі не вдається встановити найбільше за модулем значення того чи іншого внутрішнього зусилля. Використання прямокутних епюр/законів отриманих за ММП призведе до недооцінки міцності при перевірочному розрахунку або недостатній металоємності при проектувальному розрахунку. В цьому випадку можна рекомендувати різні прийоми

визначення найбільшого за модулем значення внутрішнього зусилля, наприклад, заснованого на перебудові прямокутних епюр, але зі збереженням значення площі початкової епюри, або інші методи. Це тема окремих досліджень.

Проте зі згинальними моментами вищевказаних проблем немає. Навіть якщо б на кінці криволінійного стержня в точці F був прикладений лише зовнішній згинальний момент, який забезпечує чистий згин, то криволінійна епюра внутрішніх згинальних моментів була б постійною, а отримана за ММП для послідовності прямих стержнів – сукупність рівних прямокутників на всіх ділянках. Але і в цьому випадку значення внутрішніх згинальних моментів у всіх відповідних точках криволінійної та прямокутних епюр були б рівні, тому що моменти не зазнають перетворень при переході границь між прямими стержнями.

Більш того, згинальні моменти внутрішніх зусиль в більшості випадків є основним силовим фактором за яким ведеться перевірка міцності або проектувальний розрахунок, що робить використання ММП на площині ефективним. Тому що ММП не спотворює значень/залежностей внутрішніх згинальних моментів у порівнянні з точними значеннями/залежностями для криволінійних стержнів.

Вплив зсуву та розтягу-стиску в реальних стержневих системах є дещо вторинним, хоча в деяких випадках ними не можна нехтувати. Проблема точної оцінки міцності з врахуванням всіх силових факторів в рамках представленого МПП на площині потребує вивчення.

Переміщення за ММП визначаються дуже точно, незважаючи на спотворення реальних законів внутрішніх зусиль N та Q у порівнянні з точними залежностями на криволінійному стержні, тому що, як було показано вище, використання ММП не порушує енергетичний баланс. Це надає ММП здатність доволі точно розкривати статичну невизначеність стержневих систем.

В подальшому ММП можна пристосувати і для просторових систем.

В більш складних і точних відомих моделях деформування можливе врахування взаємного впливу окремих видів деформування один на одне, коли в межах прямого стержня параметри деформування задаються вже не залежностями опору матеріалів, а, наприклад, диференціальними рівняннями. То в рамках геометричної лінійності (або відносної жорсткості) застосування запропонованих залежностей для перетворень внутрішніх силових та кінематичних параметрів необхідно довести або перевірити. В позитивному випадку можна розширити застосування запропонованих залежностей для складних моделей криволінійних стержнів, які апроксимовані послідовністю прямих стержнів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Соков В.М. Модифицированный метод сечений для расчета внутренних усилий и перемещений деформируемых тел. Збірник наукових праць НУК. Миколаїв: НУК, 2015. № 3 (434). С. 3–10. <https://doi.org/10.15589/jnn20150302>
2. Пустынный В.И. Теория и практика построения эпюр (введение в сопротивление материалов): учеб. пособие. Харьков: "Горнадо", 1999. 224 с. ISBN 966-7554-03-1, 966-7554-28-7
3. Singh, D.K. Strength of materials: 4-th edition. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2021. 905 p. ISBNs: 978-3-03-059666-8, 978-3-03-059667-5. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-59667-5>.
4. Den Hartog, Jacob Pieter. Advanced strength of materials. Literary Licensing, LLC, 2012. 388 p. ISBNs: 1258432153, 978-1258432157.
5. Bedford, A., Liechti, K. M. Mechanics of Materials: 2-nd edition. Springer Nature Switzerland AG, 2020. 1019 p. ISBNs: 978-3-03-022081-5, 978-3-03-022082-2. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-22082-2>.
6. Arthur P. Boresi, Richard J. Schmidt. Advanced Mechanics of Materials: 6th Edition. USA: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 704 p. ISBN 978-0-471-43881-6.
7. Kollar, L. P., Tarján, G. Mechanics of civil engineering structures. Woodhead Publishing, 2020. 592 p. ISBNs: 0128203218, 978-0128203217. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-820321-7.09991-3>.
8. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.: іл..
9. Ghuku, S., Saha, K.N. A parametric study on geometrically nonlinear behavior of curved beams with single and double link rods, and supported on moving boundary. International Journal of Mechanical Sciences. Elsevier, 2019. Volumes 161–162. 105065. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105065>.
10. Li, W., Ma, H., Gao, W. Geometrically exact curved beam element using internal force field defined in deformed configuration. International Journal of Non-Linear Mechanics. Elsevier, 2017. Vol. 89. pp. 116–126. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.008>.
11. Gimena, L., Gonzaga, P., Gimena, F. Forces, moments, rotations, and displacements of polynomial-shaped curved beams. International Journal of Structural Stability and Dynamics. World Scientific, 2010. Vol. 10, No. 01, pp. 77-89. <https://doi.org/10.1142/S0219455410003336>.

12. Ecsedi, I., & Dluhi, K. A linear model for the static and dynamic analysis of non-homogeneous curved beams. *Applied Mathematical Modelling*. Elsevier, 2005. Vol. 29, Issue 12. pp. 1211–1231. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.006>.
13. Griso, G. Asymptotic behavior of structures made of curved rods. *Analysis and Applications*. World Scientific, 2008. Vol. 06, No. 01. pp. 11–22. <https://doi.org/10.1142/S0219530508001031>.
14. Jiang, Y., Tian, Y., Zhou, H., Tan, G., Xiong, J., Zhou, Y. Internal Force Calculation Method for a Complex Curved Beam Under a Vertical Load. *Structural Engineering International*. Taylor&Francis, 2023. Vol. 34, Issue 2. pp. 317–326. <https://doi.org/10.1080/10168664.2023.2194312>.
15. Do Carmo, Manfredo P. *Differential geometry of curves and surfaces*: 2nd Edition. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2016. 528 p. ISBNs: 978-0-486-80699-0, 0-486-80699-5.

REFERENCES

1. Sokov V. M. Modifitsirovannii metod sechenii dlya rascheta vnutrennikh usilii i peremeshchenii deformiruemykh tel (The modified method of sections for calculation of internal forces and displacements of deformable bodies). *Zbirnyk naukovykh prats NUK. Mykolaiv: NUK*, 2015. № 3 (434). S. 3–10. <https://doi.org/10.15589/jnn20150302>.
2. Pustinnikov V. I. *Teoriya i praktika postroeniya epyur (vvedenie v soprotivlenie materialov)* (The theory and practice of drawing of eures (introduction into the strength of materials)): ucheb. posobie . Kharkov: "Tornado", 1999. 224 s. ISBN 966-7554-03-1, 966-7554-28-7.
3. Singh, D. K. *Strength of materials*: 4-th edition. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2021. 905 p. ISBNs: 978-3-03-059666-8, 978-3-03-059667-5. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-59667-5>.
4. Den Hartog, Jacob Pieter. *Advanced strength of materials*. Literary Licensing, LLC, 2012. 388 p. ISBNs: 1258432153, 978-1258432157.
5. Bedford, A., Liechti, K. M. *Mechanics of Materials*: 2-nd edition. Springer Nature Switzerland AG, 2020. 1019 p. ISBNs: 978-3-03-022081-5, 978-3-03-022082-2. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-22082-2>.
6. Arthur P. Boresi, Richard J. Schmidt. *Advanced Mechanics of Materials*: 6th Edition. USA: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 704 p. ISBN 978-0-471-43881-6.
7. Kollar, L. P., Tarján, G. *Mechanics of civil engineering structures*. Woodhead Publishing, 2020. 592 p. ISBNs: 0128203218, 978-0128203217. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-820321-7.09991-3>.
8. Pysarenko H.S. ta in.. *Opir materialiv: Pidruchnyk* (The strength of materials: Textbook) / H.S. Pysarenko, O.L. Kvitka, E.S. Umanskyi; Za red. H.S. Pysarenka. – 2-he vyd., dopov. i pererobl. – K.: Vyscha shk., 2004. – 655 s.: il..
9. Ghuku, S., Saha, K. N. A parametric study on geometrically nonlinear behavior of curved beams with single and double link rods, and supported on moving boundary. *International Journal of Mechanical Sciences*. Elsevier, 2019. Volumes 161–162. 105065. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105065>.
10. Li, W., Ma, H., Gao, W. Geometrically exact curved beam element using internal force field defined in deformed configuration. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Elsevier, 2017. Vol. 89. pp. 116–126. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.008>.
11. Gimena, L., Gonzaga, P., Gimena, F. Forces, moments, rotations, and displacements of polynomial-shaped curved beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. World Scientific, 2010. Vol. 10, No. 01, pp. 77-89. <https://doi.org/10.1142/S0219455410003336>.
12. Ecsedi, I., & Dluhi, K. A linear model for the static and dynamic analysis of non-homogeneous curved beams. *Applied Mathematical Modelling*. Elsevier, 2005. Vol. 29, Issue 12. pp. 1211–1231. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.006>.
13. Griso, G. Asymptotic behavior of structures made of curved rods. *Analysis and Applications*. World Scientific, 2008. Vol. 06, No. 01. pp. 11–22. <https://doi.org/10.1142/S0219530508001031>.
14. Jiang, Y., Tian, Y., Zhou, H., Tan, G., Xiong, J., Zhou, Y. Internal Force Calculation Method for a Complex Curved Beam Under a Vertical Load. *Structural Engineering International*. Taylor&Francis, 2023. Vol. 34, Issue 2. pp. 317–326. <https://doi.org/10.1080/10168664.2023.2194312>.
15. Do Carmo, Manfredo P. *Differential geometry of curves and surfaces*: 2nd Edition. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2016. 528 p. ISBNs: 978-0-486-80699-0, 0-486-80699-5.

Стаття надійшла 26.06.2025

Соков В.М.

ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ПЕРЕРІЗІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КРИВОЛІНІЙНИХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНІВ

В роботі представлено застосування модифікованого методу перерізів (ММП) для розрахунку плоских криволінійних стержнів, апроксимованих послідовністю прямих стержнів при плоскому деформуванні в рамках лінійної теорії Бернуллі-Ейлера. Це дозволить спростити розрахунки криволінійних стержнів без застосування апарату диференціальної геометрії. Поперечний переріз є симетричним відносно площини деформування для запобігання депланатії. В роботі представлені залежності для перетворення встановлених внутрішніх силових та кінематичних параметрів при переході границі стикування двох прямих стержнів з'єднаних під кутом на площині. Ці залежності застосовуються при розрахунках за ММП сукупної послідовності прямих стержнів, які апроксимують криволінійний стержень. Для перевірки був проведений розрахунок дуги четверті кола за залежностями диференціальної геометрії і розрахунок для ламаного стержня, який складається з сукупної послідовності п'яти однакових прямих стержнів, які апроксимують дугу четверті кола при тих же навантаженнях. Кінематичні параметри, які отримані в показовій точці за обома розрахунками відрізняються між собою не більше ніж на 1,5%, що дозволяє точно розкривати статичну невизначеність використовуючи ММП. Площі криволінійних епюр всіх внутрішніх зусиль дорівнюють відповідним

площам епюр, які отримані за ММП для ламаного стержня, що свідчить про збереження енергетичного балансу при використанні ММП. Відповідні значення внутрішніх згинальних моментів на криволінійних епюрах та отриманих за ММП для ламаного стержня однакові, що дає можливість точно проводити оцінку міцності або проектування за згинальними моментами. Епюри осьових і зрізуючих сил отриманих за ММП для ламаного стержня є ступінчастими, де значення внутрішніх зусиль на кожному ступені приблизно дорівнюють середнім значенням, отриманих з відповідних ділянок криволінійної епюри.

Ключові слова: опір матеріалів, модифікований метод перерізів, внутрішні зусилля, криволінійний стержень.

Sokov V.M.

THE APPLICATION OF THE MODIFIED METHOD OF SECTIONS FOR CALCULATIONS OF CURVED FLAT RODS

In the paper there is presented the application of the modified method of sections (MMS) for calculation of flat curved rods approximated by the sequence of straight rods under the plain deforming in frames of the linear Bernoulli-Euler's theory. It allows to simplify calculations of curved rods without using of the apparatus of the differential geometry. The orthogonal cross section is symmetrical relatively the plane of deformation to avoid warping. In the work there are presented the relations for transformation of defined internal force and kinematical parameters when there's transition of the boundary of joining of two angle joint straight rods on plane. These relations are used for calculations by MMS of aggregate sequence of straight rods which approximate a curved rod. For checkups there was made the calculation of the quadrant circular arc using relations of the differential geometry and the calculation for the broken-line rod consisting of the aggregate sequence of five identical straight rods which approximate the quadrant circular arc for the same loadings. The kinematical parameters obtained in the particular point for the both calculations distinguish between themselves not more than for 1.5% which allows accurately to reveal the static redundancy using MMS. The areas of curvilinear diagrams of all internal forces equal to appropriate areas of diagrams obtained by MMS for the broken rod which proofs the conservation of the energy balance using MMS. The appropriate values of internal bending moments obtained on curvilinear diagrams and obtained by MMS for the broken rod are identical which enables to pass accurately the strength estimation or design using bending moments. The diagrams of axial and shear forces obtained by MMS for the broken rod are stepped where values of internal forces at each step approximately equal the mean values obtained from appropriate segments of the curvilinear diagram.

Keywords: strength of materials, the modified method of sections, internal forces, curved rod.

УДК 539.3/6

Соков В.М. Застосування модифікованого методу перерізів для розрахунку криволінійних плоских стержнів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2025. – Вип. 115. – С. 396-415.

Представлена реалізація розробленого модифікованого методу перерізів для розрахунку плоских криволінійних стержнів, які у свою чергу апроксимовані послідовністю прямих стержнів при плоскому деформуванні в рамках лінійної теорії Бернуллі-Ейлера.

Табл. 7. Іл. 14. Бібліогр. 15 назв.

UDC 539.3/6

Sokov V.M. The application of the modified method of sections for calculations of curved flat rods // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2025. – Issue 115. – P. 396-415.

There is presented the application of the modified method of sections for calculation of flat curved rods approximated in turn by the sequence of straight rods under the plain deforming in frames of the linear Bernoulli-Euler's theory.

Табл. 7. Fig. 14. Ref. 15.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки та конструкції корпусу корабля НУК ім. адмірала Макарова СОКОВ Валерій Миколайович.

Адреса: 54007 Україна, м. Миколаїв, проспект Героїв України 9, НУК ім. адмірала Макарова, кафедра будівельної механіки та конструкції корпусу корабля, Соков Валерій Миколайович.

Мобільний тел.: +38(097) 395 36 51

E-mail: valeriy.sokov@nuos.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-3933-879X>