UDC: 539.3

RESEARCH OF NONSTATIONARY VIBRATIONS OF AN ELASTIC SPACE WITH TWO CIRCULAR CYLINDRICAL HOLES

H.M. Ivanchenko[1],
Doctor of Technical Sciences, Professor

Iu.A. Chupryna[1],
Doctor of Economic Sciences, Professor

M.O. Malykhin[1],
Doctor of Philosophy in Engineering

O.V. Maksymiuk[1],
Doctor of Philosophy (Applied Mechanics)

O.M. Myroshnyk[2],
Doctor of Technical Sciences, Professor

[1]*Kyiv National University of Construction and Architecture*
31 Povitryanykh Syl Avenue, Kyiv, 03680, Ukraine

[2]*National University of Civil Protection of Ukraine, Cherkasy, Ukraine*

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.115.69-75

The paper presents a comprehensive study of nonstationary vibrations of an elastic medium with two circular cylindrical holes subjected to time-dependent boundary loading.
Keywords: nonstationary vibrations, elastic medium, cylindrical holes, harmonic loading, boundary integral equations, potential method, Hankel functions, Maclaurin expansion, dynamic equilibrium.

Two-dimensional vibrations of an elastic solid body are considered, to the boundary of which a load that is an arbitrary function of time is applied. Such vibrations are described by a system of dynamic equilibrium equations

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)-\rho\,\ddot{u}_1=0 \\ \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right)-\rho\,\ddot{u}_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

We will solve the problem under zero initial conditions. The problem is transformed into the frequency domain by means of a Fourier series expansion. Accordingly, instead of solving the system of dynamic equilibrium equations, it is necessary to repeatedly solve the system of equations for different values of (ω) — the frequency of harmonic vibrations

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_2^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1 \partial x_2}\right)+\rho\,\omega_k^2\,u_1^k=0 \\ \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_2^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1 \partial x_2}+\dfrac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_2^2}\right)+\rho\,\omega_k^2\,u_2^k=0. \end{cases} \tag{2}$$

To solve the problem, the potential method apparatus is applied, that is, the problem is reduced to a system of boundary integral equations (in the frequency domain).

$$\frac{1}{2}u_i^{\kappa}(\vec{x})+\int_{\Gamma} u_j^{\kappa}(\vec{y})T_{kj}(\vec{x},\vec{y},\omega_k)d\Gamma_y=\int_{\Gamma} q_j^{\kappa}(\vec{y})U_{kj}(\vec{x},\vec{y},\omega_k)d\Gamma_y. \tag{3}$$

Here, (u) and (q) denote the displacements and stresses at the boundary points, either prescribed or sought.

The first stage of the problem (solution of the BIE) makes it possible to determine the boundary values of (u) and (q) that are not specified by the boundary conditions. The fundamental solution of the problem is described by the following expression.

$$U_{kj}(\vec{x},\vec{y},\omega)= \frac{i}{4\mu}\left\{\delta_{kj}\left[H_0^{(1)}(\varphi_2)-\frac{H_1^{(1)}(\varphi_2)}{\varphi_2}+\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{H_1^{(1)}(\varphi_1)}{\varphi_1}\right]+\right.$$
$$\left.+r_{,k}\,r_{,j}\left[H_2^{(1)}(\varphi_2)-\frac{C_2^2}{C_1^2}H_2^{(1)}(\varphi_1)\right]\right\},\quad k,j=1,2. \tag{4}$$

Here, $H_0^{(1)}, H_1^{(1)}, H_2^{(1)}$ are the Hankel functions of the first kind, which have a rather complicated form, and their use significantly complicates the computational procedure. In addition, the BIE involves the generalized derivative of the fundamental solution

$$T_{kj} = n_i\lambda U_{kl,l} + n_i\lambda(U_{kl,j} + U_{kj,l}). \tag{5}$$

As the distance between the observation point and the integration point decreases, i.e., when $x \to \xi$, the kernels take infinitely large values. Therefore, direct integration of expressions containing these functions in the case when the integration is performed over the element on which the observation point is located becomes impossible. To overcome this difficulty, the kernels are approximately replaced by the initial terms of the Maclaurin series expansion. In this case, the first term of the expansion coincides with the kernel of the corresponding static potential, while the remaining terms assume finite values as $x \to \xi$. Since the integration of the kernels of the static problem does not present any difficulties, the problem of algebraization of the system of boundary integral equations can be considered resolved. The problem under consideration is illustrated in Fig. 1, which shows the steady-state vibrations of a medium with a circular cylindrical hole subjected to a radial load applied at its boundary.

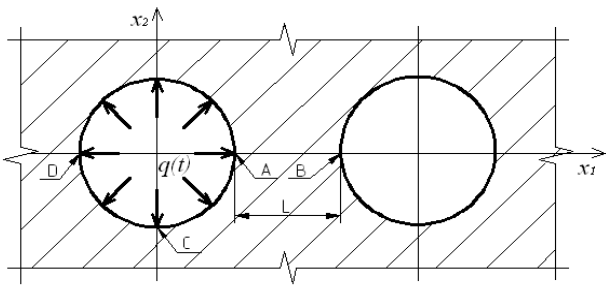

Fig. 1. Problem of steady-state vibrations of a medium with a circular cylindrical hole, to the boundary of which a radial load is applied

Solution of the benchmark problem on steady-state vibrations of a medium containing a circular cylindrical hole, to the boundary of which a radial load varying according to a harmonic law is applied, has shown that with piecewise-quadratic approximation of the unknowns, the problem can be solved with high accuracy over a wide range of vibration frequencies. The results of stress analysis are presented in Fig. 3, which shows the tangential stresses at characteristic points A and B.

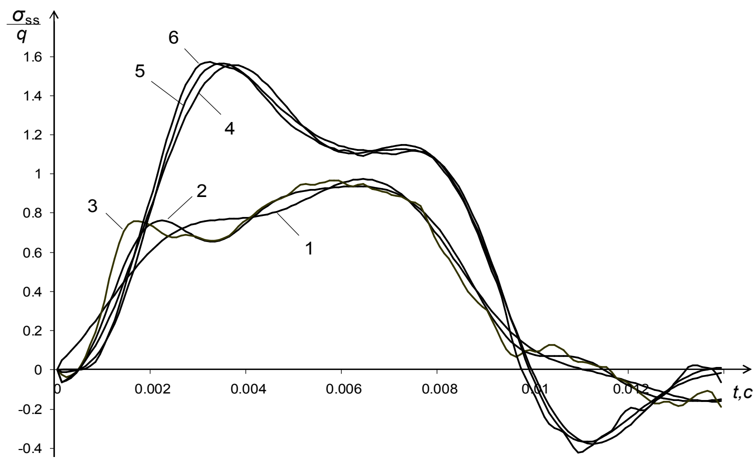

Fig. 2. Radial displacements at points A and B:
1 – BIE with Fourier series expansion terms at point A; 2 – BIE at point A;
3 – BIE with Fourier series expansion terms at point B; 4 – BIE at point B

The behavior of the medium is further illustrated in Fig. 4, which presents the radial displacements at point C. The stress distribution is illustrated in Fig. 5, which shows the tangential stresses at point C.

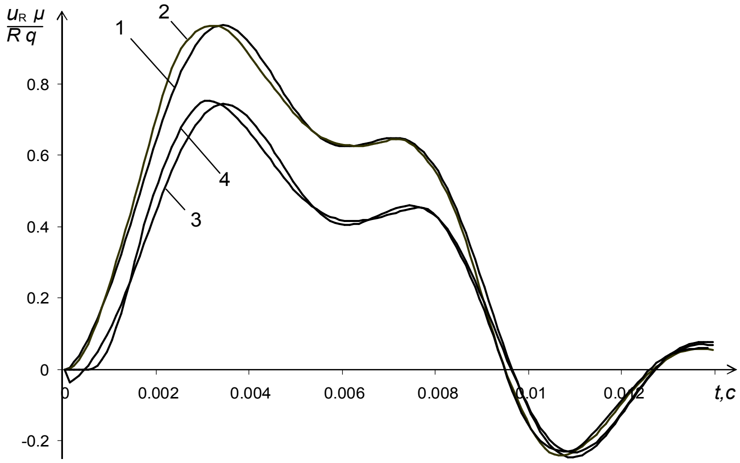

Fig. 3. Tangential stresses at points A and B:
1 – BIE with 8 Fourier series expansion terms at point A; 2 – BIE with 16 Fourier series expansion terms at point A
3 – BIE at point A; 4 – BIE with 8 Fourier series expansion terms at point B; 5 – BIE with 16 Fourier series expansion terms at point B; 6 – BIE at point B

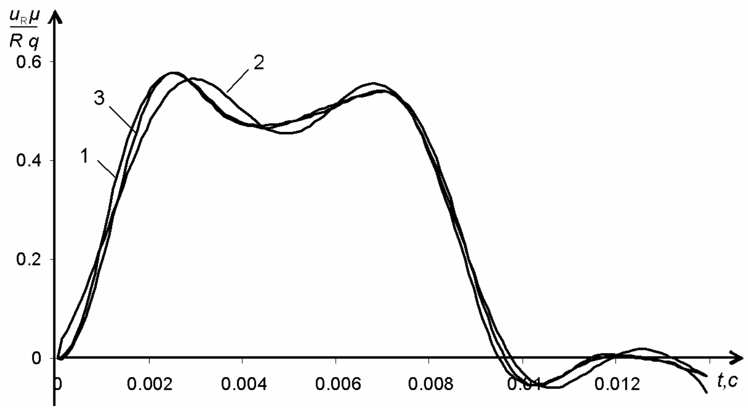

Fig. 4. Radial displacements at point C:
1 – BIE; 2 – 8 Fourier series expansion terms; 3 – 16 Fourier series expansion terms

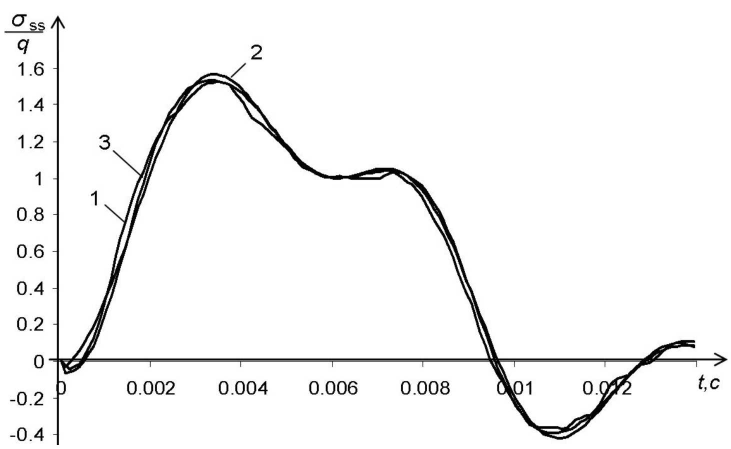

Fig. 5. Tangential stresses at point C: 1 – BIE; 2 – 8 Fourier series expansion terms; 3 – 16 Fourier series expansion terms

The results of the analysis at point D are presented in Figs. 6 and 7, which show the radial displacements and tangential stresses, respectively.

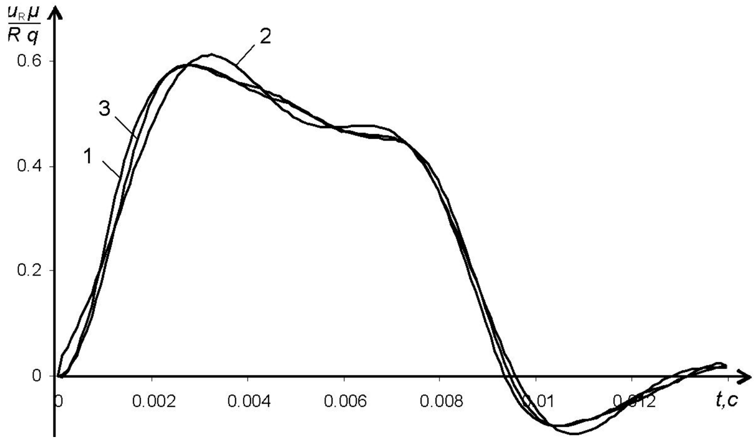

Fig. 6. Radial displacements at point D: 1 – BIE; 2 – 8 Fourier series expansion terms; 3 – 16 Fourier series expansion terms

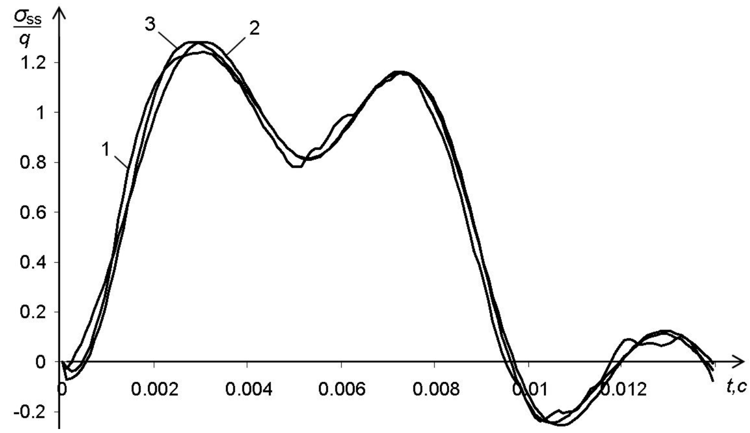

Fig. 7. Tangential stresses at point D: 1 – BIE; 2 – 8 Fourier series expansion terms; 3 – 16 Fourier series expansion terms

Conclusion. The presented results convincingly demonstrate the efficiency and reliability of the developed algorithm for analyzing nonstationary vibrations of elastic media containing circular cylindrical holes. The study, based on the transformation of the initial problem into the frequency domain through Fourier series expansion, has made it possible to reduce the governing system of dynamic equilibrium equations to a system of boundary integral equations. By applying the potential method and introducing fundamental solutions expressed through Hankel functions of the first kind, the problem formulation has been successfully adapted to a form that is suitable for computational implementation.

A key challenge in this context lies in the singular behavior of the kernels when the observation and integration points coincide. This issue, which typically prevents direct integration, has been overcome by approximating the kernels with the initial terms of their Maclaurin series expansions. In this representation, the leading term coincides with the static potential kernel, while higher-order terms retain finite values. Such a technique ensures that algebraization of the system of boundary integral equations is both feasible and computationally stable. This methodological contribution provides a powerful and universal tool for dealing with dynamic problems of perforated elastic bodies.

The verification of the proposed approach was carried out through the benchmark problem of steady-state vibrations of an elastic space with a circular cylindrical hole subjected to harmonic radial loading. Numerical experiments demonstrated that the piecewise-quadratic approximation of the unknowns allows obtaining highly accurate results across a wide frequency spectrum. The computed radial displacements and tangential stresses at specific boundary points (A, B, C, and D) not only confirmed the internal consistency of the approach but also highlighted its robustness in capturing localized stress concentrations and displacement variations.

Furthermore, the analysis has shown that the method is well-suited for handling both low- and high-frequency regimes. At lower frequencies, the solutions converge smoothly to the static limit, while at higher frequencies the algorithm remains stable and accurate, ensuring reliable prediction of vibration characteristics. This makes the proposed methodology versatile and applicable to a wide range of engineering problems involving dynamic loads and complex geometries.

The overall conclusion is that the developed algorithm is fully operational and demonstrates high computational accuracy, efficiency, and adaptability. It provides a scientifically sound and practically valuable approach to solving dynamic problems in structural mechanics. The next logical step involves extending the algorithm to address more complex engineering applications, including multi-hole configurations, anisotropic materials, and three-dimensional problems with mixed boundary conditions. Additionally, integration with modern numerical platforms and high-performance computing environments can significantly enhance its applicability to real-world engineering tasks.

In summary, the research has established a reliable methodological foundation for the analysis of nonstationary vibrations in elastic structures with internal cavities. The robustness of the algorithm, combined with its potential for generalization, makes it a promising tool for the solution of more sophisticated engineering problems, including those in aerospace, civil, and mechanical engineering, where dynamic effects and structural perforations play a crucial role.

REFERENCES

1. Banerjee, P., & Butterfield, R. (1984). Boundary Element Methods in Applied Sciences. Moscow: Mir. 494 p.
2. Cruse, T. A. (1996). BIE fracture mechanics analysis: 25 years of developments. Computational Mechanics, 18, 1–11.
3. Vorona, Yu. V., Honcharenko, M. V., Kozak, A. A., & Chernenko, E. S. (2011). Vibrations of two-dimensional massive bodies weakened by normal separation cracks. Strength of Materials and Theory of Structures, 87, 131–143.
4. Vorona, Yu. V., & Rusanova, O. S. (2010). An algorithm for solving vibration problems of solids with shear cracks. Strength of Materials and Theory of Structures, 86, 102–113.
5. Kantor, B. Ya., Naumenko, V. V., & Strelnikova, E. A. (1995). On the approximation of a surface by flat elements in the numerical solution of singular integral equations with a Hadamard-type kernel. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 11, 21–23.
6. Chernyshev, D., Ryzhakova, G., Honcharenko, T., Chupryna, I., & Reznik, N. (2023). Digital administration of the project based on the concept of smart construction. In V. Kreinovich, S. Thach, N. Nguyen, & V. Reddy (Eds.), Lecture Notes in Networks and Systems (Vol. 495, pp. 1316–1331). Springer.
7. Roman, A., Andrii, S., Galyna, R., Iurii, C., & Hanna, S. (2022). Integration of data flows of the construction project life cycle to create a digital enterprise based on building information modeling. International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, 12(1), 40–50.
8. Chupryna, Y., Honcharenko, T., Ivakhnenko, I., Zinchenko, M., & Tsyfra, T. (2020). Reengineering of the construction companies based on BIM-technology. International Journal of Emerging Trends in Engineering Research, 8(8), 4166–4172.

Стаття надійшла 10.09.2025

Іванченко Г.М., Чуприна Ю.А., Малихін М.О., Максим'юк О.В., Мирошник О.М.

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОГО ПРОСТОРУ З ДВОМА КРУГЛИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ ОТВОРАМИ

У статті представлено комплексне дослідження нестаціонарних коливань пружного середовища з двома круглими циліндричними отворами, що піддаються залежному від часу граничному навантаженню. Постановка задачі здійснюється за нульових початкових умов, з переходом у частотну область шляхом розкладання в ряд Фур'є. Такий підхід дозволяє звести систему рівнянь динамічної рівноваги до послідовності крайових задач для різних значень частоти гармонічних коливань. Для розв'язання задачі застосовано метод потенціалів, який перетворює постановку на систему граничних інтегральних рівнянь у частотній області. Фундаментальний розв'язок вводиться в замкненій аналітичній формі, що включає функції Ганкеля першого роду нульового, першого та другого порядків, а його узагальнені похідні використовуються в інтегральних ядрах. Оскільки ці ядра стають сингулярними при збігу точок спостереження та інтегрування, пряма числова оцінка неможлива. Цю перешкоду долають шляхом застосування розкладання ядер у ряд Маклорена, в якому головний член збігається з ядром статичного потенціалу, тоді як члени вищого порядку залишаються скінченними. В результаті стає можливою алгебраизація системи граничних інтегральних рівнянь. Ефективність запропонованого підходу перевіряється шляхом розв'язання еталонної задачі про стаціонарні коливання середовища з круглим циліндричним отвором під гармонічним радіальним навантаженням. Результати показують, що використання кусково-квадратичного наближення невідомих забезпечує високу обчислювальну точність у широкому діапазоні частот. Числові експерименти підтверджують достовірність та стабільність методу в прогнозуванні радіальних переміщень та тангенціальних напружень у різних характерних точках межі, тим самим встановлюючи його застосовність для аналізу динамічної поведінки перфорованих пружних конструкцій. Крім того, аналіз підкреслює важливість застосування передових математичних методів для вирішення складних задач структурної динаміки, де традиційні числові методи стикаються з обмеженнями. Запропонована методологія демонструє стійкість не лише у визначенні локальних концентрацій напружень, але й у збереженні точності в режимах високої частоти, що робить її придатною для інженерних застосувань, що вимагають точності. Розроблену основу можна розширити на задачі з кількома взаємодіючими порожнинами, анізотропними матеріалами або тривимірною геометрією, які часто зустрічаються в аерокосмічній, машинобудівній та цивільній галузях. Отже, ця робота забезпечує не лише теоретичний прогрес, але й практичний обчислювальний інструмент, який можна інтегрувати в сучасні середовища моделювання для підтримки проектування та оцінки безпеки складних структурних систем.

Ключові слова: нестаціонарні коливання, пружне середовище, циліндричні отвори, гармонічне навантаження, граничні інтегральні рівняння, метод потенціалу, функції Ганкеля, розклад Маклорена, динамічна рівновага.

Ivanchenko H.M., Chupryna Iu.A., Malykhin M.O., Maksymiuk O.V., Myroshnyk O.M.

RESEARCH OF NONSTATIONARY VIBRATIONS OF AN ELASTIC SPACE WITH TWO CIRCULAR CYLINDRICAL HOLES

The paper presents a comprehensive study of nonstationary vibrations of an elastic medium with two circular cylindrical holes subjected to time-dependent boundary loading. The formulation of the problem is carried out under zero initial conditions, with the transition into the frequency domain implemented by Fourier series expansion. This approach allows reducing the system of dynamic equilibrium equations to a sequence of boundary value problems for different values of the frequency of harmonic vibrations. To solve the problem, the potential method is applied, which transforms the formulation into a system of boundary integral equations in the frequency domain. A fundamental solution is introduced in closed analytical form, incorporating Hankel functions of the first kind of orders zero, one, and two, and its generalized derivatives are employed in the integral kernels. Since these kernels become singular when the observation and integration points coincide, direct numerical evaluation is impossible. This obstacle is overcome by applying the Maclaurin series expansion of the kernels, in which the leading term coincides with the static potential kernel, while higher-order terms remain finite. As a result, the algebraization of the system of boundary integral equations becomes feasible. The efficiency of the proposed approach is verified by solving a benchmark problem on steady-state vibrations of a medium with a circular cylindrical hole under harmonic radial loading. The results demonstrate that the use of piecewise-quadratic approximation of the unknowns ensures high computational accuracy over a wide frequency range. Numerical experiments confirm the validity and stability of the method in predicting radial displacements and tangential stresses at different characteristic points of the boundary, thus establishing its applicability for analyzing dynamic behavior of perforated elastic structures. Furthermore, the analysis highlights the importance of applying advanced mathematical techniques to address complex problems of structural dynamics where traditional numerical methods face limitations. The proposed methodology demonstrates robustness not only in capturing local stress concentrations but also in preserving accuracy under high-frequency regimes, making it suitable for engineering applications requiring precision. The developed framework can be further extended to problems with multiple interacting cavities, anisotropic materials, or three-dimensional geometries, which are often encountered in aerospace, mechanical, and civil engineering. Hence, this work provides not only theoretical advancement but also a practical computational tool that can be integrated into modern simulation environments to support the design and safety assessment of complex structural systems.

Keywords: nonstationary vibrations, elastic medium, cylindrical holes, harmonic loading, boundary integral equations, potential method, Hankel functions, Maclaurin expansion, dynamic equilibrium.

УДК 539.3
Іванченко Г.М., Чуприна Ю.А., Малихін М.О., Максим'юк О.В., Мирошник О.М. **Дослідження нестаціонарних коливань пружного простору з двома круговими циліндричними отворами** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2025. – Вип. 115. – С. 69-75.
Іл. 7. Бібліогр. 8 назв.

UDC: 539.3
Ivanchenko H.M., Chupryna Iu.A., Malykhin M.O., Maksymiuk O.V., Myroshnyk O.M. **Research of nonstationary vibrations of an elastic space with two circular cylindrical holes** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2025. – Issue 115. – P. 69-75.
Fig. 7. Ref. 8.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури Іванченко Григорій Михайлович
Адреса: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, КНУБА
E-mail: ivanchenko.gm@knuba.edu.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-1172-2845

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор економічних наук, професор кафедри менеджменту в будівництві КНУБА Чуприна Юрій Анатолійович
Адреса: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра менеджменту в будівництві
E-mail: chupryna_yura@ukr.net
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-4934-2058

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри організації та управління будівництвом КНУБА Малихін Михайло Олександрович
Адреса: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра менеджменту в будівництві
E-mail: malykhin.mo@knuba.edu.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9721-2733

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор філософії, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА Максим'юк Олександр Всеволодович
Адреса: 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, МАКСИМ'ЮКУ Олександру Всеволодовичу
E-mail: maksymiuk_ov@knuba.edu.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-2367-3086

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, професор кафедри цивільного захисту та інформаційних технологій Національного університету цивільного захисту України Мирошник Олег Миколайович
Адреса: 18034 Україна, м. Черкаси, вул. Онопрієнка, 8
E-mail: myroshnyk_oleh@nuczu.edu.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-8951-9498