

УДК 539.3

## ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ СТІЙКОСТІ І ВАГИ ОБОЛОНКИ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

**Г.М. Іванченко,**

д-р техн. наук, професор

**О.О. Кошевий,**

д-р філософії (Ph.D.), доцент

*Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ*

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.115.231-243

В статті розглянуто дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації міцності і ваги оболонки мінімальної поверхні на квадратному плані, яка складається з двох прямих ліній і двох півкіл. Цільові функції представлені у вигляді ваги оболонки мінімальної поверхні та стійкості, а саме коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$ . Змінні проектування представлені у вигляді товщини оболонки мінімальної поверхні від 1 до 200 мм. Обмеження та ліміти оптимізаційного розрахунку були напруження по Мізесу та коефіцієнт  $\lambda \geq 1$ , що дає змогу максимального використання конструкційного матеріалу.

Результатами дослідження є зменшення ваги на 17.75%, а коефіцієнт  $\lambda = 1.08$ . Оптимізаційний розрахунок проводився з урахуванням геометричної нелінійності, що дало змогу додатково зменшити вагу конструкції за рахунок значень дійсних вузлових переміщень. Дана методика використовується вперше і є цікавою задачею для подальшого дослідження.

**Ключові слова:** оптимізація, параметрична оптимізація, багатокритеріальна оптимізація, оптимізація цільової функції, змінні проектування, обмеження, оболонки мінімальних поверхонь, геометрична нелінійність, метод скінченних елементів.

**Вступ.** Оптимальне проектування відіграє важливу роль в підході і формуванні будівельних конструкцій. Даний етап розрахунку конструкцій досить мало вивчений і фактично не використовується практикуючими інженерами в області механічного опору та стійкості. Перші наближення до поперечного перерізу конструкції формуються з власного досвіду, що звужує сприйняття суб'єктивним мисленням, автоматизація даного процесу дає можливість подивитися на цю задачу з іншого боку і знайти за рахунок математичних методів краще рішення [1].

Активний розвиток оптимального проектування розпочався в середині ХХ століття з розвитком ЕОМ. Перші роботи були виконані на власному програмного забезпеченні на мові `fortran`. Більше ніж за пів століття модернізувалися ЕОМ в ПК, а також були створені програмні комплекси такі як `Femap` та `Ansys` в яких є розділи оптимального проектування. Для оптимального проектування досить унікальних конструкцій недостатньо мати базового функціонального набору в даних розрахункових комплексів, тому для цікавих цільових функцій по типу стійкості і ваги є необхідність дописати дану частину до оптимізаційного функціоналу. Власний оптимізаційний функціонал написаний за допомогою пакету прикладних програм, які підключаються до `Femap` і працює з ним як одне ціле. Пакет програмного забезпечення створений власними силами співробітниками КНУБА, в ньому постійно доповнюється новий функціонал [2-4].

Оболонки складної форми знаходять застосування в різних сферах економіки починаючи з будівництва та закінчуючи військово-промисловим комплексом. При дослідженні тонкостінних оболонок використовується класична теорія, яка базується на гіпотезах Кіргофа-Лява. Об'єктом дослідження виступають тонкостінні оболонки мінімальних поверхонь. Суть цих просторових конструкцій полягає у унікальності їх поверхні, яка була оптимізована за допомогою методу продовження по параметру, який базується на визначеному контурі та висоти майбутньої оболонки мінімальної поверхні. Після інтегрування виводиться оптимальна форма для майбутньої конструкції, яка має мінімальну площу та мінімальні внутрішні зусилля, які компенсує геометрична форма тонкостінної оболонки мінімальної поверхні [5].

Комбінація зовнішнього навантаження прикладена з урахуванням статичних та термічного впливу, розрахунок відбувається у геометрично нелінійній постановці. Для розрахунку унікальних конструкцій по типу оболонок мінімальних поверхонь є необхідність враховувати дійсні

переміщення та прогини за рахунок геометричної нелінійності, це дає більш точнішу картину НДС та можна з цим врахуванням підібрати більш точно товщину тонкостінної конструкції.

Важливим елементом є цільова функція – стійкість, розрахунок в розрахунковому комплексі Femap відбувається в режимі Buckling – окремий вид розрахунку конструкцій, який дає змогу бачити форми та значення  $\lambda$  втрати стійкості [6].

Оптимальне проектування в будівельній і прикладній механіці розділяється на чотири види. Перший вид – оптимізація форми, цей вид оптимізації дає змогу підбирати форму стержневих та просторових конструкцій в яких внутрішні зусилля практично дорівнюють нулю за рахунок створення оптимальної форми. Другий вид – параметрична оптимізація, цей вид дає можливість оптимізувати будь-які параметри майбутньої конструкції, які можуть слугувати економії матеріалів, розглядати конструкцію з різних сторін та давати можливість використовувати матеріал з максимальною віддачу. Третій вид – топологічна оптимізація, фактично це можливість з нульових ненавантажених зон прибирати зайвий матеріал, при цьому відбувається перерозподіл напружень на інші скінченні елементи, які несуть основний напружено-деформований стан оптимізованої конструкції. Четвертий вид – оптимізація фізико-механічних характеристик, цей вид оптимізації дає можливість створенню нових матеріалів, так званих композитів, які мають досить високу міцність на згин та розтяг, що можуть витримувати великі навантаження та давати велику віддачу несучого матеріалу в цілому [7-8].

Сучасні задачі оптимального проектування – це комбінації цих видів оптимізації на одному досліджуваному об'єкті. В даній науковій статті розглядається як раз такий вид задачі, де одночасно використовується оптимізація форми та багатокритеріальна параметрична оптимізація. В загальному досліджувані літературних джерел використання декількох видів оптимізації на одному об'єкті дослідження є великою рідкістю і фактично не вивченою областю будівельної механіки.

Окремий вид оптимального проектування – параметрична оптимізація. Вона буває однокритеріальною і багатокритеріальною. До основних цільових функцій відноситься: вага, міцність, частоти і форми коливання оболонки, об'єм, стійкість, напруження, переміщення. Всі основні параметри просторової тонкостінної конструкції, які інженер-проектувальник розглядає за двома групами граничних станів. Даний вид оптимізації є найбільш розповсюджений в роботах будівельної і прикладної механіки, велику частину досліджень використовують в будівельних конструкціях, які досліджують напружено-деформований стан в оптимізованому об'єкті дослідження.

Наразі набуває новий вид розрахунку оптимального проектування де використовується фізична і геометрична нелінійність. Ці додаткові можливості дають більшу віддачу несучого матеріалу при дослідженні об'єктів з їх наявності.

Класична схема оптимального проектування виглядає наступним чином. Є певна цільова функція, яка може мати максимум ці мінімум на даному відрізку дослідження. Цільова функція – це мета оптимізаційного розрахунку, наприклад мінімальна вага, або максимальне використання розрахункового опору сталі на розтяг, що показує в кожному скінченному елементі при марки сталі С245, 240 МПа, або максимально допустимі переміщення. Такий вид цільових функцій є досить ефективний, якщо в ньому потім враховуються всі перевіірочні розрахунки. Змінні проектування, як правило, відповідають за геометричні характеристики конструкції: товщина оболонки, форма поперечного перерізу балки, момент інерції, момент опору, радіус інерції, площа поперечного перерізу. В оптимізаційному розрахунку відбувається зміна геометричних характеристик, які можуть збільшуватися або зменшуватися в залежності руху до цільової функції та обмежень. Третій заключний елемент класичної схеми оптимального проектування – є обмеження або ліміти. Це один із ключових елементів оптимізаційного розрахунку під який підлаштовуються змінні проектування – геометричні характеристики конструкції. Для прикладу обмеження можуть бути: вага, об'єм, всі види напруження, переміщення, всі внутрішні зусилля, коефіцієнт втрати стійкості, моменти інерції, кути повороту. Обмеження можуть використовуватися декілька штук одночасно в одному чисельному експерименті параметричної оптимізації, це можуть бути в однокритеріальній так і багатокритеріальній. Застосування декількох видів обмежень не рахується як багатокритеріальна оптимізація, так як може при цьому мати одну тільки цільову функцію. Багатокритеріальна параметрична оптимізація рахується лиш тоді, коли є дві і більше цільових

функцій, на яких можуть знаходити точки оптимуму, що є фактично перетин цих двох цільових функцій. По Паррету, вони можуть бути незалежними один від одного, давати синергію, або конфліктувати [9-10]. Загалом цей механізм працює не тільки в механіки чи в математиці, а і в інших моделях чи методах, наприклад, економіка чи менеджмент.

**Матриця жорсткості скінченно-елементної моделі з урахуванням геометричної нелінійності для оболонки мінімальної поверхні [11-12].**

Матриця жорсткості – для всього тіла формується на основі матриці жорсткості скінченних елементів. При цьому передбачається, що енергія пружної деформації скінченно-елементної моделі дорівнює сумі енергій скінченних елементів:

$$U = \sum_{l=1}^m U_{(l)}, \quad (1)$$

де  $U_{(l)}$  – енергія деформації елемента з урахуванням геометричної нелінійності;  $m$  – загальна кількість скінченних елементів.

Враховуючи співвідношення

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \{u\}^T [B]^T [E] [B] \{u\} dS. \quad (2)$$

Доповнимо вираз

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \{u\}_{(l)}^T [k]_{(l)} \{u\}_{(l)}. \quad (3)$$

Ведемо в розгляд вектор переміщень вузлів всієї скінченно-елементної моделі.

$$\{\bar{u}\} = \{u_1^{-(1)} u_2^{-(1)} u_1^{-(2)} u_2^{-(2)} \dots u_1^{-(n)} u_2^{-(R)}\}^T. \quad (4)$$

де  $n$  – кількість глобальних вузлів скінченно-елементної моделі;  $u_1^{(k)}$  – переміщення вузла з глобальним номером  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) по напрямку координатної осі  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Вектор переміщень вузлів скінченного елемента  $\{\bar{u}\}_l$  складається із компонентів вузових переміщень  $\{\bar{u}\}_1^k$ , який розташовується в порядку локальних номерів  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) вузлів. Оскільки вектори  $\{\bar{u}\}$  і  $\{\bar{u}\}_l$  характеризує переміщення з одним і тим же вузлів при різних ітераціях геометричної нелінійності і способі нумерації, вони можуть бути виражені один через одного за допомогою матриці інцидентності  $[i]_{(l)}$

$$\{\bar{u}\}_l = [i]_{(l)} \{\bar{u}\}. \quad (5)$$

Матриця  $[i]_{(l)}$  представляє собою таблицю із нулів і одиниць, число стовпців  $q$  яких рівно порядку вектору  $\{\bar{u}\}$ , а число рядків  $p$  – порядку вектора  $\{\bar{u}\}_l$ . Одиниці ставлять на перетині рядків і стовпців, які відповідають одним і тим же переміщенням. Положення одиниць в матриці інцидентності для довільного скінченного елемента визначається формулами.

$$n_p = j + 2(n_{\text{лок}} - 1), \quad (6)$$

$$n_q = j + 2(n_{\text{гл}} - 1), \quad (7)$$

де  $n_p$  – номер рядка;  $n_q$  – номер стовпця матриці  $[i]_{(l)}$ ;  $j = 1, 2$  – номер напрямлення переміщення у вузлі з локальним номером  $n_{\text{лок}}$  і глобальним номером  $n_{\text{гл}}$ . Підставляємо формули (3)-(7) і отримуємо

$$u = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m [i]_{(l)} \{\bar{u}\}^T [k]_{(l)} [i]_{(l)} \{\bar{u}\}. \quad (8)$$

Враховуючи матричну рівність

$$([i]_{(l)} \{\bar{u}\})^T = \{\bar{u}\}^T [I]_{(l)}^T, \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T \left( \sum_{l=1}^m [i]_{(l)}^T [k]_{(l)} [i]_{(l)} \right) \{\bar{u}\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [\bar{k}] \{\bar{u}\}, \quad (10)$$

де

$$[\bar{k}] = \sum_{l=1}^m [i]_{(l)}^T [k]_{(l)} [i]_{(l)}. \quad (11)$$

Вираз (11) матриця жорсткості всього тіла. Матриця жорсткості  $[k]$  для двовірної скінченно-елементної моделі з двома ступенями свободи вузол має розмірність  $2n \times 2n$ , його структура симетрична  $k_{ij} = k_{ji}$  і  $k_{ij} \geq 0$ . Кожен коефіцієнт  $k_{ij}$  матриці жорсткості представляє собою  $R_l$  по напрямку  $L$ , яке визвано переміщеннями  $\bar{u}_j = 1 (i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n)$ .

Діюча область або на контурі навантаження приводиться до статичного еквівалентного вузлового навантаження, яке діє на конструкцію, і при ітераційному розрахунку дає вузлові переміщення, які за допомогою розрахункового комплексу Femap with Nastran передаються як напружено-деформований стан конструкції що і є геометричною нелінійністю [13-15]

$$A = \iint_S \{u\}^T \{G\} ds + \int_L \{u\}^T \{F\} dL = \{u\}^T \{Q\}, \quad (12)$$

де  $\{Q\}$  – вузлові сили,  $\{G\}$  і  $\{F\}$  матриці розподіленого навантаження.

**Система розв'язуючих з урахуванням геометричної нелінійності оболонки мінімальної поверхні методом скінченних елементів** [16]. Систему розв'язуючих рівнянь методу скінченних елементів формують, використовуючи варіаційний принцип Лагранжа, у відповідності з яким повна потенціальна енергія  $\Pi$  скінченно-елементної моделі тіла знаходиться в стані стійкості і рівноваги має мінімальне значення.

Умова мінімуму буде використано, коли частинні похідні від потенціальної енергії  $\Pi$  по всім вузлом переміщенням  $\{\bar{u}\}$  дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\bar{u}\}} = 0. \quad (13)$$

Повна потенціальна енергія скінченно-елементної моделі дорівнює:

$$\Pi = U - A = \frac{1}{2} \{u\}^T [\bar{k}] \{\bar{u}\} - \{u\}^T \{Q\}. \quad (14)$$

Після диференціювання згідно (13) отримаємо систему розв'язуючих рівнянь методу скінченних елементів:

$$[\bar{k}] \{\bar{u}\} - \{Q\} = 0. \quad (15)$$

В системі рівнянь (15) не враховані граничні умови відносно переміщень. Для приведення рівняння у відповідність із заданими значеннями вузлових переміщень необхідно виконати наступні зміни матриці жорсткості  $[\bar{k}]$  і вектора вузлових навантажень  $\{Q\}$  скінченно-елементної моделі. В першому варіанті в  $[\bar{k}]$  і  $\{Q\}$  записуються нулі в рядках, які відповідають відомим переміщенням, за виключенням діагональних членів матриці  $[\bar{k}]$ , які прирівнюються до одиниці. В другому варіанті стовпці матриці  $[\bar{k}]$ , які відповідають відомим переміщенням, множаться на ці переміщення і зі зворотнім знаком додається з відповідними компонентами вектора  $\{Q\}$ , після чого у вказаному стовпці матриці  $[\bar{k}]$  (крім діагональних елементів) записуються нулі. Перетворена система рівнянь приймає вигляд

$$[\bar{K}] \{\bar{U}\} - \{Q\} = 0. \quad (16)$$

Розв'язок системи рівнянь (16), як правило, виконується прямими методами, враховуючи особливості структури матриці (лінійність і симетрію відносно головної діагоналі).

Величини деформації і напружень в скінченному елементі визначається за формулами:

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\} = [\partial] [N] \{u\} = [B] \{u\}, \quad (17)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{z\} = [E][B]\{u\}. \quad (18)$$

Попередньо із вектора переміщення скінченно-елементної моделі  $\{\bar{u}\}$  виділяється вектор переміщення  $\{\bar{u}\}_{(l)}$  скінченного елемента за допомогою матриці інцидентності

$$\{\bar{u}\}_{(l)} = [i]_{(l)} \{\bar{u}\}. \quad (19)$$

Викладена методика отримання співвідношення методу скінченних елементів з урахуванням геометричної нелінійності не залежить від форми і властивостей скінченних елементів, тому може бути впроваджена для пластинчастого скінченного елемента оболонки мінімальної поверхні [17].

Нижче представлені значення матриці для тонкої пластини, яка працює на згин чотирикутного тонкого скінченного елемента **plate**:

$$[N] = [N_{11}N_{12}N_{13}N_{21}N_{22}N_{23}N_{31}N_{32}N_{33}N_{41}N_{42}N_{43}], \quad (20)$$

$$N_{i_1} = \frac{1}{8} \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right) \left( 2 + \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + \frac{x_2}{x_2^{(i)}} - \frac{x_1^{(2)}}{a_1^2} - \frac{x_2^{(2)}}{a_2^2} \right), \quad (21)$$

$$N_{i_2} = \frac{x_1^{(i)}}{8} \left( \frac{x_1^{(2)}}{a_1^2} - 1 \right) \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right), \quad (22)$$

$$N_{i_3} = \frac{x_2^{(i)}}{8} \left( \frac{x_2^{(2)}}{a_2^2} - 1 \right) \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right). \quad (23)$$

$N_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) функції форми  $i$ -го вузла чотирикутного плоского скінченного елемента **plate** в розрахунковому комплексі **Femap with Nastran** [3].

#### Аналіз чутливості параметричної оптимізації для оболонки мінімальної поверхні на прямокутному контурі

В рамках аналізу чутливості обчислюються градієнти змінних проектування конструкції, переміщень у вигляді частинних похідних від цих характеристик по змінним проектуванням та товщини оболонки. Інформація про чутливість служить основою побудови алгоритму оптимального проектування методом градієнтного спуску функції цілі. Матриця чутливості

$$G = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X_i}; i = 1, n; j = 1, m \right\} \quad (24)$$

і градієнт цільової функції  $\nabla \bar{f}(X)$  використовується для побудови матриці проектування, обчислення множників Лагранжа і визначення напрямку спуску по градієнту. Тут  $n$  – кількість змінних проектування,  $m$  – кількість обмежень. Крім того, при проведенні аналізу чутливості з'являється кількісна інформація про вплив зміни змінних проектування на функціонування системи [18].

З математичної точки зору, залежність реакцій оболонки у вигляді переміщень і напружень від змінних проектування є товщина оболонки. Такі рівняння лінійні відносно змінних станів, але якщо врахувати вплив змінних проектування на коефіцієнти лінійних операторів, рівняння стану є нелінійним відносно функціональної залежності змінних станів і змінних проектування.

Аналіз чутливості реакцій конструкцій на зміну змінних проектування можливо провести без обчислення похідної матриці жорсткості. Для цього виконуємо диференціювання по  $i$ -й складовій  $X_i$  рівняння стану [19].

$$K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i} + \frac{\partial K}{\partial X_i} \times \bar{z} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i}. \quad (25)$$

Цей вираз можливо перетворити до вигляду:

$$K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} \times \bar{z}. \quad (26)$$

Праву частину рівняння (26) можливо розглядати як вектор псевдо навантаження  $\bar{p}$ . Тоді для системи похідних переміщень вираз можна переписати як:

$$K \times \left[ \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_1}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_n} \right] = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_k^*], \quad (27)$$

де  $k$  – кількість навантажень конструкції.

Оскільки вирішення системи рівнянь статички можливо при багатьох варіантах правих частин рівняння [20], то рішення (27) формується одночасно з вирішенням рівняння стану методу скінченних елементів. Як показують дослідження, така схема вирішення задачі при розгляді до 100 вантажних векторів потребує всього на 15% більше часу роботи процесору в порівнянні з вирішенням задачі на один вантажний вектор. Ефект досягається за рахунок виключення  $K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i}$  із виразу градієнтів цільової функції і обмежень.

Матриця (27) легко обчислюється при відомій функціональній залежності зовнішніх навантажень від змінних проектування. Якщо  $\bar{p}(\bar{X})$  – вектор зовнішніх навантажень, який є постійним, то  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i} = 0$  [4]

$$P = \left\{ \frac{\partial p_j}{\partial X_i}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m} \right\}. \quad (28)$$

Розглянемо визначення похідної  $K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i}$ , для цього ведемо наступні позначення  $K_g$  і  $K_l$  – матриця жорсткості відповідного елемента в загальній локальній системі координат;  $\bar{z}_g$  і  $\bar{z}_l$  – вузлові переміщення в локальній системі координат;  $T$  – матриця перетворення локальної системи координат в глобальну [21].

Основні співвідношення методу скінченних елементів при перетворенні координат:

$$K = T^T \times K^l \times T. \quad (29)$$

$$\bar{z}_l = T \times \bar{z}_g. \quad (30)$$

Так як в якості змінних проектування прийнята товщина оболонки, то координати вузлів конструкції похідна  $K_g$  по  $\bar{X}$  дорівнює [6, 19]:

$$\frac{\partial K_g}{\partial \bar{X}} = \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \right) \times K_l \times T + T^T \times K_l \times \frac{\partial T}{\partial \bar{X}}. \quad (31)$$

Приймаємо до уваги рівність (30), маємо:

$$\frac{\partial K_g}{\partial \bar{X}} \bar{z}_g = \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \right)^T \times (K \times \bar{z}_l) + T^T \times \left( \frac{K_l}{\partial \bar{X}} + K_l \times \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g \right). \quad (32)$$

Можемо показати, що

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} K \times \bar{z} = \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left( \sum_{i=1}^{NE} K_g^i \times \bar{z} \right) = \sum_{i=1}^{NE} \left( \frac{\partial K_g^i}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g^l \right), \quad (33)$$

де  $NE$  – число скінченних елементів;  $K_g^i$  – матриця жорсткості  $i$ -го елемента в глобальній системі координат.

Звідси матриця  $\frac{\partial K}{\partial \bar{X}} \times \bar{z} = \frac{\partial K_g^i}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g^l$  може бути сформована шляхом обчислення вектору  $\frac{\partial K_g^i}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g^l$  для кожного скінченного елемента конструкції і подальшої їх суми.

Вектор  $K_l \times \bar{z}_l$  в першому складеному рівнянні (29) представляє собою внутрішні зусилля в елементі в локальній системі координат, які можуть бути визначені як [5]

$$\bar{p}_l = K_l \times \bar{z}_l = \left( \int_0^l (B^T \times D \times B) dx \right) \times \bar{z}_l = \int_0^l (B^T \times \bar{\sigma}) dx. \quad (34)$$

де  $\bar{\sigma} = D \times B \times \bar{z}_l$ .

Вектор  $K_l \times \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g$  із останнього члена (33) може бути отриманий аналогічно із визначенням внутрішніх зусиль, відповідно фіктивним вузловим локальним переміщенням (34).

$$\bar{z}_l = \frac{\partial T}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_g. \quad (35)$$

Вектор  $\frac{K_l}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_l$  апроксимується за допомогою скінченної різниці шляхом перерахунку матриці  $K_l$  для малих відшкодувань змінних проектування  $X_l$ . З урахуванням (35) знаходження вектора  $\frac{K_l}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_l$  зводиться до ряду векторних операцій, і при малих змінах  $\partial \bar{X}$  дорівнює:

$$\frac{K_l}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}_l = \frac{(K_l \times \bar{z}_l)_{\bar{X} + \delta \bar{X}} - (K_l \times \bar{z}_l)_{\bar{X}}}{\partial \bar{X}}. \quad (36)$$

Таким чином, аналіз чутливості реакцій оболонки для кожного пластинчастого скінченного елемента до варіацій змінних проектування зводиться до визначення вектору  $\frac{\partial K}{\partial \bar{X}} \times \bar{z}$ , шляхом знаходження двох додаткових векторів внутрішніх зусиль в локальній системі координат і перетворення результативних векторів в загальну координатну систему.

Визначивши чутливість  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{X}}$ , є можливість перейти від знаходження чутливості внутрішніх зусиль в скінченних елементах до зміни змінних проектування, оскільки для реалізації алгоритму вирішення задачі оптимізації потрібно побудова матриці чутливості обмежень  $G$ . [4].

Чутливість обмежень на напруження по Мізесу може бути також представлена у вигляді [5]:

$$\frac{\partial g_i}{\partial X} = - \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_i^2} \frac{\partial \Delta_i}{\partial X}. \quad (37)$$

Підготовка до чисельного дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні на прямокутному плані, що складається із двох прямих ліній і двох пів кіл, при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності [9-11]. Для дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні з урахуванням геометричної нелінійності використовується спеціальний додатковий модуль оптимізатора створений авторами, який прив'язується до розрахункового комплексу Femap with Nastran [12]. Скінченно-елементна модель побудована з пластинчастих скінченних елементів **plate**, які представлені в розрахунковому комплексі Femap with Nastran і відповідає теоретичним відомостям, які вказані у статті вище. Кількість елементів **plate** 1920 штук і вузлів 2009 штук. Закріплення до жорсткого диску землі відбувається по двом сторонам де закріплюються переміщення в трьох напрямках і три кути повороту. Розрахункова модель зображено на рис. 1.

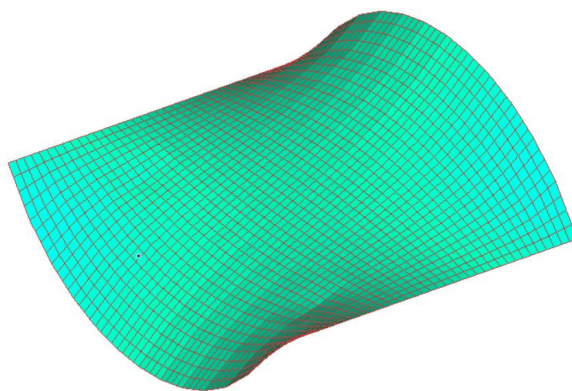


Рис. 1. Скінченно-елементна модель оболонки мінімальної поверхні на прямокутному плані, яка складається з двох прямих і двох пів кіл

Для налаштування чисельного дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації вводяться вихідні дані [10]. Цільова функція – вага і стійкість через коефіцієнт втрати стійкості  $\lambda$ . Змінні проектування – товщина оболонки від 1 до 200 мм. Обмежені показані, як розрахунковий опір сталі на розтяг  $R_y=260$  МПа, та  $1.1 \geq \lambda \geq 1$  нерівність, яка повинна виконуватися, щоб максимально використовувати матеріал при розрахунку на стійкість, якщо буде більше, з'являється запас, якщо  $\lambda < 1$  оболонка мінімальної поверхні втратить стійкість. Врахування геометричної нелінійності відбувається через нелінійний розрахунок Buckling, який відповідає за стійкість в геометричній нелінійній постановці, за допомогою якого при кожній ітерації відбувається перенесення дійсних вузлових переміщень на оболонку за допомогою напружено-деформованого стану [13-16].

**Результати дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності.** В даній науковій статті розкрито суть чотирьох видів оптимального проектування та підхід до схеми оптимального проектування. Виконано чисельне дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні з квадратним планом, який складається з двох прямих ліній і двох півкіл. Побудована скінченно-елементна модель (рис. 1). Показано 10 форм втрати стійкості після оптимізаційного розрахунку (рис. 2-11). Перша форма втрати стійкості має значення коефіцієнта  $\lambda=1.08138$ , що відповідає заданому ліміту при вхідних даних. Показано зміна товщини оболонки мінімальної поверхні на рис. 12. Товщина оболонки після оптимізаційного розрахунку коливається від 40 до 1 мм, при термосиловому навантаженні. Побудовані графіки цільових функцій ваги і коефіцієнта втрати стійкості  $\lambda$  (рис. 13). Зменшення ваги на графіку цільової функції відбулося з 31 т до 25.5 т, що у відсотковому еквіваленті буде 17.75%, при цьому відбулося зменшення коефіцієнта втрати стійкості з 2.12 до 1.08, що означає максимальне використання конструкційного матеріалу в даній постановці оптимізаційного розрахунку.

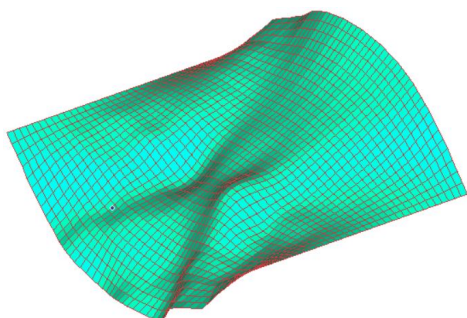


Рис. 2. Перша форма втрати стійкості. Eigenvalue 1 - 1.08138

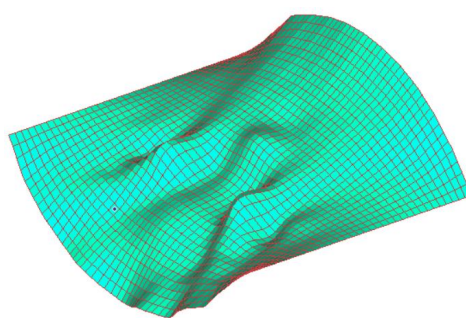


Рис. 3. Друга форма втрати стійкості. Eigenvalue 2 - 1.202896

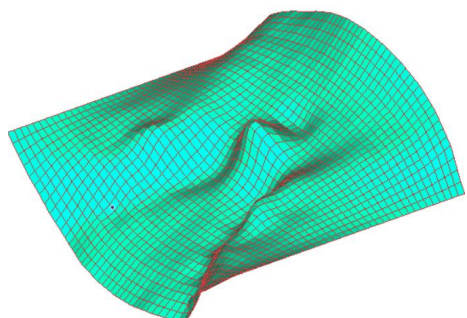


Рис. 4. Третя форма втрати стійкості. Eigenvalue 3 - 1.220143

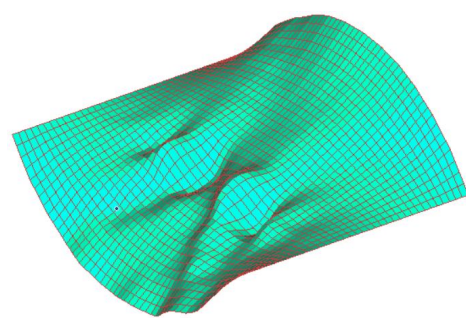


Рис. 5. Четверта форма втрати стійкості. Eigenvalue 4 - 1.279244

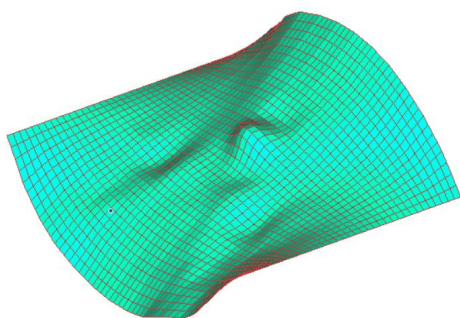


Рис. 6. П'ята форма втрата стійкості. Eigenvalue 5 - 1.28918

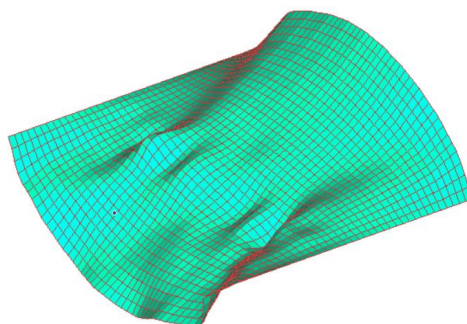


Рис. 7. Шоста форма втрата стійкості. Eigenvalue 6 - 1.413769

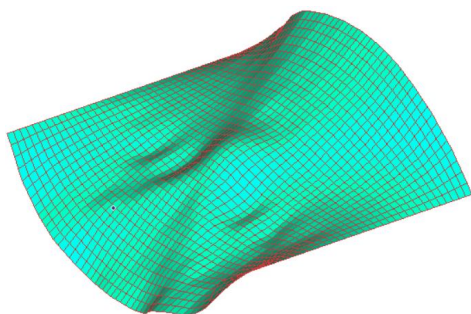


Рис. 8. Сьома форма втрата стійкості. Eigenvalue 7 - 1.446476

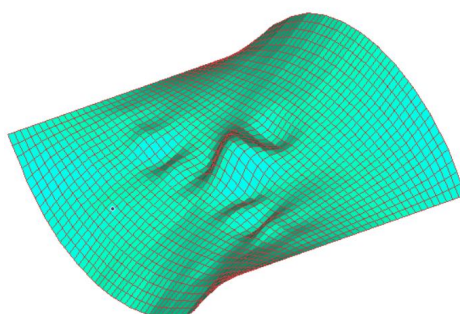


Рис. 9. Восьма форма втрата стійкості. Eigenvalue 8 - 1.458058

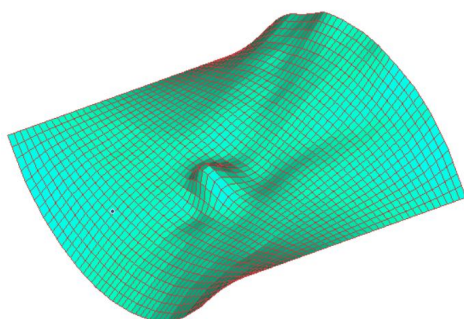


Рис. 10. Дев'ята форма втрата стійкості. Eigenvalue 9 - 1.47852

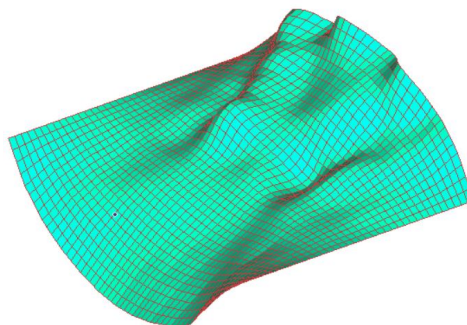


Рис. 11. Десята форма втрата стійкості. Eigenvalue 10 - 1.558378

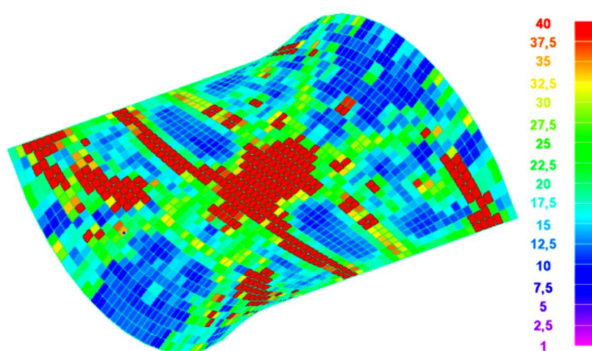
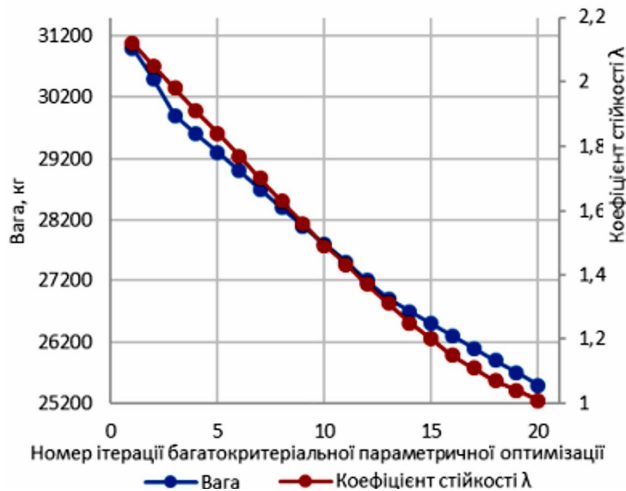


Рис. 12. Розподіл товщини оболонки після багатокритеріальної параметричної оптимізації від 40 до 1 мм

Рис. 13. Графіки зміни цільових функцій ваги і коефіцієнта  $\lambda$ 

Дані результати чисельного дослідження показують ефективність методики створеною авторами, яка дає можливість використовувати багатокритеріальну параметричну оптимізацію оболонки мінімальної поверхні з урахуванням цільових функцій вага і стійкість при термосиловому навантаженні. Одним із головних факторів, що дане дослідження проводилося з урахуванням геометричної нелінійності, що дає додаткові можливості в даній області дослідження.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П. Чисельна реалізація багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на квадратному контурі при термосиловому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. — К.: КНУБА, 2022. — Вип. 109. — С. 50-65.
2. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П., Григор'єва Л.О. Чисельне дослідження параметричної оптимізації вимушених частот коливання оболонки мінімальної поверхні на трапецивидному контурі при термосиловому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. — К.: КНУБА, 2023. — Вип. 110. — С. 430-446.
3. Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Енергетична оцінка граничного стану фізично нелінійної конструкції // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. — К.: КНУБА, 2024. — Вип. 113. — С. 56-62.
4. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Затилюк Г.А. Багатокритеріальна параметрична оптимізація переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. — К.: КНУБА, 2024. — Вип. 112. — С. 251-271.
5. Кошевий О.О. Оптимізація проектування циліндричних резервуарів з жорсткими оболонками покриття // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. — К.: КНУБА, 2019. — Вип. 103. — С. 253-265.
6. Рожок Л.С., Онищенко А.М., Крук Л.А., Найдьонова З.М. Чисельний аналіз напруженого стану нетонких гофрованих циліндричних оболонок з неперервно-неоднорідних матеріалів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. — К.: КНУБА, 2024. — Вип. 113. — С. 108-115.
7. Гоцуляк С.О., Кошевий О.П., Морсков Ю.А. Чисельне моделювання оболонок, утворених мінімальними поверхнями. // Прикладна геометрія та інженерна графіка: наук.-тех. збірник. К.: КНУБА. 2001. Вип. 69. — С.47-51.
8. Лізнов П.П., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Оптимізація конструкції віброударного демпфера за допомогою інструментарію MATLAB // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. — К.: КНУБА, 2024. — Вип. 112. — С. 3-18.
9. Лізнов П.П., Лук'янченко О.О., Палій О.М., Костіна О.В. Власні частоти і форми параметричних коливань оболонки резервуару з недосконалістю форми // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. — К.: КНУБА, 2024. — Вип. 112. — С. 58-66.
10. Дюба А.П., Сафронова І.А., Левитіна Л.Д. Числове та експериментальне моделювання поведінки гнучких оболонкових елементів конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. — К.: КНУБА, 2023. — Вип. 110. — С. 3-20.
11. Кошевой А.П. Устойчивость пластин и оболочек сложной формы // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборник. — К.: КИСИ, 1991. — Вип. 59. — С. 65-71.
12. Манита, Л.А. Условия оптимизации в конечномерных нелинейных задачах оптимизации. — М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2010. — 81 с.
13. Мелькумова Е.М. О некоторых подходах к решению многокритериальных задач. // Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии. — В.: ВГУ — №2— 2010— 3 с.
14. Пелешко І.Д., Юрченко В.В. Оптимізація проектування металевих конструкцій на сучасному етапі (огляд праць). // Металеві конструкції: збірник наукових праць. — 2009. — №15 — С. 13-21.
15. Пелешко І.Д., Балук І.М. Оптимізація поперечних перерізів стрижнів сталевих конструкцій. // Збірник наукових праць УкрНДІПСК ім. В. М. Шимановського. — К.: Сталь, Вип. 4. — 2009. — С. 142-151.
16. Пелешко І.Д., Лісоцький Р.В., Балук І.М. Оптимізація проектування сталевих стрижневих конструкцій покриття торгово-розважального комплексу. // Збірник наукових праць УкрНДІПСК ім. В. М. Шимановського. — К.: Сталь, Вип. 5. — 2010. — С. 181-191.
17. Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кенплер Х., Кочык З. Метод конечных элементов в механике твердых тел // Видавництво Вища школа. Головное издательство — Киев — 1982. — 480 с.
18. Bazenov V.A., Gaidachuk V.V., Koshevoy A.P. Stability of multiply connected ribbed shells and plates in a magnetic field // Journal of Soviet Mathematics 66(6). — 1993. — С. 2631-2636.
19. Cheung Y. K. The Finite Strip Method. Them. — Boca Raton. : CRC Press, 1997. — 416 p.

20. Guest J.K., Prievost J., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. – 61(2) – P.238–254.
21. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. — New York: John Wiley and Sons, 2011. — 772 p.

## REFERENCES

1. Ivanchenko H.M., Koshevyi O.O., Koshevyi O.P. Chyselna realizatsiia bahatokryterialnoi parametrychnoi optymizatsii obolonky minimalnoi poverkhni na kvadratnomu konturi pry termosylovomu navantazhenni (Numerical implementation of multicriteria parametric optimization of minimum surface shell on a square contour under thermoforce loading) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 109. – P. 50-65.
2. Ivanchenko H.M., Koshevyi O.O., Koshevyi O.P., Grigoryeva L.O. Chyselne doslidzhennia parametrychnoi optymizatsii vymushenykh chastot kolyvannia obolonky minimalnoi poverkhni na trapetsyevydnomu konturi pry termosylovomu navantazhenni (Numerical study of the parametric optimization of the force doscillation frequencies of the shell of a minimal surface on a trapezoidal contour under thermal and power loading) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 430-446.
3. Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. Enerhetychna otsinka hranychnoho stanu fizychno nelineinoi konstruktsii (Energy-Based Assessment of the Ultimate Limit State of a Physically Nonlinear Structure) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUCA, 2024. – Issue 113. – P. 56- 62.
4. Ivanchenko H.M., Koshevyi O.O., Zatyliuk G.H. Bahatokryterialna parametrychna optymizatsiia peremishchennia i vahy obolonky minimalnoi poverkhni na kruhlomu konturi, shcho skladaetsia iz dvokh pokhlylykh elipsiv pry termosylovomu navantazhenni z urakhuvanniam heometrychnoi nelineinosti (Multi-criteria parametric optimization of the displacement and weight of a shell of a minimum surface on a circular contour consisting of two inclined ellipses under thermal and power loading with consideration of geometric nonlinearity) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 209-221.
5. Koshevyi O.O. Optymalne proektuvannia tsylindrychnykh rezervuariv z zhorstkymy obolonkami pokryttia. (Optimal design of cylindrical tanks with rigid coating shells) // Opirmaterialiv i teoriyasporud: nauk.-tekhn. zbirnyk. – K.: KNUBA, 2019. – №. 103. – P. 253-265.
6. Rozhok L.S., Onishchenko A.M., Kruk L.A., Naidonova Z.M. Chyselnyi analiz napruzhenooho stanu netonkykh hofrovanykh tsylindrychnykh obolonok z neperervno-neodnorodnykh materialiv (Numerical analysis of the stress state of non-thin corrugated cylindrical shells made of continuous-inhomogeneous materials) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 108-115.
7. Hotsulyak Ye.O., Koshevyi O.P., Morskova Yu.A. Chyselne modeliuвання obolonok, utvorenykh minimalnymy poverkhniamy.. (Numerical modeling of shells formed by minimal surfaces). // Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika: nauk.-tekhn. zbirnyk. K.: KNUBA. 2001. №. 69.- P.47-51.
8. Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. Optymizatsiia konstruktsii vibroudarnoho dempfera za dopomohoiu instrumentarii MATLAB (Optimization of a vibro-impact damper design using MATLAB tools) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 3-18.
9. Lizunov P.P., Lukianchenko O.O., Palij O.M., Kostina O.V. Vlasni chastoty i formy parametrychnykh kolyvan obolonky rezervuaru z nedoskonalostiamy formy (Natural frequencies and modes of parametric vibrations of reservoir shell with shape imperfections) // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2024. – Issue. 112. – P. 58-66.
10. Dzyuba A.P., Safronova I.A., Levitina L.D. Chyslova ta eksperymentalne modeliuвання povedinky hnuchkykh obolonkovykh elementiv konstruktsii (Numerical and experimental modeling of the behavior of flexible shell elements of structures) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUCA, 2023. – Issue 110. – P. 3-20.
11. Koshevoy A.P. Ustoychivost plastin i obolochekslozhnoyformi (Stability of plates and shells of complex shape) // Soprotivleniyematerialov i teoriyasooruzheniy: nauch.-tekhn. zbirnyk. – K.: KISI, 1991. – Vip. 59. – P. 65–71.
12. Manyta L.A. Uslovia optymyzatsyy v konechnomernykh nelyneynykh zadachakh optymyzatsyy (Optimization condition sinfinite-dimensional nonlinear optimization problems). – M.: Moskovskiy gosudarstvenniy instytut lektornyky y matematiki, 2010. – 81 p.
13. Melkumova E.M. O nekotorykh podkhodakh k resheniyu mnohokryterialnykh zadach. (About some approach to solving multicriteria problems). // Vestnyk VHU. Seryya Systemnyy analiz y ynformatsyonnye tekhnolohyy. – V.: VHU. – №2– 2010– 3 p.
14. Peleshko I.D., Yurchenko V.V. Optymalne proektuvannia metalevykh konstruktsii na suchasnomu etapi (ohliad prats). (Optimal design of metal structures at the present stage (review of works)). // Metalevi konstruktsii: zbirnyk naukovy khprats. – 2009. – №15 – P. 13–21.
15. Peleshko I.D., Baluk I.M. Optymizatsiia poperechnykh pereriziv stryzhniv stalevykh konstruktsii (Optimization of crosssections of rods of steel structures) // Zbirnyk naukovy khprats UkrNDIPSKim. V. M. Shymanovskoho. – K.: Stal, №. 4. – 2009. – P. 142–151.
16. Peleshko I.D., Lisotskyi R.V., Baluk I.M. Optymalne proektuvannia stalevoi stryzhnevoi konstruktsii pokryttia torhovo-rozvalhalnoho kompleksu. (Optimal design of a steel rod coverstructure of a shopping and entertainment complex). // Zbirnyk naukovy khprats UkrNDIPSKim. V. M. Shymanovskoho. – K.: Stal, №. 5. – 2010. – P. 181–191.
17. Sakharov A.S., Kysloosky V.N., Kyrychevsky V.V., Alenbakh Y., Habbert U., Dankert YU., Keppler KH., Kochyk Z. Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel (Finite element method in solid mechanics). // Vydavnytstvo Vyschchashkola. Holovnoye yzdatelstvo – Kyev – 1982. – 480 p.
18. Bazenov V.A., Gaidachuk V.V., Koshevoy A.P. Stability of multiply connected ribbed shells and plates in a magnetic field. // Journal of Soviet Mathematics 66(6). – 1993. – C. 2631–2636.
19. Cheung Y. K. The Finite Strip Method. Them. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p.
20. Guest J.K., Prievost J., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. – 61(2) – P.238–254.
21. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Hand book of Monte Carlo Methods. — New York: John Wiley and Sons, 2011. — 772 p.

Іванченко Г.М., Кошевий О.О.

### ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ СТІЙКОСТІ І ВАГИ ОБОЛОНКИ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Оптимальне проектування відіграє важливу роль для підходу і формуванню будівельних конструкцій. Даний етап розрахунку конструкцій досить мало вивчений і фактично не використовується практикуючими інженерами в області механічного опору та стійкості.

Активний розвиток оптимального проектування розпочався в середині XX століття з розвитком ЕОМ. Перші роботи були виконані на власному програмному забезпеченні на мові fortran. Більше ніж за пів століття модернізувалися ЕОМ в ПК, а також були створені програмні комплекси такі як Femap та Ansys в яких є розділи оптимального проектування. Для оптимального проектування досить унікальних конструкцій недостатньо мати базового функціонального набору в даних розрахункових комплексів, тому для цікавих цільових функцій по типу стійкості і ваги є необхідність дописати дану частину до оптимізаційного функціоналу.

Об'єктом дослідження виступають тонкостінні оболонки мінімальних поверхонь. Суть цих просторових конструкцій полягає у унікальності їх поверхні, яка була оптимізована за допомогою методу продовження по параметру, який базується на визначеному контурі та висоти майбутньої оболонки мінімальної поверхні. Після інтегрування виводиться оптимальна форма для майбутньої конструкції, яка має мінімальну площу та мінімальні внутрішні зусилля, які компенсує геометрична форма тонкостінної оболонки мінімальної поверхні.

Оптимальне проектування в будівельній і прикладній механіці розділяється на чотири види. Перший вид – оптимізація форми. Другий вид – параметрична оптимізація. Третій вид – топологічна оптимізація. Четвертий вид – оптимізація фізико-механічних характеристик.

Для дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні з урахуванням геометричної нелінійності використовується спеціальний додатковий модуль оптимізатора створений авторами, який прив'язується до розрахункового комплексу Femap with Nastran [12].

В даній науковій статті розкрито суть чотирьох видів оптимального проектування та підхід до схеми оптимального проектування. Виконано чисельне дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні з квадратним планом, який складається з двох прямих ліній і двох півкіл. Товщина оболонки після оптимізаційного розрахунку коливається від 40 до 1 мм, при термосиловому навантаженні. Побудований графік цільових функцій ваги і коефіцієнта втрати стійкості  $\lambda$ . Зменшення ваги на графіку цільової функції відбулося з 31 т до 25.5 т, що у відсотковому еквіваленті буде 17.75%, при цьому відбулося зменшення коефіцієнта втрати стійкості з 2.12 до 1.08, що означає максимальне використання конструкційного матеріалу в даній постановці оптимізаційного розрахунку.

**Ключові слова:** оптимізація, параметрична оптимізація, багатокритеріальна оптимізація, оптимізація цільової функції, змінні проектування, обмеження, оболонки мінімальних поверхонь, геометрична нелінійність, метод скінченних елементів.

Іванченко Г.М., Кошевыи О.О.

### PARAMETRIC OPTIMIZATION OF THE STABILITY AND WEIGHT OF THE MINIMUM SURFACE SHELL TAKING INTO ACCOUNT GEOMETRIC NONLINEARITY UNDER THERMOSTRESS LOADING

Optimal design plays an important role in the approach to and formation of building structures. This stage of structural calculation has been little studied and is virtually unused by practicing engineers in the field of mechanical resistance and stability.

The active development of optimal design began in the mid-20th century with the development of computers. The first works were performed on proprietary software in the Fortran language. Over more than half a century, computers have been modernized into PCs, and software complexes such as Femap and Ansys have been created, which include sections on optimal design. For the optimal design of fairly unique structures, it is not enough to have a basic functional set in these calculation complexes, so for interesting target functions such as stability and weight, it is necessary to add this part to the optimization functionality.

The object of study is thin-walled shells of minimal surfaces. The essence of these spatial structures lies in the uniqueness of their surface, which has been optimized using the parameter continuation method based on the defined contour and height of the future shell of the minimal surface. After integration, the optimal shape for the future structure is derived, which has a minimum area and minimum internal forces, which are compensated by the geometric shape of the thin-walled shell of the minimal surface.

Optimal design in construction and applied mechanics is divided into four types. The first type is shape optimization. The second type is parametric optimization. The third type is topological optimization. The fourth type is optimization of physical and mechanical characteristics.

To study multi-criteria parametric optimization of a minimum surface shell, taking into account geometric nonlinearity, a special additional optimizer module created by the authors is used, which is linked to the Femap with Nastran calculation complex [12].

This scientific article reveals the essence of four types of optimal design and an approach to the optimal design scheme. A numerical study of multi-criteria parametric optimization of the stability and weight of a minimal surface shell with a square plan consisting of two straight lines and two semicircles was performed. The thickness of the shell after optimization calculation ranges from 40 to 1 mm under thermo-mechanical loading. A graph of the target functions of weight and stability loss coefficient  $\lambda$  has been constructed. The weight on the target function graph decreased from 31 tons to 25.5 tons, which is 17.75% in percentage terms, while the stability loss coefficient decreased from 2.12 to 1.08, which means the maximum use of structural material in this optimization calculation.

**Keywords:** optimization, parametric optimization, multicriteria optimization, objective function optimization, design variables, constraints, minimum surface envelopes, geometric nonlinearity, finite element method.

УДК 539.3

Іванченко Г.М., Кошевий О.О. **Параметрична оптимізація стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні з урахуванням геометричної нелінійності при термосиловому навантаженні** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2025. – Вип. 115. – С. 231-243.

В статті розглянуто дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації стійкості і ваги оболонки мінімальної поверхні на прямокутному плані, яка складається двох прямих ліній і двох півкіл при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. Результати дослідження показали зменшення ваги оболонки після оптимізаційного розрахунку на 17.75%, а також за допомогою врахування геометричної нелінійності вдалося зменшити вагу конструкції на додаткові 3% в порівнянні з лінійною постановкою.

Іл. 13. Бібліогр. 21 назв

UDS 539.3

Ivanchenko H.M., Koshevyi O.O. **Parametric optimization of the stability and weight of a minimal surface shell taking into account geometric nonlinearity under thermomechanical loading** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2025. – Issue 115. – P. 231-243.

The article considers the study of multi-criteria parametric optimization of the stability and weight of a minimal surface shell on a rectangular plane, which consists of two straight lines and two semicircles under thermo-mechanical loading, taking into account geometric nonlinearity. The results of the study showed a 17.75% reduction in the weight of the shell after the optimization calculation, and by taking into account geometric nonlinearity, it was possible to reduce the weight of the structure by an additional 3% compared to the linear formulation.

Fig. 13. Ref. 21.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, декан будівельного факультету КНУБА ІВАНЧЕНКО Григорій Михайлович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ІВАНЧЕНКУ Григорію Михайловичу

**Тел.:** +38(044) 248-32-37

**E-mail:** ivgm61@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-1172-2845>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор філософії (Ph.D.), доцент, доцент кафедри теоретичної механіки КОШЕВИЙ Олександр Олександрович

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОШЕВому Олександру Олександровичу

**Тел.:** +38(044) 241-55-36

**E-mail:** a380982070137@gmail.com.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-1903-2905>