

УДК 534.222: 539.3

ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА ЕВОЛЮЦІЯ ОДНОВИМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ ДЕФОРМАЦІЙ У ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКАХ

Ю.В. Човнюк¹О.В. Приймаченко¹П.П. Чередніченко¹С.С. Топал²¹Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ²Одеська державна академія будівництва і архітектури

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.115.304-314

Проаналізована просторово-часова еволюція одновимірних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль у пружних оболонках. У пружних оболонках виявлені одновимірні періодичні (кноїдальні) хвилі та солітони рівняння Кортевега – де Вріза (КдВ). Знайдені частинні аналітичні розв'язки задачі Коші.

Ключові слова: еволюція, одновимірні нелінійні хвилі деформацій, циліндричні оболонки, кноїдальні хвилі, солітони, пружність, рівняння КдВ.

Постановка проблеми

За останні 50 років досягнуті значні успіхи у дослідженні нелінійних хвильових процесів у акустичних хвилеводах. Ці успіхи пов'язані, головним чином, з розвитком швидко прогресуючої теорії солітонів та нелінійних періодичних (кноїдальних) хвиль. Теоретичне обґрунтування існування солітонів деформацій у стрижнях та пластинах й позитивні результати їх експериментального спостереження [1, 2] дозволили суттєво розширити наявні представлення про нелінійну динаміку деформованих твердих тіл. Разом з тим, нелінійний хвильовий процес у циліндричних оболонках, хвильові властивості котрих знаходять широке практичне застосування, на наш погляд, вивчені недостатньо.

Аналіз публікацій по темі дослідження

При розв'язуванні динамічних задач теорії тонких оболонок зазвичай використовуються два основних підходи. Перший підхід (класичний) базується на гіпотезах Кірхгофа - Лява, а відповідні моделі оболонок називають моделями першого наближення. Другий підхід, пов'язаний з ім'ям С.П. Тимошенка, у доповнення до класичних деформацій, враховує деформації, пов'язані з поперечними силами та інерцією обертання. Моделі, засновані на такому підході, називають моделями другого наближення [3]. Рівняння руху для моделі першого наближення мають параболічний тип, тоді як у другому випадку виникають рівняння гіперболічного типу, котрі найбільш часто використовуються при описі хвильових явищ. Разом з тим, у статті [4] було показано, що при дослідженні еволюції нелінійних поздовжніх хвиль у оболонках обидва підходи призводять до однакових результатів, тобто у даному випадку параболічність рівнянь моделі Кірхгофа-Лява не є недоліком, як і гіперболічність рівнянь моделі Тимошенка не є перевагою. Це пов'язано з тим, що розглядувані хвилі деформації є дисперсійними [5]. Дисперсійність хвиль у оболонках є прямим наслідком їх тонкостінності (те ж саме відноситься до стрижнів і пластин) [6]. Тому, просторово-часову еволюцію одновимірних нелінійних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль деформацій можна розглядати як процеси, що відбуваються у одновимірних дисперсійних системах [7]. Автори [4, 6] дослідили еволюцію у просторі й часі нелінійних хвиль деформацій у циліндричних оболонках, використовуючи метод багатьох масштабів [8]. У даному дослідженні використаний інший підхід, розвинутий авторами [9], який у науковій літературі відповідного профілю набув назви редукційного методу збурень. На думку авторів даного дослідження, саме такий підхід дозволяє найбільш коректно, фізично й науково обґрунтовано врахувати вплив на нелінійні хвилеутворення у оболонках циліндричного типу нелінійності (геометричного типу) - для

пружних оболонок, дисперсії та тонкостінності, дифракційної розбіжності, як ефектів, що мають певний ступінь малого параметру (ε), тобто пропорційні йому, а між собою зв'язані теж певним ступенем ε . Стосовно нелінійно-пружних циліндричних оболонок додається ще й нелінійність фізична, котра теж пропорційна певному ступеню малості (параметра ε). Обґрунтування показників ступеня малого параметра ε для всіх, зазначених вище ефектів, дано у роботах [7, 9], виходячи з міркувань щодо дисперсійного співвідношення між круговою частотою ω та хвильовим вектором $\vec{k}$ нелінійного хвилеутворення деформації (поздовжнього чи зсувного типу) у циліндричній пружній (або нелінійно-пружній) оболонці, котре у загальному випадку може бути подане залежністю:

$$G(\omega, \vec{k}, A) = 0, \quad (1)$$

де A – амплітуда нелінійної хвилі деформації.

Крім того, параметр ε фігурує у певному ступені для просторово-часової координати біжучої хвилі, та для часової координати, що символізує повільність зміни у часі основних параметрів хвилеутворення. Такий підхід відрізняє суттєво параметри хвилеутворень (солітонів та кноїдальних (періодичних) хвиль) від тих, що отримані у [4, 6] на основі методів роботи [8], бо у цих цитованих дослідженнях розклад у ряд по малому параметру ε шуканих рішень задачі Коші здійснюється спонтанно (щодо ступенів ε), необґрунтовано й призводить до виникнення недоречностей (типу неоднозначних розв'язків задачі). До того ж, у [4, 6] зовсім не розглянуті як солі тонні розв'язки, так і кноїдальні хвилеутворення періодичного типу, а є лише посилення на роботи, в яких визначені точні частинні розв'язки початкової задачі (Коші) солітонного типу.

У даному дослідженні всі вище вказані недоліки усунуті. На думку авторів даної роботи, такий результат є доволі закономірним, оскільки проведене дослідження базується на системному підході щодо фізики утворення нелінійних хвиль та їх наступної просторово-часової еволюції, сформульованому й розвинутому у роботі [9].

Мета роботи полягає у обґрунтуванні методу аналізу розповсюдження нелінійних хвиль деформацій у пружних циліндричних оболонках, який базується на редукційному методі збурень, розвинутому у [9], задля знаходження періодичних (кноїдальних) розв'язків та солітонів. При цьому даний підхід дозволяє проаналізувати просторово-часову еволюцію у пружних циліндричних оболонках вказаних частинних розв'язків задачі Коші для нелінійних хвиль деформації двох типів: 1) поздовжніх одновимірних; 2) поздовжньо-зсувних одновимірних.

Виклад основного змісту дослідження

Рівняння руху елемента циліндричної оболонки у переміщеннях для моделі Кірхгофа-Лява (одновимірна постановка задачі) мають вид [3]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \mu \cdot k_y \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{(1-\mu^2)}{E} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{(1-\mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{(1-\mu^2)}{E} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \mu \cdot k_y \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + k_y^2 \cdot W - \frac{\mu \cdot k_y}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ + (-1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \mu \cdot k_y \cdot W \right) \right] - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{(1-\mu^2)}{E} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

У рівняннях (2) – (4) введені наступні позначення: U, V, W – переміщення точок серединної поверхні оболонки у напрямку x, y, z , відповідно, E – модуль Юнга, μ – коефіцієнт Пуассона, $k_y = 1/R$ – параметр кривини, R – радіус поперечного перерізу циліндричної оболонки, γ – питома вага матеріалу оболонки, g – прискорення вільного падіння, t – час, h – товщина оболонки. Для одновимірної постановки задачі (U, V, W) є функціями лише координати x .

Рівняння системи (2) – (4) можна подати у зручному для подальшого аналізу вигляді, якщо ввести наступну заміну змінних:

$$t \rightarrow \tilde{t} = \left(\frac{E \cdot g}{\gamma \cdot (1 - \mu^2) \cdot h^2} \right)^{1/2} \cdot t, \quad x \rightarrow x^* = \frac{x}{h}, \quad U \rightarrow U^* = \frac{U}{h}, \quad V \rightarrow V^* = \frac{V}{h}, \quad W \rightarrow W^* = \frac{W}{h}. \quad (5)$$

У нових змінних (5) вихідна система рівнянь (2) – (4) набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \tilde{t}^2} + \mu \cdot k_y \cdot h \cdot \frac{\partial W^*}{\partial x^*} - \frac{\partial^2 U^*}{\partial (x^*)^2} - \left\{ \left(\frac{\partial U^*}{\partial x^*} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial (x^*)^2} \right) + \left(\frac{\partial V^*}{\partial x^*} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial (x^*)^2} \right) + \left(\frac{\partial W^*}{\partial x^*} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial (x^*)^2} \right) \right\} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{(1 - \mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 V^*}{\partial (x^*)^2} = 0; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \tilde{t}^2} + \mu \cdot k_y \cdot h \cdot \frac{\partial U^*}{\partial x^*} - k_y^2 \cdot h^2 \cdot W^* - \frac{1}{12} \cdot \frac{\partial^4 W^*}{\partial (x^*)^4} + \frac{\mu \cdot k_y \cdot h}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial U^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^*}{\partial x^*} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\partial^2 W^*}{\partial (x^*)^2} \cdot \left(\frac{\partial U^*}{\partial x^*} - \mu \cdot k_y \cdot h \cdot W^* \right) + \frac{\partial W^*}{\partial x^*} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 U^*}{\partial (x^*)^2} - \mu \cdot k_y \cdot h \cdot \frac{\partial W^*}{\partial (x^*)} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Система рівнянь (6) – (8) може бути подана у матричному виді:

$$\tilde{U}_t + A(\tilde{U}) \cdot \tilde{U}_{x^*} + B(\tilde{U}) \cdot \tilde{U}_{2x^*} + C(\tilde{U}) \cdot \tilde{U}_{3x^*} + D(\tilde{U}) = 0. \quad (9)$$

У (9) введені наступні позначення:

$$\tilde{U} = \left[U^*; V^*; W^*; U_t^*; V_t^*; W_t^*; U_{x^*}^*; V_{x^*}^*; W_{x^*}^* \right]^T;$$

$A(\tilde{U})$ - матриця, $\dim\{A(\tilde{U})\} = [9 \times 9]$, у якій відмінними від нуля є наступні елементи:

$$a_{43} = \mu \cdot k_y \cdot h; \quad a_{47} = -1; \quad a_{58} = \frac{(1 - \mu)}{2}; \quad a_{61} = \mu \cdot k_y \cdot h; \quad a_{74} = -1; \quad a_{85} = -1; \quad a_{96} = -1;$$

$B(\tilde{U})$ - матриця, $\dim\{B(\tilde{U})\} = [9 \times 9]$, у якій відмінними від нуля є наступні елементи:

$$b_{41} = -U_{x^*}^*; \quad b_{42} = -V_{x^*}^*; \quad b_{43} = -W_{x^*}^*; \quad b_{52} = -\frac{(1 - \mu)}{2}; \quad b_{61} = W_{x^*}^*; \quad b_{63} = (U_{x^*}^* - \mu \cdot k_y \cdot h \cdot W^*);$$

$C(\tilde{U})$ - матриця, $\dim\{C(\tilde{U})\} = [9 \times 9]$, у якій відмінним від нуля є елемент $c_{67} = -1/12$; $D(\tilde{U})$, як і вектор-стовпець $\tilde{U}$, зазначений вище, має розмірність $\dim\{D(\tilde{U})\} = \dim\{\tilde{U}\} = [9 \times 1]$. Елементи вектор-стовпця $D(\tilde{U})$ мають наступні ненульові значення:

$$d_{11} = -U_t^*; \quad d_{12} = -V_t^*; \quad d_{13} = -W_t^*; \quad d_{16} = -k_y^2 \cdot h^2 \cdot W^* + \frac{\mu \cdot k_y \cdot h}{2} \cdot \left\{ (U_{x^*}^*)^2 + (V_{x^*}^*)^2 \right\} - \frac{\mu \cdot k_y \cdot h}{2} \cdot (W_{x^*}^*)^2.$$

Вважаємо, що $(U^*, V^*, W^*) \sim \exp\{i \cdot (\omega \cdot \tilde{t} - \tilde{k} \cdot x^*)\}$, де ω - безрозмірна частота коливань, $i^2 = -1$, а $\tilde{k}$ - безрозмірний хвильовий вектор хвилеутворення/збурення, що виникає у циліндричній оболонці. (Зазначимо, що кожна з компонент хвилеутворення має свою власну амплітуду збурення вздовж осей Ox , Oy , Oz , відповідно). Визначимо дисперсійне співвідношення для нелінійних хвиль деформації, яке відображає типи хвиль деформацій, що можуть існувати у циліндричній пружній оболонці. Зокрема, для напрямку вповдовж осі Oy розповсюджується лінійна біжуча хвиля, яка може описуватись наступним чином:

$$V^*(x^*, \tilde{t}) = \text{Re} \left\{ \tilde{B} \cdot \exp \left[i \cdot (\tilde{\omega}_1 \cdot \tilde{t} - \tilde{k} \cdot x^*) \right] \right\}, \quad (10)$$

де $\tilde{B}$ - амплітуда лінійної біжучої хвилі, а її частота $\tilde{\omega}_1$ визначається зі співвідношення:

$$\tilde{\omega}_1 = \left\{ \frac{1 - \mu}{2} \right\}^{1/2} \cdot \tilde{k}. \quad (11)$$

Істинне значення частоти розповсюдження цієї хвилі складає:

$$\omega_1 = \left\{ \frac{E \cdot g}{2 \cdot \gamma \cdot (1 + \mu) \cdot h^2} \right\}^{1/2} \cdot \tilde{k} = \left\{ \frac{E \cdot g}{2 \cdot \gamma \cdot (1 + \mu)} \right\}^{1/2} \cdot k, \quad (12)$$

де k - істинне значення хвильового вектору.

Отже, хвиля, що розповсюджується у напрямку осі Оу (у одновимірній постановці задачі) має лінійне дисперсійне співвідношення $\omega_1(k)$, а її фазова (v_f) та групова швидкості (v_g) розповсюдження визначаються наступним співвідношенням:

$$v_f = \frac{\omega_1}{k} = v_g = \frac{d\omega_1(k)}{dk} = \left\{ \frac{E \cdot g}{2 \cdot \gamma \cdot (1 + \mu)} \right\}^{1/2}. \quad (13)$$

Нелінійні хвилі деформації утворюються при взаємодії переміщень $U_{x^*}^*$ та $W_{x^*}^*$, тобто при взаємодії хвилеутворень збурень, що виникають за одновимірної постановки задачі і які рухають елемент циліндричної оболонки вдовж осей Ох та Оz одночасно, тобто такі хвилі мають поздовжньо-поперечний механізм утворення.

Дисперсійне співвідношення для такого типу хвиль (у лінійному наближенні) має вид:

$$\tilde{\omega}^4 + \tilde{\omega}^2 \cdot \left\{ k_y^2 \cdot h^2 + \frac{1}{12} \cdot (\tilde{k})^4 - (\tilde{k})^2 \right\} - k_y^2 \cdot h^2 \cdot (\tilde{k})^2 \cdot (1 - \mu^2) - \frac{1}{12} \cdot (\tilde{k})^6 = 0. \quad (14)$$

Введемо позначення:

$$F = k_y^2 \cdot h^2 + \frac{1}{12} \cdot (\tilde{k})^4 - (\tilde{k})^2; \quad M = k_y^2 \cdot h^2 \cdot (\tilde{k})^2 \cdot (1 - \mu^2) + \frac{1}{12} \cdot (\tilde{k})^6. \quad (15)$$

Тоді безрозмірна частота хвилі збурення вище названого типу, яка є біжучою (і не затухає), визначається співвідношенням:

$$\tilde{\omega}_2 = \left\{ -\frac{F}{2} + \sqrt{\frac{F^2}{4} + M} \right\}^{1/2}. \quad (16)$$

Істинне значення частоти ω_2 визначається виразом:

$$\omega_2 = \left\{ \frac{E \cdot g}{\gamma \cdot (1 - \mu^2) \cdot h^2} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ -\frac{F}{2} + \sqrt{\frac{F^2}{4} + M} \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

Переходячи у виразах F та M до запису їх через істинне значення хвильового вектору k , матимемо:

$$\bar{F} = k_y^2 \cdot h^2 + \frac{h^4 \cdot k^4}{12} - h^2 \cdot k^2; \quad \bar{M} = k_y^2 \cdot h^4 \cdot k^2 \cdot (1 - \mu^2) + \frac{h^6 \cdot k^6}{12}. \quad (18)$$

Тому залежність $\omega_2(k)$ - дисперсійна залежність для хвиль другого типу має вид:

$$\omega_2(k) = \left\{ \frac{E \cdot g}{\gamma \cdot (1 - \mu^2) \cdot h^2} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ -\frac{\bar{F}}{2} + \sqrt{\frac{\bar{F}^2}{4} + \bar{M}} \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

Тоді v_f розповсюдження хвилі, що задовольняє дисперсійному співвідношенню (19), визначається наступним чином:

$$v_f = \frac{\omega_2(k)}{k} = \left\{ \frac{E \cdot g}{\gamma \cdot (1 - \mu^2) \cdot h^2} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ -\frac{\bar{F}}{2} + \sqrt{\frac{\bar{F}^2}{4} + \bar{M}} \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{k}. \quad (20)$$

Для знаходження v_g цієї хвилі треба використати наступну залежність:

$$v_g = \frac{d\omega_2(k)}{dk} = \left\{ \frac{E \cdot g}{\gamma \cdot (1 - \mu^2) \cdot h^2} \right\}^{1/2} \cdot \frac{d}{dk} \left\{ -\frac{\bar{F}}{2} + \sqrt{\frac{\bar{F}^2}{4} + \bar{M}} \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Будемо вважати у подальшому аналізі, що збурення розповсюджується з постійною швидкістю v_g вповдовж твірної оболонки й повільно змінює свої параметри у часі. Згідно методу, розвинутому у [9], необхідно ввести у розгляд нові незалежні змінні й розкласти залежні змінні за степенями малого параметру ε , що відповідає припущенню про характер збурення.

Процедура стискання незалежних змінних, яка має у літературі назву «стискання змінних Гарднера – Морікави» [9], дозволяє ввести наступні незалежні змінні для біжучої нелінійної деформаційної хвилі:

$$\xi = \varepsilon^{1/2} \cdot (x - v_g \cdot t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} \cdot t. \quad (22)$$

Для залежних змінних U та W введемо наступний розклад за степенями ε :

$$U = U_0 + \varepsilon \cdot U_1; \quad W = W_0 + \varepsilon \cdot W_1. \quad (23)$$

Тут, у (23), U_0 та W_0 відповідають незбуреному (стаціонарному) значенню й характеризують положення рівноваги у системі переміщень циліндричної оболонки вповдовж осей Ox та Oy , відповідно.

Для просторово-одновимірного випадку (випадок циліндричної симетрії, у якому ігнорують залежністю від окружної координати) у першому наближенні (для U_1) маємо:

$$U_{1\xi\tau} + \alpha \cdot U_{1\xi} \cdot U_{1\xi\xi} - \beta \cdot U_{1\xi\xi\xi} = 0, \quad (24)$$

де

$$\alpha = \frac{(1 - \mu^2)^{1/2}}{2}, \quad \beta = \frac{\mu^2 \cdot (1 - \mu^2)^{1/2}}{2}.$$

Рівняння (24) для $U_{1\xi}$ є рівнянням Кортевега–де Вріза (КдВ). Його солітонні розв'язки добре відомі [5, 7]. Нижче наведені деякі частинні розв'язки рівняння КдВ (як у вигляді солітонів, так і у вигляді періодичних (кноїдальних) коливань).

Якщо ввести наступну заміну змінних: $U_{1\xi} = u$, $\alpha \cdot \tau = \tau'$, та позначити $-(\beta/\alpha) = K < 0$, тоді рівняння КдВ (24) набуває виду:

$$u_{\tau'} + u \cdot u_{\xi} + K \cdot u_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (25)$$

Його частинний розв'язок має вид [7]:

$$u(\xi, \tau') = u_{\infty} + a \cdot \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{a}{12 \cdot K}} \cdot [\xi - (a_{\infty} + a/3) \cdot \tau'] \right\}, \quad (26)$$

де a - амплітуда хвилі солітонного типу, u_{∞} - однорідний стан оболонки характеризує при $\xi \rightarrow \pm\infty$, a_{∞} - амплітуда солітона на $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Слід зробити наступні важливі зауваження щодо отриманого розв'язку (26)

1) швидкість хвилі відносно однорідного стану на нескінченності пропорційна амплітуді a . Це обумовлено ефектом нелінійності хвилі;

2) ширина хвилі, яка дорівнює $2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot K}{a}}$, обернено пропорційна квадратному кореню з амплітуди;

3) ширина хвилі пропорційна квадратному кореню з K , роль K полягає у розпливанні хвилі. Дисперсія нелінійної хвилі деформації проявляє себе у розпливанні цієї хвилі;

4) амплітуда не залежить від однорідного стану оболонки u_{∞} при $\xi = \pm\infty$;

5) у біжучій хвилі, яка представлена рівнянням (26), перехід від стану спокою при $\xi \rightarrow -\infty$ до стану спокою при $\xi \rightarrow +\infty$ локалізується у околі $\xi = 0$ й має дзвоноподібну форму. Саме тому такий процес прийнято називати усамітненою хвилею (солітоном)[7].

Розглянемо тепер інші можливі розв'язки (25), котрі є періодичними по біжучій координаті хвилі (т.з. кноїдальні хвилі). Будемо розшукувати розв'язки (25) у наступному виді:

$$u(\xi, \tau') = u(\zeta), \quad \zeta = \xi - c \cdot \tau', \quad (27)$$

де: c – швидкість розповсюдження хвилі деформації. Підставляючи (27) у (25), матимемо:

$$-c \cdot u_{\zeta} + u \cdot u_{\zeta} + K \cdot u_{\zeta\zeta} = 0. \quad (28)$$

Інтегруючи його, прийдемо до рівняння:

$$-c \cdot u + \frac{1}{2} \cdot u^2 + K \cdot u_{\zeta\zeta} = A, \quad A = \text{const}. \quad (29)$$

Помножимо (29) на u_{ζ} та проінтегруємо його, тоді матимемо:

$$-\frac{1}{2} \cdot c \cdot u^2 + \frac{1}{6} \cdot u^3 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot u_{\zeta}^2 = A \cdot u + \tilde{B}^*, \quad \tilde{B}^* = \text{const}, \quad (30)$$

або

$$3 \cdot K \cdot u_{\zeta}^2 = -u^2 + 3 \cdot c \cdot u^2 + 6 \cdot A \cdot u + 6 \cdot \tilde{B}^* \equiv f(u). \quad (31)$$

Запишемо (31) у наступному виді:

$$\frac{1}{2} \cdot u_{\zeta}^2 + \frac{1}{6} \cdot K^{-1} \cdot \{-f(u)\} = 0. \quad (32)$$

Розглянемо випадок, коли всі три корені кубічного рівняння $f(u)=0$ є дійсними величинами. (Це можна встановити, користуючись формулами й алгоритмом знаходження коренів цієї функції за Кардано). Не втрачаючи загальності, вважаємо, що ці корені $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ функції $f(u)$ дійсні та мають такий порядок величин $\bar{\alpha} \geq \bar{\beta} \geq \bar{\gamma}$. Далі для визначення величини параметрів c , A та $\tilde{B}$ у виразі для $f(u)$ використаємо наступні співвідношення:

$$c = \frac{1}{3} \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}); \quad A = -\frac{1}{6} \cdot (\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} + \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma} + \bar{\gamma} \cdot \bar{\alpha}); \quad \tilde{B}^* = \frac{1}{6} \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}. \quad (33)$$

Тоді, для $f(u)$ можна отримати таке співвідношення:

$$f(u) = (u - \bar{\gamma}) \cdot (u - \bar{\beta}) \cdot (\bar{\alpha} - u). \quad (34)$$

Для розв'язку $u(\zeta)$ (25) матимемо [7]:

$$u(\zeta) = \bar{\beta} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \cdot \text{cn}^2 \left\{ \zeta \cdot \sqrt{\frac{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}{12 \cdot K}}, \quad s \right\}, \quad s = \left(\frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}} \right)^{1/2}. \quad (35)$$

У (35) cn - еліптична функція Якобі. Слід зазначити, що період T функції $u(\zeta)$ за координатою ζ має наступну величину [7]:

$$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot K}{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}} \cdot \int_0^1 \frac{dq}{\left\{ (1 - s^2 \cdot q^2) \cdot (1 - q^2) \right\}^{1/2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot K}{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}} \cdot \tilde{K}(s), \quad (36)$$

де $\tilde{K}(s)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду. Слід зазначити, що у цьому випадку обмежений розв'язок рівняння КдВ описує періодичну хвилю, період котрої може бути визначений. У зв'язку з тим, що функція cn наявна у виразі $u(\zeta)$, відповідна хвиля називається кноїдальною [7].

Таким чином, загальний вираз для розв'язку (25) у вигляді кноїдальної хвилі має вид:

$$u \left\{ \xi - \frac{1}{3} \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) \cdot \tau' \right\} = \bar{\beta} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \cdot \text{cn}^2 \left[\left(\xi - \frac{1}{3} \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) \cdot \tau' \right) \cdot \sqrt{\frac{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}{12 \cdot K}}, \quad \left(\frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}} \right)^{1/2} \right]. \quad (37)$$

Для солітонного розв'язку (25) у біжучій системі координат можна знайти наступний розв'язок [7]:

$$u \left\{ \xi - \frac{1}{3} \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) \cdot \tau' \right\} = \bar{\gamma} + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) \cdot \text{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{(\bar{\alpha} - \bar{\gamma})}{12 \cdot K}} \cdot \left(\xi - \frac{1}{3} \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) \cdot \tau' \right) \right\}. \quad (38)$$

Зазначимо, що максимум солітонної хвилі (38) переміщується та визначається з умови рівності нулю змінної:

$$\zeta = \xi - (2\bar{\gamma} + \bar{\alpha}) \cdot \tau' / 3. \quad (39)$$

У випадку наявності розв'язку (38) $\bar{\alpha} > (\bar{\gamma} = \bar{\beta})$.

Період хвилі солітонного типу $T_{soliton}$ задається виразом (36):

$$T_{soliton} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot K}{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}} \cdot \int_0^1 \frac{dq}{(1 - q^2)} = \infty. \quad (40)$$

Проводячи аналогічні розрахунки для поздовжньо-зсувної деформації $U_{1\chi}$ циліндричної оболонки можна отримати наступне рівняння КдВ:

$$U_{1\chi\tau} + \alpha^2 \cdot U_{1\chi} \cdot U_{1\chi\chi} + \beta^2 \cdot U_{1\chi\chi\chi} = 0, \quad (41)$$

де

$$\chi = \xi + \eta, \quad \eta = \varepsilon^{1/2} \cdot y, \quad \alpha^2 = \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^{1/2} \cdot (1 + 2\mu), \quad \beta^2 = \mu \cdot (1 - \mu^2) \cdot (1 + 2\mu).$$

Отже, й у цьому випадку для рівняння (41) існують солітонні розв'язки та кноїдальні періодичні хвильові розв'язки, аналогічні наведеним вище для рівнянь (24) та (25), з тією лише різницею, що тепер:

$$U_{1\chi} = \bar{u}, \quad \alpha^2 \cdot \tau = \tau', \quad (\beta^2 / \alpha^2) = K^* > 0, \quad U_1 = U_1(\chi, \tau'). \quad (42)$$

Всебічний аналіз тепер проводиться для поздовжньо-зсувної деформації $U_{1\chi} = \bar{u}$ в межах наступного рівняння:

$$\bar{u}_{\tau'} + \bar{u} \cdot \bar{u}_{\chi} + K^* \cdot \bar{u}_{\chi\chi\chi} = 0. \quad (43)$$

Таким чином, проведений за допомогою редукційного методу збурень [9] аналіз рівнянь (24), (25) та (41), (43), дозволяє наступним чином описати просторово-часову еволюцію слабо двовимірного пучка нелінійних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль у пружній циліндричній оболонці.

Існує швидкий (лінійний) масштаб часу, протягом якого існує хвиля, що біжить без зміни профілю з постійною швидкістю.

Далі, існує більш повільний масштаб часу, протягом якого зміна параметрів хвилі за рахунок нелінійності, дисперсії та дифракційної розбіжності призводить до розбиття вихідного імпульсу на одновимірні (або слабо двовимірні) солітони чи утворюються кноїдальні (періодичні) хвилі.

Взаємодія нестійких до поперечних збурень солітонів поздовжніх хвиль деформацій з хвилями поздовжньо-зсувного типу (солітонами/кноїдальними хвилями) призводить до їх перекидання [10] та, можливо, й до руйнування. Ця обставина відрізняє суттєво просторово-часову еволюцію солітонів у деформованих твердих тілах від гідродинамічних солітонів, котрі руйнуються поступово, внаслідок природної дисипації.

При розв'язуванні багатьох динамічних задач механіки суцільного середовища з'являється необхідність врахування дисипації енергії. У теорії оболонок енергетичні втрати зазвичай враховуються шляхом введення у рівняння (4) додаткової складової $\varepsilon_0 \cdot \gamma \cdot W_t / g$ (ε_0 - коефіцієнт демпфування, так зване конструктивне демпфування). Тоді редукційний метод збурень за виконання умови $\varepsilon_0 \sim \varepsilon^{1/2}$ дозволяє замість рівняння (24) отримати близьке до інтегрованих рівняння Кортевега – де Вріза - Бюргерса (КдВБ):

$$U_{1\xi\tau} + \alpha \cdot U_{1\xi} \cdot U_{1\xi\xi} + \bar{\chi} \cdot U_{1\xi\xi\xi} - \beta \cdot U_{1\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (44)$$

де

$$\alpha = (1 - \mu^2)^{1/2} / 2, \quad \beta = \mu^2 \cdot (1 - \mu^2)^{1/2} / 2, \quad \bar{\chi} = -\mu^2 / 2,$$

μ - коефіцієнт Пуассона, а змінні ξ, τ введені вище, при виведенні рівняння (24) (див. І частину дослідження). Якщо ввести заміну: $U_{1\xi} = \bar{u}$, $\tau \rightarrow \tau' = \alpha \cdot \tau$, $-\frac{\beta}{\alpha} = \beta^*$, $-\frac{\bar{\chi}}{\alpha} = \chi^*$, тоді рівняння (44) набуває загально прийнятої форми запису, відомої у літературі:

$$\tilde{u}_{\tau'} + \tilde{u} \cdot \tilde{u}_{\xi} + \beta^* \cdot \tilde{u}_{\xi\xi\xi} = \chi^* \cdot \tilde{u}_{\xi\xi}. \quad (45)$$

Складова у рівнянні (45) з третьою похідною характеризує дисперсію хвиль, а складова з другою похідною відповідає за дисипацію [11]. Таким чином, рівняння (45) узагальнює рівняння КдВ на випадок врахування дисипативних процесів і має назву рівняння КдВБ. Відомо [11], що рівняння (45) на відміну від рівняння КдВ не проходить тест Пенлеве й не відноситься до класу точно інтегрованих рівнянь. Воно не має розв'язків у вигляді солітонів, але має аналітичні розв'язки у вигляді кінків, котрі за своєю сутністю є також уособленими/усамітненими хвилями [12-14]. Однак, при взаємодії цих хвиль з іншими у циліндричній оболонці виникає випромінювання, що показує наступне: ці уособлені/усамітнені хвилі не взаємодіють (у т.ч. й між собою, й з іншими типами хвиль) як солітони, котрі описуються рівнянням КдВ.

У роботі [11] знайдені точні аналітичні розв'язки рівняння КдВБ (45) методом скороченого розкладу.

А. Розв'язок рівняння КдВБ (45) з використанням еліптичної функції Вейерштрасса.

За допомогою змінної $\bar{z}$ біжучої зі швидкістю c_0 хвилі:

$$\tilde{u}(\xi, \tau') = Y(\bar{z}), \quad \bar{z} = \xi - c_0 \cdot \tau' + \varphi_0, \quad (46)$$

де φ_0 - початкова фаза, рівняння (45) після інтегрування по $\bar{z}$ приймає вид:

$$C_1 - C_0 \cdot Y + \frac{1}{2} \cdot Y^2 + \beta^* \cdot Y_{\bar{z}\bar{z}} - \chi^* \cdot Y_{\bar{z}} = 0, \quad (47)$$

де C_1, C_0 - константи інтегрування.

Загальний розв'язок (47) існує при умові:

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot C_0^2 - \frac{18 \cdot (\chi^*)^4}{625 \cdot (\beta^*)^2} \quad (48)$$

й має вид [12]:

$$Y(\bar{z}) = C_0 + \frac{6 \cdot (\chi^*)^2}{25 \cdot \beta^*} + (\bar{a})^3 \cdot C_3^2 \cdot \exp(-2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{\varsigma}) \cdot G(C_3 \cdot \exp(-\bar{a} \cdot \bar{\varsigma}) + C_2; 0; -1), \quad (49)$$

де

$$\bar{a} = -\frac{\{60 \cdot (\chi^*)^2 \cdot (\beta^*)^2\}^{1/3}}{5 \cdot \beta^*}, \quad \bar{\varsigma} = \frac{\{60 \cdot (\chi^*)^2 \cdot (\beta^*)^2\}^{1/3}}{\chi^*} \cdot \bar{z}, \quad (50)$$

$G(\xi, m_1, m_2)$ - еліптична функція Вейерштрасса, $(m_1, m_2) \in Z$, C_2, C_3 - вільні параметри.

Б. Розв'язок рівняння КдВБ (45) у вигляді кінка постійної амплітуди, котрий розповсюджується у циліндричній оболонці з постійною швидкістю.

Використовуючи метод скороченого розкладу [12] можна отримати розв'язок рівняння КдВБ (45) у вигляді кінка постійної амплітуди, котрий розповсюджується у циліндричній оболонці з постійною швидкістю. Цей розв'язок (кінк) можна подати наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, \tau') = \bar{C}_2 + \frac{12 \cdot \beta^* \cdot k^2 \cdot \exp(k \cdot \xi - \omega \cdot \tau' + \varphi_0)}{1 + \exp(k \cdot \xi - \omega \cdot \tau' + \varphi_0)} - \frac{12}{5} \cdot \frac{\chi^* \cdot \exp(k \cdot \xi - \omega \cdot \tau' + \varphi_0)}{1 + \exp(k \cdot \xi - \omega \cdot \tau' + \varphi_0)} + \\ + (-1) \cdot \frac{12 \cdot \beta^* \cdot k^2 \cdot \exp(2 \cdot k \cdot \xi - 2 \cdot \omega \cdot \tau' + 2 \cdot \varphi_0)}{\{1 + \exp(k \cdot \xi - \omega \cdot \tau' + \varphi_0)\}^2}, \end{aligned} \quad (51)$$

де k, ω - визначаються через параметри β^*, χ^* наступними співвідношеннями:

$$k_{1,2} = \mp \frac{\chi^*}{5 \cdot \beta^*}, \quad \omega_{1,2} = -\frac{6}{125} \cdot \frac{(\chi^*)^2}{(\beta^*)^2} \mp \frac{\chi^* \cdot \bar{C}_2}{5 \cdot \beta^*}, \quad (52)$$

де $\bar{C}_2$ - довільна стала.

Графік розв'язку (51), (52) поданий на рис. 1.

Висновки

1. Проаналізована за допомогою редуційного методу збурень просторово-часова еволюція нелінійних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль у пружних циліндричних оболонках в межах теорії Кірхгофа-Лява.

2. Встановлено, що у пружних циліндричних оболонках (у одновимірній постановці задачі) існують одновимірні солітони та нелінійні періодичні хвилі (типу кноідальних), які є частинними розв'язками рівняння КдВ. Знайдені аналітичним шляхом всі основні параметри зазначених типів хвилеутворень.

3. Врахування дисипативних ефектів дозволило отримати для компоненти поздовжньої деформації еволюційне рівняння КдВБ, яке близьке до інтегрованих. Знайдені аналітичним шляхом (із використанням методу скороченого розкладу) частинні розв'язки цього рівняння у формі кінків та хвилеутворень, котрі описуються еліптичною функцією Вейерштрасса.

4. У подальшому, отримані у даній роботі результати будуть використані задля аналізу просторово-часової еволюції нелінійних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль у нелінійно-пружних циліндричних оболонках як у одновимірній, так і у двовимірній постановці задачі Коші.

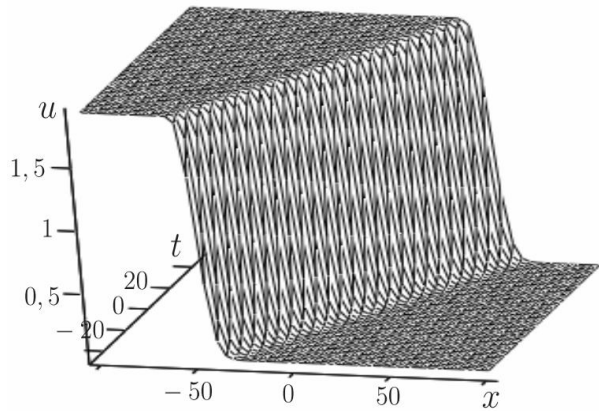


Рис. 1. Залежність від $x(\equiv \xi)$ та $t(\equiv \tau')$ розв'язку рівняння (51)

$u(x,t)(\equiv \tilde{u}(\xi, \tau'))$ (у вигляді кінку) рівняння КдБ (45)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Потапов А.И. Нелинейные волны деформаций в стержнях и пластинах. - Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985. 68с.
- Кившарь Ю.С., Сыркин Е.С. Сдвиговые солитоны в упругой пластине. - Акустический журнал. 1991. Т. 37. Вып. 1.
- Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.: Наука, 1972. 320с.
- Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Эволюция нелинейных продольных волн в цилиндрических оболочках. - Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1993. 45с. Деп. в ВИНТИ № 1737-B93.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. 450с.
- Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках. Известия вузов «ПНД». 1995. Т. 3. №1. С. 52-57.
- Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. - М.: Мир, 1983. 136с.
- Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. - М.: Мир, 1972. 560с.
- Taniuti T., Wei C.C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. I. Journal of the Physical Society of Japan. 1968. Vol. 24. P. 941-966.
- Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны. - М.: Наука, 1991. 260с.
- Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. - М.: МИФИ, 2008. 352с.
- Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений, Институт компьютерных исследований. М.-Ижевск: РХД, 2004. — 360 с.
- Кудряшов Н.А. // Прикладная математика и механика, 1988. Т.52. С. 361–365.
- Kudryashov N.A. // Physics Letters A., 2005. V.342. P. 99–106.

REFERENCES

- Potapov A.Y. Nelineinie volni deformatsii v sterzhnyakh i plastinakh (Nonlinear deformation waves in rods and plates). - Horkyi: Yzd-vo Hork. un-ta, 1985. 68s.
- Kyvshar Yu.S., Syrkyn E.S. Sdvigovye solitoni v uprugoi plastine (Shear solitons in an elastic plate). - Akusticheskii zhurnal. 1991. T. 37. Вып.1.
- Volmyr A.S. Nelyneinaia dynamika plastynok i obolochek (Nonlinear dynamics of plates and shells). - M.: Nauka, 1972. 320s.
- Zemlianukhyn A.Y., Mohylevych L.Y. Evolyutsiya nelineinikh prodolnykh voln v tsilindricheskikh obolochkakh (Evolution of nonlinear longitudinal waves in cylindrical shells). - Saratov: Sarat. hos. tekhn. un-t, 1993. 45s. Dep. v VYNYTY № 1737-V93.
- Uyzem Dzh. Lineinie i nelineinie volni (Linear and nonlinear waves). - M.: Myr, 1977. 450s.
- Zemlianukhyn A.Y., Mohylevych L.Y. Nelineinie volni deformatsii v tsilindricheskikh obolochkakh (Nonlinear deformation waves in cylindrical shells). - Yzvestiya vuzov «PND». 1995. T. 3. №1. S. 52-57.
- Bkhatnagar P. Nelineinie volni v odnomernykh dispersnykh sistemakh (Nonlinear waves in one-dimensional disperse systems). - M.: Myr, 1983. 136s.

8. Koul Dzh. Metodi vozmushchenii v prikladnoi matematike (Perturbation methods in applied mathematics). – М.: Myr, 1972. 560s.
9. Taniuti T., Wei C.C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. I. Journal of the Physical Society of Japan. 1968. Vol. 24. P. 941-966.
10. Bohoiavlenskiy O.Y. Oprokidivayushchiesya solitoni (Overturning solitons). – М.: Nauka, 1991. 260s.
11. Kudriashov N.A. Metodi nelineinoi matematicheskoi fiziki (Methods of nonlinear mathematical physics). – М.: MYFY, 2008. 352s.
12. Kudriashov N.A. Analiticheskaya teoriya nelineinikh differentsialnykh uravnenii (Analytical theory of nonlinear differential equations) - Institut kompyuternykh issledovaniy. M.–Izhevsk: RKhD, 2004. — 360 s.
13. Kudriashov N.A. // Prikladnaya matematika i mekhanika (Applied Mathematics and Mechanics) - 1988. T.52. S. 361–365.
14. Kudryashov N.A. // Physics Letters A., 2005. V.342. P. 99–106.

Стаття надійшла 08.08.2025

Човнюк Ю.В., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П., Топал С.С.

ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА ЕВОЛЮЦІЯ ОДНОВИМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ ДЕФОРМАЦІЙ У ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКАХ

У роботі обґрунтовані фізико-механічна та математична моделі, які призначені для аналізу нелінійних хвилювань у циліндричних пружних оболонках. Використовуючи редукційний метод збурень, досліджена просторово-часова еволюція нелінійних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль у пружних циліндричних оболонках в межах теорії Кірхгофа-Лява. Встановлено, що у пружних циліндричних оболонках (у одновимірній постановці задачі) існують одновимірні солітони та нелінійні періодичні хвилі (типу кноїдальних), які є частинними розв'язками рівняння Кортевега - де Вріза (КдВ). Знайдені аналітичним шляхом всі основні параметри зазначених типів хвилювань. Врахування дисипативних ефектів дозволило отримати для компоненти поздовжньої деформації еволюційне рівняння Кортевега – де Вріза - Бюргерса (КДБ), яке близьке до інтегрованих. Знайдені аналітичним шляхом (із використанням методу скороченого розкладу) частинні розв'язки цього рівняння у формі кінків та хвилювань, котрі описуються еліптичною функцією Вейерштрасса. Проведений аналіз дозволяє наступним чином описати просторово-часову еволюцію слабо двовимірного пучка нелінійних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль у пружній циліндричній оболонці. Існує швидкий (лінійний) масштаб часу, протягом якого існує хвиля, що біжить без зміни профілю з постійною швидкістю. Далі, існує більш повільний масштаб часу, протягом якого зміна параметрів хвилі за рахунок нелінійності, дисперсії та дифракційної розбіжності призводить до розбиття вихідного імпульсу на одновимірні (або слабо двовимірні) солітони чи утворюються кноїдальні (періодичні) хвилі. Взаємодія нестійких до поперечних збурень солітонів поздовжніх хвиль деформації з хвилями поздовжньо-зсувного типу (солітонами/кноїдальними хвилями) призводить до їх перекидання та, можливо, й до руйнування. Ця обставина відрізняє суттєво просторово-часову еволюцію солітонів у деформованих твердих тілах від гідродинамічних солітонів, котрі руйнуються поступово, внаслідок природної дисипації.

Ключові слова: еволюція, одновимірні нелінійні хвилі деформації, циліндричні оболонки, кноїдальні хвилі, солітони, пружність, рівняння КдВ.

Chovniuk Yu.V., Priymachenko O.V., Cherednichenko P.P., Topal S.C.

SPATIAL AND TEMPORAL EVOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR DEFORMATION WAVES IN CYLINDRICAL SHELLS

In this paper, the physical-mechanical and mathematical models designed to analyze nonlinear wave formations in cylindrical elastic shells are substantiated. Using the perturbation reduction method, the spatial and temporal evolution of nonlinear longitudinal and longitudinal-shift waves in elastic cylindrical shells in the framework of Kirchhoff-Liave theory is investigated. It is established that in elastic cylindrical shells (in one-dimensional formulation of the problem) there exist one-dimensional solitons and nonlinear periodic waves (of the cnoidal type), which are partial solutions of the Korteweg-de Vries equation (KdV). All the main parameters of these types of waveforms are analytically found. Taking into account dissipative effects, the evolutionary Korteweg-de Vries-Burgers equation (KDB), which is close to the integrated ones, was obtained for the longitudinal deformation component. Partial solutions of this equation in the form of kinks and waveforms, which are described by the elliptic Weierstrass function, have been found analytically (using the reduced expansion method). The analysis performed allows us to describe the spatial and temporal evolution of a weakly two-dimensional beam of nonlinear longitudinal and longitudinal-shift waves in an elastic cylindrical shell as follows. There is a fast (linear) time scale during which there exists a wave running without profile change with constant velocity.

Further, there is a slower time scale, during which the change of wave parameters due to nonlinearity, dispersion, and diffraction divergence leads to the splitting of the initial pulse into one-dimensional (or weakly two-dimensional) solitons or the formation of cnoidal (periodic) waves. The interaction of longitudinal deformation waves unstable to transverse perturbations with longitudinal-shift waves (solitons/cnoidal waves) leads to their overturning and, possibly, to their destruction. This circumstance essentially distinguishes the spatial and temporal evolution of solitons in deformed solids from hydrodynamic solitons, which collapse gradually due to natural dissipation.

Keywords: evolution, one-dimensional nonlinear deformation waves, cylindrical shells, cnoidal waves, solitons, elasticity, KdV equation.

УДК 534.222: 539.3

Човнюк Ю.В., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П., Топал С.С. **Просторово-часова еволюція одновимірних нелінійних хвиль деформацій у циліндричних оболонках** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА. 2025. – Вип. 115. – С. 304-314. – Укр.

Проаналізована просторово-часова еволюція одновимірних поздовжніх та поздовжньо-зсувних хвиль у пружних оболонках. У пружних оболонках виявлені одновимірні періодичні (кноїдальні) хвилі та солітони рівняння Кортевега – де Вріса (КдВ). Знайдені частинні аналітичні розв'язки задачі Коші.

Лл. 1. Бібліогр. 14 назв.

UDC 534.222: 539.3

Chovnyuk Yu.V., Prymachenko O.V., Cherednichenko P.P., Topal S.C. **Spatial and temporal evolution of one-dimensional nonlinear deformation waves in cylindrical shells** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA. 2025. – Issue 115. – P. 304-314.

In this paper, the physical-mechanical and mathematical models designed to analyze nonlinear wave formations in cylindrical elastic shells are substantiated. Using the perturbation reduction method, the spatial and temporal evolution of nonlinear longitudinal and longitudinal-shift waves in elastic cylindrical shells in the framework of Kirchhoff-Liave theory is investigated.

Figs. 1. Refs. 14.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізичного виховання і спорту КНУБА,

Човнюк Юрій Васильович

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38(096) 570-45-65

E-mail: ychovnyuk@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-0608-0203>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри міського будівництва КНУБА, Приймаченко Олексій Віталійович,

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38(067) 266-81-97

E-mail: prymachenko.ov@knuba.edu.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-5125-8472>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доцент, доцент кафедри міського будівництва КНУБА, Чередніченко Петро Петрович

Адреса: 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

Тел.: +38(067) 442-23-36

E-mail: petro_che@ukr.net

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-7161-661X>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри міського будівництва і господарства ОДАБА, Топал Світлана Степанівна

Адреса: 03037 Україна, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4, Одеська державна академія будівництва і архітектури

Тел.: +380679268969

E-mail: svetlanatopal07@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-8330-4066>