

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ШАРУВАТОЇ БАЛКИ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

І.В. Бельмас,

д-р техн. наук, професор

О.І. Білоус,

канд. техн. наук, доцент

Г.І. Танцура,

канд. техн. наук, доцент

Д.І. Коврига,

пошукач третього рівня вищої освіти (Phd)

С.В. Чумак,

пошукач третього рівня вищої освіти (Phd)

Дніпровський державний технічний університет, Кам'янське

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.114.276-283

Анотація. Запропоновано аналітичний метод визначення напружень згину балки шаруватої структури з довільною кількістю шарів, включно з останнім шаром напівбезмежної товщини. Метод полягає в поданні показників напружено-деформованого стану шарів з використанням функцій напружень Ері. Відомі коефіцієнти функцій Ері дозволяють визначити напружено-деформований стан шарів балки.

Ключові слова: балка шаруватої структури, навантаження, деформація, напруження, функція напружень Ері, механічні властивості матеріалу шарів.

Постановка проблеми. Балка є компонентом багатьох конструктивних елементів в будівництві. Методи її розрахунку прийнятні за умови значного перевищення довжини балки над її висотою. Масштаби післявоєнного відновлення України визначають актуальність раціонального проєктування конструкцій, бо навіть незначна економія матеріалу за масового використання дає значну економію матеріальних ресурсів. Шляхом наплавлення, нанесення поверхневих покриттів виробам надають особливі властивості. Методика розрахунку балки шаруватої структури дозволить враховувати такі властивості. Вона також дозволить визначити прогини поверхонь балок, а не лише її нейтральної осі не залежно від співвідношення довжини балки та її висоти.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Методи розрахунку будівельних конструкцій розвинуті та постійно вдосконалюються. Вдосконалення вимагають і розрахунки балок. В роботі [1] побудована комп'ютерна модель мостової споруди. Вона, за твердженням авторів, якісно відтворює роботу балкової прогонової будови моста. Проведені дослідження дозволи уточнити напружено-деформований стан (НДС) балок залежно від фактичної конструктивної схеми та прикладеного навантаження. В [2] надано розрахунок підсилених балок. У статті [3] запропоновано метод визначення залишкової міцності композитної балки з крайовою тріщиною в області дії напружень розтягу. Для цього використовується модель згину композитних балок, котра враховує вплив деформацій поперечного зсуву та обтіснення. В [4] запропоновано розрахунок косо зігнутих дерев'яних балок, а в [5] розглянуто питання математичного моделювання НДС шаруватих ортотропних пластин на пружній основі. В публікації [6] досліджено НДС балки з наскрізною тріщиною. На основі енергетичного критерію знайдено критичне значення згинального моменту. В дисертації [7] експериментально досліджено згин скляної (аморфної структури) балки. Значення фізико-механічних характеристик скла були визначені з використанням функції двох параметричного розподілу Вейбулла. В роботі [8] - експериментально досліджено роботу дерев'яних балок, армованих комбінацією сталеві та композитної арматури. Сформульовано теорію розрахунку армованих балок з клеєної деревини із застосуванням деформаційної моделі, що враховує нелінійний розподіл напружень по висоті розрахункового перерізу. В дослідженні [9] розглянуто питання вигину з урахуванням міцності,

стійкості плоскої форми вигину підкранових балок. В статті [10] наведено порівняльний аналіз п'яти найбільш поширених методик визначення несучої здатності залізобетонних балок, що базуються на основі деформаційного підходу згідно з чинними нормами розрахунку ДБН В.2.6-98:2009. Монографія [11] присвячена дослідженню напружено-деформованого стану багатошарової плити на базі аналітичного підходу з використанням методів функцій податливості та скінчених елементів.

В межах задачі плоского напруженого стану в статтях [12, 13] запропоновано аналітичний метод визначення напружень згину балки суцільного прямокутного перерізу з використанням положень лінійної теорії пружності. Ці положення використані і в статті [14].

Наведене засвідчує широке використання балки як конструктивного елементу більш складних систем. З урахуванням призначення, особливостей матеріалу використовуються різноманітні підходи до визначення НДС балки. Разом з тим, на нашу думку, на цей час має бути розроблено метод визначення НДС балки навантаженої довільно розподіленими силами розроблений на засадах теорії пружності. Крок в цьому напрямі зроблено в роботах [12, 13]. Але в роботах введені умовні наявності додаткових частин балки та її опор. В них розглянуто ізоотропну, а не шарувату балку.

Постановка завдання. Сформулювати метод розрахунку шаруватої балки на згин методами лінійної теорії пружності.

Викладення основного матеріалу. Як і у згаданих роботах скористаємося функціями напружень φ . Задачу розв'яжемо для випадку плоского деформування балки в площині xz . будемо вважати що балка розташована вздовж осі x . Довжина балки L . Складена з N шарів. Шарам надамо номери. Верхньому - номер один. Їх значення занесемо в індекси параметрів, яких вони стосуються. Початок осі координат z сумістимо із зовнішньою поверхнею першого шару. Координати площин взаємодії шарів позначимо Z_n ($1 \leq n \leq N-1$).

Шари безмежного розміру в напрямі нормального до площини xz . Показники їх НДС визначаються наступними виразами [14]:

$$\begin{aligned} u_x^{(n)} &= -\frac{\mu_n + 1}{E_n} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial z}, \quad u_z^{(n)} = \frac{\mu_n + 1}{E_n} \left(2(1 - \mu_n) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_n, \quad X_x^{(n)} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_n \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_n, \\ Z_z^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \mu_n) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_n, \quad Z_x^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - \mu_n) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_n, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2}$; φ_n – функції напружень; E_n , μ_n – модулі пружності, коефіцієнти Пуассона матеріалу шарів балки.

Нехай зовнішнє навантаження балки спрямоване вздовж осі z . Задано воно непарним розвиненням Фур'є

$$f_1(Z_z) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{1,m} \sin(\rho_m x), \quad (2)$$

де p_m – коефіцієнти розвинення.

Балка спирається на опори. Їх розміри в напрямі осі x відомі, позначимо їх як l . Опори тиснуть на балку рівномірно розподіленими зусиллями які забезпечують її статичну рівновагу. Характер розподілу сил задамо розподілом

$$f_N(Z_z) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{N,m} \sin(\rho_m x), \quad (3)$$

де $p_{N,m} = \frac{P}{l} \left(k \int_0^l \sin(\rho_m x) + (1-k) \int_{L-l}^L \sin(\rho_m x) \right)$; k – визначене з умови статичної рівноваги відношення величини тиску балки на опору та сили тиску зовнішнього навантаження на балку ($0 \leq x \leq l$).

Врахуємо (2), (3), умову стосовно того, що $\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial z^4} = 0$ прийемо функції напружень в наступних формах:

$$\varphi_n = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{n,m} e^{\rho_m z} + B_{n,m} e^{-\rho_m z} + C_{n,m} z e^{\rho_m z} + D_{n,m} z e^{-\rho_m z} \right) \cos(\rho_m x), \quad (4)$$

де $\rho_m = \pi \frac{2m-1}{L}$; $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ – довільні вектори коефіцієнтів.

За прийнятих функцій напружень (4) складові НДС шарів (1).

$$\begin{aligned} u_z^{(n)} &= -\frac{1+\mu_n}{E_n} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(A_{n,m} e^{\rho_m z} + B_{n,m} e^{-\rho_m z} \right) \rho_m + C_{n,m} e^{\rho_m z} (4\mu_n + \rho_m z - 2) + \right. \\ &\quad \left. + D_{n,m} e^{-\rho_m z} (2 + \rho_m z - 4\mu_n) \right) \cdot \rho_m \sin(\rho_m x), \\ u_x^{(n)} &= \frac{1+\mu_n}{E_n} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(A_{n,m} e^{\rho_m z} - B_{n,m} e^{-\rho_m z} \right) \rho_m + C_{n,m} e^{\rho_m z} (\rho_m z + 1) + \right. \\ &\quad \left. + D_{n,m} e^{-\rho_m z} (1 - \rho_m z) \right) \cdot \rho_m \cos(\rho_m x), \\ Z_z^{(n)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(-A_{n,m} e^{\rho_m z} + B_{n,m} e^{-\rho_m z} \right) \rho_m - C_{n,m} e^{\rho_m z} (2\mu_n - 1 + \rho_m z) - \right. \\ &\quad \left. - D_{n,m} e^{-\rho_m z} (2\mu_n - 1 - \rho_m z) \right) \cdot \rho_m^2 \sin(\rho_m x), \\ X_x^{(n)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(-A_{n,m} e^{\rho_m z} + B_{n,m} e^{-\rho_m z} \right) \rho_m - C_{n,m} e^{\rho_m z} (3 + \rho_m z - 2\mu_n) - \right. \\ &\quad \left. - D_{n,m} e^{-\rho_m z} (2\mu_n - 3 + \rho_m z) \right) \cdot \rho_m^2 \sin(\rho_m x), \\ Z_x^{(n)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(A_{n,m} e^{\rho_m z} + B_{n,m} e^{-\rho_m z} \right) \rho_m + C_{n,m} e^{\rho_m z} (\rho_m z + 2\mu_n) + \right. \\ &\quad \left. + D_{n,m} e^{-\rho_m z} (\rho_m z - 2\mu_n) \right) \cdot \rho_m^2 \cos(\rho_m x). \end{aligned} \quad (5)$$

Скористаємося виразами (2) та (3). Врахуємо відсутність дотичних навантажень балки. Сформулюємо для довільних m -тих складових поверхневих шарів наступні рівняння: якщо $z=0$

$$\begin{aligned} \left((-A_{1,m} + B_{1,m}) \rho_m - (C_{1,m} + D_{1,m}) (2\mu_1 - 1) \right) \rho_m^2 - p_{1,m} &= 0, \\ (A_{1,m} + B_{1,m}) \rho_m + (C_{1,m} - D_{1,m}) 2\mu_1 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

якщо $z=Z_{N-1}$

$$\begin{aligned} \left(\left(-A_{N,m} e^{\rho_m Z_{N-1}} + B_{N,m} e^{-\rho_m Z_{N-1}} \right) \rho_m - C_{N,m} e^{\rho_m Z_{N-1}} \right) \cdot \rho_m^2 - p_{N,m} &= 0, \\ \left((2\mu_N - 1 + \rho_m Z_{N-1}) - D_{N,m} e^{-\rho_m Z_{N-1}} (2\mu_N - 1 - \rho_m Z_{N-1}) \right) \cdot \rho_m^2 - p_{N,m} &= 0, \\ (A_{N,m} e^{\rho_m Z_{N-1}} + B_{N,m} e^{-\rho_m Z_{N-1}}) \rho_m + C_{N,m} e^{\rho_m Z_{N-1}} (\rho_m Z_{N-1} + 2\mu_N) + D_{N,m} e^{-\rho_m Z_{N-1}} (\rho_m Z_{N-1} - 2\mu_N) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

У випадку спирання балки на пружну основу, останній шар треба прийняти напівбезмежним. Вирази (7) замінити виразами $A_{N,m} = 0$, $C_{N,m} = 0$.

З умов сумісного деформування шарів маємо наступні алгебраїчні рівняння m -тих складових функцій напружень (4) та виразів (5)

$$\begin{aligned} (A_{n-1,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} + B_{n-1,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}}) \rho_m + C_{n-1,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} (4\mu_{n-1} + \rho_m Z_{n-1} - 2) + D_{n-1,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}} (2 + \rho_m Z_{n-1} - 4\mu_{n-1}) - \\ - \frac{(1+\mu_n) E_{n-1}}{(1+\mu_{n-1}) E_n} (A_{n,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} + B_{n,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}}) \rho_m + C_{n,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} (4\mu_n + \rho_m Z_{n-1} - 2) + D_{n,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}} (2 + \rho_m Z_{n-1} - 4\mu_n) &= 0, \\ (A_{n-1,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} - B_{n-1,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}}) \rho_m + C_{n-1,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} (\rho_m Z_{n-1} + 1) + D_{n-1,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}} (1 - \rho_m Z_{n-1}) - \\ - \frac{(1+\mu_n) E_{n-1}}{(1+\mu_{n-1}) E_n} \left((A_{n,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} - B_{n,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}}) \rho_m + \right. \\ \left. + C_{n,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} (\rho_m Z_{n-1} + 1) + D_{n,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}} (1 - \rho_m Z_{n-1}) \right) &= 0, \\ (-A_{n-1,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} + B_{n-1,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}}) \rho_m - C_{n-1,m} e^{\rho_m Z_{n-1}} (2\mu_{n-1} - 1 + \rho_m Z_{n-1}) - D_{n,m} e^{-\rho_m Z_{n-1}} (2\mu_{n-1} - 1 - \rho_m Z_{n-1}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left((-A_{n,m}e^{\rho_m Z_{n-1}} + B_{n,m}e^{-\rho_m Z_{n-1}})\rho_m - C_{n,m}e^{\rho_m Z_{n-1}}(2\mu_n - 1 + \rho_m Z_{n-1}) - D_{n,m}e^{-\rho_m Z_{n-1}}(2\mu_n - 1 - \rho_m Z_{n-1})\right) = 0, \\
& \left(A_{n-1,m}e^{\rho_m Z_{n-1}} + B_{n-1,m}e^{-\rho_m Z_{n-1}}\right)\rho_m + C_{n-1,m}e^{\rho_m Z_{n-1}}(\rho_m Z_{n-1} + 2\mu_{n-1}) + D_{n-1,m}e^{-\rho_m Z_{n-1}}(\rho_m Z_{n-1} - 2\mu_{n-1}) - \\
& -\left((A_{n,m}e^{\rho_m Z_{n-1}} + B_{n,m}e^{-\rho_m Z_{n-1}})\rho_m + C_{n,m}e^{\rho_m Z_{n-1}}(\rho_m Z_{n-1} + 2\mu_n) + D_{n,m}e^{-\rho_m Z_{n-1}}(\rho_m Z_{n-1} - 2\mu_n)\right) = 0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Рівняння (6), (7) отримані з граничних умов та рівняння що відтворюють умови сумісності деформування шарів (8) становлять собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь, Порядок системи $4(N-1)$. Розв'язкою системи рівнянь є значення m -тих коефіцієнтів складових сум прийнятих функцій напружень та, відповідно, значень напружень та переміщень шарів.

Виконаний аналіз показав, що за умови врівноважування опорними зусиллями прикладеного до балки зовнішнього навантаження, сумарні дотичні напруження в шарах балки в перерізах $x=0$ та $x=L$ дорівнюють нулю.

З використанням значень коефіцієнтів визначити НДС двоопорної двошарової балки довжиною 1 м навантаженої розподіленням по усій довжині балки одиничним навантаженням. Товщини шарів прийняли рівними 0,1 м. Модулі пружності матеріалу шарів прийняли рівними $E_1=2 \cdot 10^5$ МПа та $E_2=10^5$ МПа. Коефіцієнти Пуассона $\mu_1=0,28$ та $\mu_2=0,23$. Довжин ділянок спирання балки $l=0,01$ м.

Розподіли вздовж осі x напружень та переміщень наведені на рисунку 1.

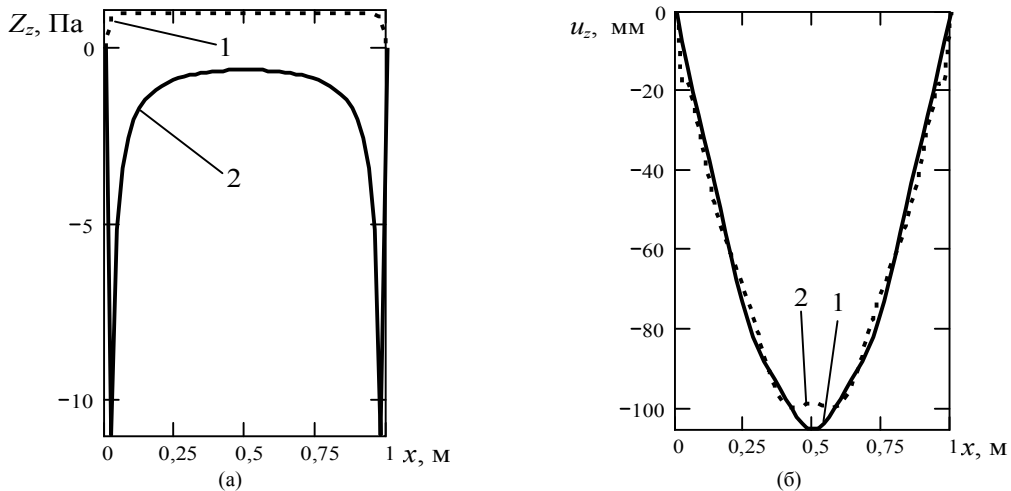


Рис. 1. Розподіли вздовж осі x напружень Z_z (а) та переміщень u_z (б) зовнішніх поверхонь шарів балки (1-перший шар, 2 – другий шар)

Розрахований прогин нижньої поверхні балки (рис. 1,б) близький до параболічного характеру. Закономірність розподілу переміщень протилежної (навантаженої) поверхні в районах спирання дещо відмінна від загальної в наслідок взаємодії балки з опорами. Розміри опорних поверхонь що перевищують 1% її довжини суттєво впливають на її прогин – зменшують його.

За традиційних підходів балки розглядається як така що спирається двома крайніми точками. Skorистаємося вище наведеною послідовністю. Прийнемо рівною нулю реакцію опори (3), а саме, прийнемо $f_N(Z_z) = 0$. Механічні властивості матеріалу другого шару прийнемо тотожними відповідним властивостями першого. Визначимо розподіли вздовж осі x напружень та переміщень (рис. 2).

За графіком (рис. 2,б) переміщення нижньої поверхні балки менші за відповідні переміщення верхньої, що є наслідком її стиснення. Однакові властивості шарів балки дозволяють розглядати її як звичайну. Розрахунки показують що визначений середній прогин балки на 0,7% менший за розрахований методами опору матеріалів. Прогини балки залежать і від властивостей матеріалу шарів балки, так зростання коефіцієнта Пуассона від мінімально,

рівного нулю до практично максимально, прийнятого рівним 0,45, призводить до зменшення прогинів поверхонь шарів. Зменшення не перевищує 10%.

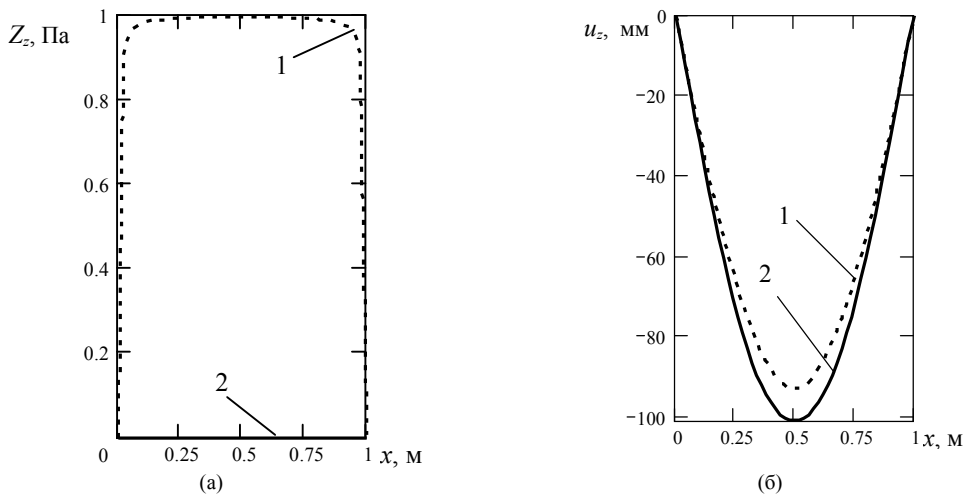


Рис. 2. Розподіли вздовж осі x напружень Z_z (а) та переміщень u_z (б) зовнішніх поверхонь шарів балки за умови утримання балки за рахунок дотичних напружень що діють по її торцях (1-перший шар, 2 – другий шар)

Конструктивно балка може бути закріплена навантаженою поверхнею – верхньою, або нижньою. Зміна в схемі прикладення навантаження та опорних реакцій вимагає зміни сили стиску на силу розтягу. Переміщення поверхні до якої прикладене навантаження більші в наслідок стиснення (розтягування) балки по її висоті.

Висновки. Методами лінійної теорії пружності, в межах задачі плоского деформування без спрощень в межах плоского деформування побудована математична модель балки шаруватої структури на двох опорах або на пружній опорі. Шари подані як система лінійно пружних тіл. Показники напружено-деформованого стану шарів складені з використанням функції напружень лінійної теорії пружності. Останні задані сумами добутків тригонометричних та показових функцій та сум останніх лінійно залежних від координати нормальної до балки. На поверхні балки, окрім балки на пружній основі, діють нормальні навантаження та сили що їх врівноважують. Для довільної складової суми сформульовані граничні умови та умови сумісності деформування шарів. Розв'язок останніх, як системи лінійних алгебраїчних рівнянь, дозволив знайти значення коефіцієнтів довільної складової суми функцій напружень, відповідно напружень та переміщень шарів балки. Тим самим способом знайдена обмежена кількість коефіцієнтів функцій напружень та виразів показників напружено-деформованого стану шаруватої балки. Складанням обмеженої кількості складових визначені показники напружено-деформованого стану шаруватої балки. Встановлено наступне. Деформації стиску малі відносно деформацій прогину за умови значного перевищення довжини балки над її товщиною. Розрахований прогин нижньої поверхні балки близький до параболічного. Розміри опорних поверхонь що перевищують 1% її довжини суттєво впливають на її прогин – зменшують його. Аналітично визначений середній прогин балки на 0,7% менший за розрахований методами опору матеріалів. Прогини балки залежать і від властивостей матеріалу шарів балки, так зростання коефіцієнта Пуассона від мінімально, рівного нулю до практично максимально, прийнятого рівним 0,45, призводить до зменшення прогинів поверхонь шарів. Зменшення не перевищує 10%.

В наступних дослідженнях доцільно визначити залежність НДС шаруватих балок отриманих нанесенням, покриттям, наплавленням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Байда Д.М., Войцехівський О.В., Попов В.О., Котенко В.В. Несуча здатність залізобетонних мостових балок за похилими перерізами. // Науково-технічний збірник Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. – 2024. – Том 21. – № 1. – С. 6–13. DOI 10.31649/2311-1429-2024-1-6-13.

2. Шваб'юк В.І., Ротко В.О., Ротко С.В. Уточнений розрахунок підсилених балок методом приведених перерізів. // Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві. – 2017. – №7. – С. 273–278.
3. Шваб'юк В.І., Ротко С.В., Шваб'юк В.В., Ужєгова О.А., Кислюк Д.Я. До проблеми визначення залишкової міцності балок, пошкоджених тріщинами. // Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві. – 2019. – № 12. – С. 229–236. Doi : 10.36910/6775-2410-6208-2019-2(12)-28.
4. Гомон С. С., Гомон П. С., Павлюк А. П. Розрахунок косозігнутих дерев'яних балок з використанням деформаційної моделі. // Ресурсоекономічні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2018. – Вип. 36. – С. 87–95. http://nbuv.gov.ua/UJRN/rmkbs_2018_36_13.
5. Угримов С.В. Моделирование напряжено-деформованного stanu шаруватих ортотропних пластин на пружній основі /С. В. Угримов, Ю. М. Тормосов, В. А. Куценко, І. В. Лебединець // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – № 5(7). – С. 4–9. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vejpte_2014_5%287%29_2.
6. Опанасович В. К., Слободян М. С., Білаш О. В. Чистий згин полоси (балки) з довільно орієнтованою наскрізною тріщиною. // Вісник Київського національного університету. Серія фізико-математичні науки. – 2019. – №1. – С.142–145.
7. Козак Р. П. Несуча здатність тонких багатошарових скляних балок: дис. доктора філософії: 192 – Будівництво та цивільна інженерія. // Національний університет «Львівська політехніка». – Львів. – 2023. – 189 с.
8. Поліщук М. В. Напружено-деформований стан згинальних елементів з клеєної деревини з комбінованим армуванням: дис... доктора філософії: 192 – Будівництво та цивільна інженерія. // Національний університет водного господарства та природокористування. – Рівне. – 2023. – 168 с.
9. Гезенцевей Ю.І., Олевський В.І., Волчок Д.Л., Олевський О.В. Розрахунок вдосконалених сталевих балок будівель і споруд гірничо-металургійного комплексу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА. – 2021. – Вип. 106. – С. 54-67. DOI: 10.32347/2410-2547.2021.106 54-67
10. Бікс Ю. С. Порівняльний аналіз методик визначення несучої здатності залізобетонних балок за різними залежностями «напруження - деформації» згідно ДБН В.2.6:U98:2009. // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. – 2022. – Том 19. – № 1. С. 21-31. DOI 10.31649/2311-1429-2022-1-21-31.
11. Гоменюк С.І., Спиця О.Г. Аналітичний та чисельний підходи до розв'язання задач теорії пружності для багатошарових середовищ: монографія. Видавничий дім «Гельветика». – Херсон. – 2018. – 128с.
12. Й. Й. Лучко, І. М. Добрянський. Уточнений розрахунок і дослідження напружено-деформованого стану балки при згині. // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – 2010. – Вип. 33. – С. 155–160.
13. Лучко Й. Й., Добрянський І. М., Іваник Є. Г. Визначення напруженого стану балки методами теорії пружності // Науково-технічний збірник «Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві». – 2010. – Том 9. – Вип. № 2. – С. 23–36.
14. Бельмас І.В., Білоус О.І., Танцюра Г.І. Визначення напружено-деформованого стану багатошарового композиту. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА. – 2022. – Вип. 109. – С. 426 – 440. DOI : 10.32347/2410-2547.2022.109.426-440.

REFERENCES

1. Baida D. M., Voitsekhivskiy O. V., Popov V. O., Kotenko V. V. Nesucha zdattnist zalizobetonnykh mostovykh balok za pokhylymy pererizamy (Bearing capacity of reinforced concrete bridge beams by inclined sections.) // Nauk.-tekh. zbirnyk. Suchasni tehnologii, materialy i constructii v budivnyztvi. – 2024. – Tom. 21. – No. 1. – P. 6–13. DOI 10.31649/2311-1429-2024-1-6-13
2. Shvabyuk V. I., Rotko V. O., Rotko S. V. Utochnenny rozrakhunok pidsylenykh balok metodom pryvedenykh pereriziv (Refined calculation of reinforced beams by the method of reduced sections.) // Nauk.-tekh. zbirnyk. Suchasni tehnologii ta matody rozrakhunkiv u budivnyztvi. – 2017. – No. 7. – P. 273–278.
3. Shvabyuk V.I., Rotko S.V., Shvabyuk V.V., Uzhegova O.A., Kyslyuk D.Ya. Do problem vyznachennia zalychkovoi miznosti balok, pokhodgenykh trichynamy (On the problem of determining the residual strength of beams damaged by cracks.) // Nauk.-tekh. Zbirnyk. Suchasni tehnologii ta matody rozrakhunkiv u budivnyztvi. – 2019. – No. 12. – P. 229–236. Doi : 10.36910/6775-2410-6208-2019-2(12)-28
4. Gomon S. S., Gomon P. S., Pavlyuk A. P. Rozrakhunok kosozignutykh derevianykh balok z vykoryctanniam deformaziinnoi modeli (Calculation of obliquely bent wooden beams using a deformation model). // Resursoekonomni materialy, konstrukzii budivli, ta sporudu. – 2018. – Vyp. 36. – P. 87–95. http://nbuv.gov.ua/UJRN/rmkbs_2018_36_13
5. Ugrimov S.V. Modeluvania naprugenno-deformovannogo ctanu sharuvatykh sharuvatykh ortotropnykh plastin na prugonii osnovi (Modeling of the stress-strain state of layered orthotropic plates on an elastic base) /S. V. Ugrimov, Yu. M. Tormosov, V. A. Kutsenko, I. V. Lebedinetes // Wostokhno-Evropeyski gurnal peredovykh tehnologii. – 2014. – No. 5(7). – P. 4–9. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vejpte_2014_5%287%29_2
6. Opanasovych V. K., Slobodyan M. S., Bilash O. V. Chystyi zgin polosy (balky) z dovilno orientovannoio naskriznoioy trichynoiy. (Pure bending of a strip (beam) with an arbitrarily oriented through crack.) // Visnyk Kyivskogo Nationalnogo University. Sekzia fysico-matematyhni nauky. – 2019. – No. 1. – P.142–145
7. Kozak R. P. Nesucha zdattnist tonkykh bagatocharovykh sklianovykh balok: dis...doktora filosofii: 192 – Budivnyztvo ta zyvlna ingeneria (Bearing capacity of thin multilayer glass beams: Diss... Ph.D.: 192 – Construction and civil engineering.) // Nationalnyi Universytet "Lvivska polytechnica". – Lviv. – 2023. – 189 p.
8. Polishchuk M. V. Naprugenno-deformovanni ctanzgynalnykh elementiv z kleenoi derevyvy: dis. doktora filosofii: 192 – Budivnyztvo ta zyvlna ingeneria (Stress-strain state of bending elements made of glued wood with combined reinforcement: Diss... Ph.D.: 192 – Construction and civil engineering.) // Nationalnyi Universytet wodnogo gospodarstva ta pryrodokorystuvannia. – Rivne. – 2023. – 168 p.

9. Gezentsvei Yu. I., Olevsky V. I., Volchok D. L., Olevsky O. V. Rozrakhunok vdoskonaleniykh stalevykh balok budivel i sporud hirnycho-metalurhiinoho kompleksu (Calculation of improved steel beams of buildings and structures of the mining and metallurgical complex) // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekhn. zbirnyk* – K.: KNUBA – 2021. – Vyp. 106. – P. 54-67. DOI: 10.32347/2410-2547.2021.106 54-67.
10. Biks Yu. S. Porivnialnyi analiz metodok vyznachennya nesuchoi zdatnosti zalizobetonnykh balok za riznymi zaleznostyamy «naprugenno-deformazii» zgidno DBN B.2.6.U98:2009.) (Comparative analysis of methods for determining the bearing capacity of reinforced concrete beams according to different dependencies of “stress - deformation” according to DBN B.2.6.U98:2009.) // *Nauk.-tekhn. zbirnyk. Suchasni tehnologii, materialy i constructii v budivnytvi*. – 2022. – Vyp. 19. – No. 1. P. 21-31. DOI 10.31649/2311-1429-2022-1-21-31
11. Homeniuk S.I., Spitsya O.G. Analitichnyy ta khyseľnyi pidhody do rozvyannya zadakh teorii prugnosti dlya bagatocharovykh sereďovych: monografya. Vydavnykhy dim "Helvetica" (Analytical and numerical approaches to solving problems of the theory of elasticity for multilayer media: monograph. Publishing house "Helvetica"). – Kherson. — 2018. – 128p.
12. Y. Luchko, I. M. Dobryansky. Utochnennyi rozrakhunok i doslidgennya naprugenno-deformovannogo stanu balky pry zgyini (Refined calculation and study of the stress-strain state of a beam during bending.) // *Visnyk Dnipropetrovskogo natsionalnogo universytetu zaliznychnoho transportu*. – 2010. – Vyp. 33. – P.155–160.
13. Luchko Y. Y., Dobryansky I. M., Ivanyk E. G. Vyznachennya naprugenno-deformovannogo stanu balky metodamy teorii prugnosti (Determination of the stress state of a beam by methods of the theory of elasticity.) // *Nauk.-tekhn. zbirnyk. Suchasni tehnologii, materialy i constructii v budivnytvi*. – 2010. – Tom. 9. – Vyp. № 2. – P. 23-36.
14. Belmas I.V., Bilous O.I., Tantsura G.I. Vyznachennya naprugenno-deformovannogo stanu bagatocharovogo kompozytu (Determination of the stress-strain state of a multilayer composite.) // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekhn. zbirnyk* – K.: KNUBA 2022. – Vyp. 109. – P. 426 – 440. DOI : 10.32347/2410-2547.2022.109.426-440.

Стаття надійшла 27.01.2025

Бельмас І.В., Білоус О.І., Танцур Г.І., Коврига Д.І., Чумак С.В.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ШАРУВАТОЇ БАЛКИ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Запропоновано аналітичний метод визначення напружень згину балки шаруватої структури з довільною кількістю шарів, включно з останнім шаром напівбесмежної товщини. Метод полягає в прийнятті показників напружено-деформованого стану шарів з використанням функцій напружень Ері лінійної теорії пружності. Вони прийняті у формі сум добутків експоненційних та тригонометричних функцій та таких добутків помножених на координату осі нормальної до балки. На підставі граничних умов, умов сумісності та нерозривності деформування з'єднаних шарів сформульована система лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок систем, знайдені значення коефіцієнтів функцій напружень. Відомі коефіцієнти функцій Ері дозволяють визначити напружено-деформований стан шарів балки. Розглянуто випадки спирання балки частинами її поверхні та її утримання торцями. Встановлено наступне. Деформації стиску малі відносно деформацій прогину за умови значного перевищення довжини балки над її товщиною. Розрахований прогин нижньої поверхні балки близький до параболічного характеру. Розміри опорних поверхонь що перевищують 1% її довжини суттєво впливають на її прогин – зменшують його. Аналітично визначений середній прогин балки на 0,7% менший за вигин розрахований методами опору матеріалів. Прогини балки залежать і від властивостей матеріалу шарів балки, так зростання коефіцієнта Пуассона від мінімально, рівного нулю до практично максимально, прийнятого рівним 0,45, призводить до зменшення прогинів поверхонь шарів. Зменшення не перевищує 10%. Запропонований метод базується на положеннях лінійної теорії пружності. Перетворення здійснені без спрощень. Отримані результати не суперечать результатам отриманим методами опору матеріалів, в межах лінійної постановки мають достатньо високий рівень достовірності. Вони можуть бути використані для розрахунку напружено-деформованого стану балок шаруватої структури прямокутного перетину, включно балок на пружній основі.

Ключові слова: балка шаруватої структури, навантаження, деформація, напруження, функція напружень Ері, механічні властивості матеріалу шарів.

Belmas I.V., Bilous O.I., Tantsura G.I., Kovriga D.I., Chumak S.V.

STRESS STATE OF LAMINATED BEAM UNDER NORMAL LOAD

An analytical method for determining the bending stresses of a beam of a layered structure with an arbitrary number of layers, including the last layer of semi-infinite thickness, is proposed. The method consists in taking the indicators of the stress-strain state of the layers using the Eri stress functions of the linear theory of elasticity. They are taken in the form of sums of products of exponential and trigonometric functions and such products multiplied by the coordinate of the axis normal to the beam. Based on the boundary conditions, conditions of compatibility and continuity of deformation of the connected layers, a system of linear algebraic equations is formulated. The solutions of the systems are found to the values of the coefficients of the stress functions. The known coefficients of the Eri functions allow determining the stress-strain state of the layers of the beam. The cases of supporting the beam by parts of its surface and its holding by the ends are considered. The following is established. Compressive deformations are small relative to deflection deformations provided that the length of the beam significantly exceeds its thickness. The calculated deflection of the lower surface of the beam is close to parabolic in nature. The dimensions of the supporting surfaces exceeding 1% of its length significantly affect its deflection - they reduce it. The analytically determined average deflection of the beam is 0.7% less than the deflection calculated by the methods of material resistance. Beam deflections also depend on the properties of the material of the beam layers, so the increase in Poisson's ratio from a minimum, equal to zero, to a practically maximum, taken equal to 0.45, leads to a decrease in the deflections of the surfaces of the layers. The decrease does not exceed 10%. The proposed method is based on the provisions of the linear theory of elasticity. The transformations are carried out without simplifications. The results obtained do not contradict the results obtained by the methods of material resistance, within the limits of the linear formulation have a sufficiently high level of reliability. They can be used to calculate the stress-strain state of beams of a layered structure of rectangular cross-section, including beams on an elastic base.

Key words: layered beam, load, deformation, stress, Eri stress function, mechanical properties of the layer material.

УДК 539.3

Бельмас І.В., Білоус О.І., Танцюра Г.І., Коврига Д.І., Чумак С.В. **Напружений стан шаруватої балки під дією нормального навантаження** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА. – 2025. – Вип. 114 – С. 276-283.

Rozглядається алгоритм визначення напружено деформованого балок шаруватої структури прямокутного перетину, включно балок на пружній основі.

Табл. 0. Іл. 2. Бібліогр. 14 назв.

UDC 539.3

Belmas I.V., Bilous O.I., Tantsura A.I., Kovriga D.I., Chumak S.V. **Stress state of a laminated beam under normal load** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник – К.: КНУБА. – 2025. – Vol. 114 – С. 276-283.

An algorithm for determining the stress-strain deformation of beams of a layered structure of rectangular cross-section, including beams on an elastic base, is considered.

Tabl. 0. Fig. 2. Ref. 14.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри машинобудівних технологій та інженерії БЕЛЬМАС Іван Васильович

Адреса робоча: 51900, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2, ДВНЗ «Дніпровський державний технічний університет», БЕЛЬМАС Іван Васильович

Мобільний тел.: +38098 5412812

E-mail: belmas09@meta.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-2112-0303>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри галузевого машинобудування БІЛОУС Олена Іванівна

Адреса робоча: 51900, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2, ДВНЗ «Дніпровський державний технічний університет», БІЛОУС Олена Іванівна

Мобільний тел.: +380978786830

E-mail: bilouselena66@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-6398-8843>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри галузевого машинобудування ТАНЦУРА Ганна Іванівна

Адреса робоча: 51900, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2, ДВНЗ «Дніпровський державний технічний університет», ТАНЦУРА Ганна Іванівна

Мобільний тел.: +380971939382

E-mail: hannaivan71@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-8672-1153>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): пошукач третього (Phd) рівня вищої освіти КОВРИГА Дмитро Ігорович

Адреса робоча: 51900, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2, ДВНЗ «Дніпровський державний технічний університет», КОВРИГА Дмитро Ігорович

Мобільний тел.: +380962571651

E-mail: Dmitij.kovriga@bkoks.dp.ua

ORCID ID: <http://orcid.org/0009-0002-5851-0946>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): пошукач третього (Phd) рівня вищої освіти ЧУМАК Сергій Васильович

Адреса робоча: 51900, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2, ДВНЗ «Дніпровський державний технічний університет», ЧУМАК Сергій Васильович

Мобільний тел.: +380964781609

E-mail: Chumaks.v1@gmail.com

ORCID ID: <http://orcid.org/0009-0009-2706-9167>