

УДК 539.3

НЕЛІНІЙНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПОБУДОВОЮ ТРАЄКТОРІЇ ГЛИБОКОЇ СВЕРДЛОВИНИ

О.М. Андрусенко¹,

канд. техн. наук, доцент

В.В. Гайдайчук²,

д-р техн. наук, професор

К.Е. Котенко²,

канд. техн. наук, доцент

М.В. Лазарева²,

канд. техн. наук, доцент

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,
проспект Берестейський, 37, Київ, 03056

²Київський національний університет будівництва та архітектури,
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, 03680

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.114.145-154

На базі методів диференціальної геометрії, нелінійного програмування та обчислювальної математики поставлено задачу про оптимальне керування трасуванням траєкторії глибокої свердловини. Сформульовані нелінійні диференціальні рівняння осової лінії свердловини, в якості керуючої функції обрана її кривина. Розглянуті різні форми цільових функціоналів, що дозволяють згладжувати траєкторії, а також мінімізувати вартість бурильних робіт при різноманітних обмеженнях, що викликані геологічною неоднорідністю гірських порід в зоні буріння і розташуванням нафтових та газових шарів.

Ключові слова: криволінійне буріння, глибокі свердловини, оптимізація траєкторії, оптимальне керування.

Вступ

Проблеми оптимального керування побудовою траєкторії руху механічної системи та оптимізації поведінки виробничого процесу є найбільш розвиненими розділами математичної теорії (нелінійного) програмування. Він складається з класичних методів диференціального та варіаційного обчислень, розроблених Л. Ейлером і Ж. Лагранжем і удосконалених у працях Р. Беллмана, Л. Понтрягіна та їхніх учнів [1 – 6].

Теорія оптимального керування - це розділ прикладної математики, який пов'язаний із побудовою закону керування для динамічної системи протягом інтервалу часу, який оптимізує цільову функцію. Задача керування включає функцію витрат, яка є функцією змінних стану та керування.

Оптимальні методи управління широко застосовуються в авіаційній і космічній техніці, а також при управлінні рухом наземних транспортних засобів і відстеження їх маршрутів. У формулюванні цих задач передбачається, що в кожен момент часу механічний стан системи визначається фазовими змінними $z_1(t)$, $z_2(t)$, ..., $z_p(t)$, що представляють узагальнені координати та узагальнені швидкості. Набір фазових змінних можна розглядати як компоненти певного p -вимірного вектору, який називається фазовим вектором або вектором стану.

Нехай система управляється впливом дій $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_r(t)$, які можна розглядати як компоненти r -вимірного вектору керування, що представляє керуючі сили та моменти, прикладені до механічної системи. Проте введені змінні не обов'язково є компонентами реальних векторів і можуть мати різну фізичну природу. Їх представлення у векторній формі є корисним математичним прийомом.

Припустимо, що зміна стану змінних у часі описується системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь руху, яку можна представити в нормальній формі і описати у вигляді:

$$\dot{z} = f(z, u, t). \quad (1)$$

Тут і далі крапка позначає диференціювання за часом t .

Розглянемо це в часовому просторі $[t_0, T]$ вектор-функція $f(z, u, t)$ є неперервною та диференційованою відносно всіх компонент векторів z , u і часу t і система (1) має єдиний розв'язок для початкових даних $z(t_0) = z_0$

Мета керування полягає в тому, щоб привести систему в деякий заданий стан

$$z(T) = z_T \quad (2)$$

протягом інтервалу часу $T - t_0$. Вектор z_T - фіксований.

У загальному випадку мета керування процесом також може залежати від часу, а умова терміналу може приймати режим

$$h[z(T), T] = h_T. \quad (3)$$

Тут $h[z(T), T]$ - k -вимірний вектор-функція.

Оскільки технічні можливості керуючого пристрою обмежені, область їх зміни може бути реалізована у вигляді:

$$\varphi[u(t)] \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Обмеження (4) можна доповнити n -вимірним обмеженням на фазові змінні

$$\psi[z(t), t] \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (5)$$

встановлення зони забороненого руху для системи.

У багатьох задачах як індикатор якості управління використовується витрата ресурсів, необхідних для реалізації управління процесом. Це формалізується у вигляді інтегрального цільового функціоналу

$$\Phi(u) = \int_{t_0}^T F(u(t)) dt. \quad (6)$$

Для вирішення задач оптимального керування траєкторії системи (1) шляхом мінімізації функціоналів (6) з обмеженнями (2) – (5) використовуються методи оптимального керування, розроблені Р. Беллманом [7] і Л. Понтрягіна [4]. Їх оптимізаційний аналіз можна проводити також комп'ютерними методами нелінійного програмування [1, 3, 5], які відрізняються своїми алгоритмами та наочністю. Зокрема, ефективним стає використання методу проекції об'єктивного функціонального градієнта на лінеаризовані обмеження [6]. З його використанням було здійснено оптимальне керування траєкторіями міжорбітального польоту космічних апаратів, а також їх м'яке та жорстке зближення [7]. Використаний у цих роботах підхід також може бути застосований для оптимального керування траєкторією відстеження нафтогазових свердловин.

Метод оптимізації траєкторії свердловини

Фазові та керуючі параметри, використані вище в постановці задачі оптимального керування, не обов'язково можуть мати значення реальних векторів швидкості та прискорення, але мають різний фізичний зміст. Наприклад, заміна параметра довжини свердловини на параметр часу дозволяє перейти до оптимізації просто геометричної побудови контурів глибоких криволінійних нафтогазових свердловин. Нині відомі непоодинокі випадки, коли бурять вертикальні свердловини глибиною 10 км і горизонтальні довжиною 13 км.

Вони забуваються в складних кліматичних умовах і в складних неоднорідних тектонічних породах. Сланцева революція також внесла в ці технології додаткові новинки. Техніка і методи буріння свердловин розвиваються настільки швидко, що їх наукове осмислення і обґрунтування не встигають їх вдосконалювати. Тому, як правило, ці процедури супроводжують різні непередбачувані аварійні ефекти та збої. Найсерйознішими з них є вигин бурильних колон, їх резонансні коливання, залипання під час буксування та обертання, самозапуск крутильної релаксаційної вібрації та самозбудження прямого, зворотного та надшвидкого завихрення долота [8].

Основними факторами, що сприяють виникненню цих ефектів, є контактні сили взаємодії між бурильною колоною і стінкою свердловини та викликані ними сили тертя. Як підтверджують розрахунки [8], ці сили зростають із ускладненням геометрії траєкторії

свердловини та збільшенням її довжини. При цьому найбільш помітне їх зростання спостерігається в зонах різкого вигину осової лінії свердловини і в місцях порушення її функції кривини. З цієї причини можна зробити висновок, що за суворих геологічних умов і обмежень щодо залягання нафти важливо вибрати траєкторію свердловини так, щоб інтегральні показники її кривизни, довжини та вартості були мінімальними.

Завдяки вищезазначеним ефектам зменшення контактних сил і сил тертя ця оптимізація дозволить

- зменшити необхідний загальний крутний момент приводного пристрою;
- покращити передачу крутного моменту та осового зусилля до бурового долота;
- зменшити сили опору, що діють на бурильну колону під час виконання спуско-спускових операцій та зменшити витрати енергії на виконання цих операцій;
- зменшити внутрішні осові зусилля в бурильній колоні та ймовірність руйнування її труби;
- зменшити швидкість зношування труб бурильної колоні;
- зменшити ймовірність виникнення заїдань бурильної колоні;
- мінімізувати загальну вартість буріння свердловини.

Інтуїтивно можна уявити, що оптимізована траєкторія матиме також найбільш плавний і простий контур, що призведе до спрощення її руху.

При цьому зауважимо, що в більш коротких і гладких свердловинах реалізуються більш сприятливі умови для перебігу гідро- та аеродинамічних процесів. У них сили гідро- та аеродинамічного опору зменшуються як при бурінні, так і при експлуатації. Крім того, знижуються швидкості закупорювання свердловин і тромбування відкладеннями високомолекулярних парафінів, піробітумів, нафтогазових гудронів і піщаного ущільнення. З урахуванням цих факторів доцільним стає вибір цільової функції задачі оптимального керування відстеженням траєкторії свердловини в режимі

$$\Phi(u, L) = \int_0^L (k(l))^2 dl = \int_0^L (u(l))^2 dl \rightarrow \min, \quad (7)$$

що характеризує криволінійність свердловини та її довжину (задача Лагранжа). Враховуючи, що в даний час активно розробляються методи точного буріння, реалізація їх не складе труднощів.

У рівнянні (7) $k(l)$ – кривина лінії осі свердловини, обрана для функції керування $u(l)$; l – змінна, що параметризує траєкторію свердловини і вимірюється довжиною її відрізка від початкової до поточної точки; L – повна довжина траєкторії.

Доречно відзначити ще одну особливість, пов'язану з вибором цільової функції у формі (7). Він також визначає потенціальну енергію вигину бурильної колоні

$$\Pi = E J \int_0^L k^2 dl,$$

де E – модуль пружності матеріалу бурильної колоні, J – осовий момент інерції поперечного перерізу бурильної колоні.

Цю енергію необхідно додатково витратити на роботу сил тертя, щоб ввести бурильну колону в свердловину. Мінімізація функціонала (7) дозволяє зменшити і ці енергетичні витрати.

Якщо в зоні буріння структура гірських порід неоднорідна, то вартість з одного метра проходки свердловини зростає не тільки із збільшенням глибини, але й залежить від міцності породи в конкретному місці (тобто $c = c(x, y)$), загальна вартість буріння свердловини

$$\Phi(x, y) = \int_0^L c(x, y) dl$$

можна вибрати (також задачу Лагранжа). Тоді, вирішуючи задачу оптимального керування траєкторією свердловини, стає можливим мінімізувати загальну вартість її буріння.

У практиці буріння часто зустрічаються випадки, коли необхідно мінімізувати якусь функцію фазових координат у кінцевій точці. Це можуть бути, наприклад, загальна довжина свердловини, точність охоплення заданої нафтоносної зони і т. д. Цей вид контролю якості може бути виражений через кінцевий функціонал (задача Майєра)

$$\Phi(z, u) = F(z(L), L). \quad (8)$$

Розглянемо двовимірний випадок постановки задачі. Нехай траєкторія визначається кривою в системі Oxy координат (рис. 1). Вона повинна виходити з точки O і доходити до кінця нафтоносного пласту Q таким чином, щоб обидві дотичні до кривих S і Q збігалися. При цьому крива S не повинна проходити через заборонену зону, обмежену кривою R .

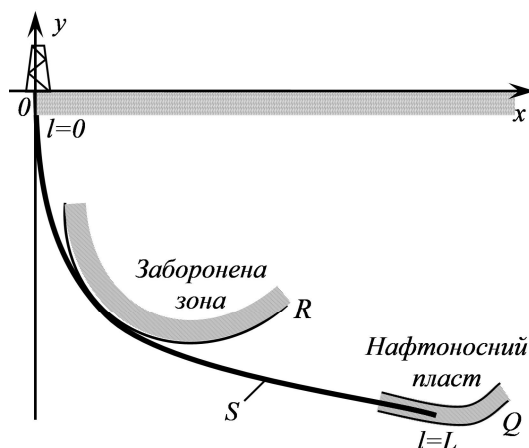


Рис. 1. Схема відстеження траєкторії свердловини

Згідно з цими припущеннями, роль фазових змінних, що використовуються в рівнянні (1) керуваного руху відтворюється координатами x і y траєкторії S . У розглянутому випадку для виведення рівнянь керування записується диференціальне рівняння кривини [4]

$$k = \sqrt{x''^2 + y''^2}.$$

Тут штрих позначає диференціювання відносно l .

Оскільки припускається, що $k = u$, перетворимо це рівняння до вигляду:

$$x''^2 + y''^2 = u^2. \quad (9)$$

Беручи до уваги, що фазові змінні $x(l)$, $y(l)$ і незалежний параметр l на кривій S

пов'язані кореляцією

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2, \quad (10)$$

можна отримати

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1 \quad (11)$$

або

$$y' = \frac{dy}{dl} = \pm \sqrt{1 - (x')^2}. \quad (12)$$

Тоді,

$$y'' = \frac{d}{dl} y' = \pm \frac{d\sqrt{1 - (x')^2}}{dl} = \mp \frac{x'}{\sqrt{1 - (x')^2}} x''. \quad (13)$$

Підставляючи праву частину рівняння (13) у рівнянні (9), маємо

$$x''^2 + y''^2 = x''^2 + \frac{x'^2}{1 - x'^2} x''^2 = \frac{1}{1 - x'^2} x''^2 = u^2. \quad (14)$$

В кінцевому підсумку після елементарних перетворень виходить система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} x'' &= \pm \sqrt{1 - (x')^2} u, \\ y'' &= \mp x' u, \end{aligned} \quad (15)$$

яку можна легко перетворити до нормальної форми (1).

Рівняння (15) еквівалентні системі

$$\begin{aligned} y'' &= \pm \sqrt{1 - (y')^2} u, \\ x'' &= \mp y' u. \end{aligned} \quad (16)$$

При реалізації розрахунку можливе використання будь-якої із систем (15) або (16).

Ці рівняння необхідно доповнити граничними умовами, які грають роль додаткових обмежень. У верхньому кінці вони можуть бути представлені у фіксованому вигляді:

$$\begin{aligned}x(0) &= 0, \quad y(0) = 0, \\x'(0) &= 0, \quad y'(0) = -1,\end{aligned}\tag{17}$$

У нижній частині їх режим залежить від передбачуваної постановки задачі. Припустимо, що на цьому кінці свердловина повинна входити в нафтоносну товщу (схематично представлену кривою Q на Рис. 1) таким чином, щоб дотичні до траєкторії та кривої збігалися. Нехай крива Q описується рівнянням

$$h(x, y) = 0.\tag{18}$$

У процесі оптимального аналізу можна прийняти загальне припущення, що кінцеве положення $l = L$ на кривій Q не задано заздалегідь і його слід знайти, виходячи зі сформульованих умов оптимальності. У цьому випадку цей кінець виявляється рухомим і перша гранична умова, що грає роль обмеження, набуває вигляду:

$$h(x(L), y(L)) = 0.\tag{19}$$

Причому наближення траєкторії S до кривої Q повинно здійснюватися із збігом їх дотичних. З цієї причини рівності

$$\left. \frac{dx}{dl} \right|_S = \left. \frac{dx}{ds} \right|_Q, \quad \left. \frac{dy}{dl} \right|_S = \left. \frac{dy}{ds} \right|_Q\tag{20}$$

повинні виконуватися. Тут s - натуральний параметр, що характеризує криву Q .

Крім кореляцій (15) – (20), які відіграють роль активних обмежень, нерівності

$$e(u) \leq 0, \quad g(x, y) \leq 0,\tag{21}$$

можна включити до даної проблеми. Вони позначають допустимі області для зміни керування u і фазових змінних x і y . На рисунку 1 крива Q служить межею між допустимою та недопустимою областями.

Отже, через використання рівнянь (15) і методів нелінійного програмування (оптимального керування), побудувати в допустимій області траєкторію свердловини S (рис. 1) таким чином, щоб міра (7) її викривлення була мінімальною. В результаті аналізу керування необхідно знайти оптимізує функцію $u(l)$ та відповідні їй фазові змінні $x(l)$ та $y(l)$.

Методика оптимального керування траєкторією свердловини

Для формалізації задачі оптимального керування приведемо систему (15) до нормального вигляду. Для цього введемо 4-вимірний вектор фазових змінних

$$z(l) = [z_1(l), z_2(l), z_3(l), z_4(l)]^*,\tag{22}$$

де $z_1 = x$, $z_2 = x' = z'_1$, $z_3 = y$, $z_4 = y' = z'_3$, зірочка (*) позначає операцію транспонування.

Зупинимося на випадку, коли верхні знаки реалізуються перед коефіцієнтами правих членів у рівняннях (15).

Тоді

$$x' = z'_1 = z_2, \quad x'' = z'_2 = \sqrt{1 - z_2^2} \cdot u, \quad y' = z'_3 = z_4, \quad y'' = z'_4 = -z_2 u.\tag{23}$$

Представимо цю систему у векторному вигляді:

$$z' = f(z, u).\tag{24}$$

Це залежить від початкових умов (18) при $l = 0$

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0, \quad z_3(0) = 0, \quad z_4(0) = -1.\tag{25}$$

На кінці $l = L$ справедливі умови (19), (20).

Перепишемо їх з використанням нових позначень

$$h(z_1(L), z_3(L)) = 0,\tag{26}$$

$$z_2|_S = z_2|_Q, \quad z_4|_S = z_4|_Q.\tag{27}$$

Обмеження (22), що діє вздовж траєкторії, мають вигляд:

$$e(u) \leq 0, \quad g(z_1, z_3) \leq 0.\tag{28}$$

Цільовий функціонал (8)

$$\Phi(u) = \int_0^L (k(l))^2 dl = \int_0^L u^2 dl \rightarrow \min, \quad (29)$$

залишається без змін.

Розглядається деяке початкове (неоптимальне) управління $u(l)$, і відповідна траєкторія $z(l)$ побудована як розв'язок двоточкової крайової задачі для рівняння (24) за всіх додаткових обмежень (25) – (28). Разом з керуванням $u(l)$ будується близьке до нього керування $u + \lambda \delta u$, що забезпечує менше значення $\Phi(u)$. Тут λ – деякий скалярний параметр, δu – змінюю керування.

У цьому випадку змінна $\delta z(l)$ фазового вектора $z(l)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{d}{dl}(\delta z) = f_z \delta z + f_u \delta u \quad (30)$$

з початковими умовами $\delta z(0) = 0$.

Тут і далі f_z і f_u означають матрицю Якобі $f_z = \left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right]$ і вектор-стовпець $\left[\frac{\partial f_i}{\partial u} \right]$ ($i, j = 1, 2, \dots, 4$).

У нашому випадку система (30) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d \delta z_1}{dl} &= \delta z_2, & \frac{d \delta z_2}{dl} &= -\frac{z_2}{\sqrt{1-z_2^2}} \cdot u \cdot \delta z_2 + \sqrt{1-z_2^2} \cdot \delta u, \\ \frac{d \delta z_3}{dl} &= \delta z_4, & \frac{d \delta z_4}{dl} &= -u \delta z_2 - z_2 \delta u. \end{aligned} \quad (31)$$

Граничні умови

$$\delta z_1 = 0, \delta z_2 = 0, \delta z_3 = 0, \delta z_4 = 0 \quad (32)$$

відповідають у початковій точці $l = 0$, а рівності

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z_1} \delta z_1(L) + \frac{\partial h}{\partial z_3} \delta z_3(L) &= 0, \\ \delta z_2(L) &= h_1(L) \delta z_1(L) + h_2(L) \delta z_3(L), \\ \delta z_4(L) &= h_3(L) \delta z_1(L) + h_4(L) \delta z_3(L) \end{aligned} \quad (33)$$

дійсні на кінці $l = L$.

Якщо за умовами задачі нижній кінець не може зміщуватися, то обмеження (32), (33) спрощуються

$$\delta z_1(L) = 0, \delta z_2(L) = 0, \delta z_3(L) = 0, \delta z_4(L) = 0. \quad (34)$$

Якщо в деяких точках $l = l_i$ виконуються обмеження (28), то

$$\frac{\partial e}{\partial u} \delta u = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial g}{\partial z_3} \delta z_3 = 0. \quad (35)$$

Аналогічно визначається варіація цільового функціоналу

$$\delta \Phi = \Phi_u \delta u = \int_0^L 2u \delta u dl, \quad (36)$$

а його антиградієнтом є

$$-\nabla \Phi = -[\Phi_u]^*.$$

Тут Φ_u є похідною Φ відносно u .

Алгоритм розрахунку керуючої варіації

Визначається варіація керування $\delta u(l)$, що задовольняє обмеженням (33) – (35) і покращує функціонал $\Phi(z, u)$. Виражаються фазові змінні $\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3, \delta z_4$ з рівнянь (32) – (35). Для цього представляється рішення рівнянь (31) у формі Коші:

$$\delta z(l) = \int_0^l K(l, \lambda) f_u(\lambda) \delta u(\lambda) d\lambda, \quad (37)$$

де $K(l, \lambda) = Y(l) \cdot Y^{-1}(\lambda)$ – матриця Коші розмірності 4×4 , $Y(l)$ – фундаментальна матриця розмірності 4×4 системи однорідних рівнянь $z' = f_z \delta z$, $Y(0) = I$, I – одиничною матрицею розмірності 4×4 .

Беручи до уваги рівняння (37) систему обмежень (34) можна представити в інтегральному вигляді:

$$\delta z(L) = \int_0^L K(L, l) f_u(l) \delta u(l) dl = 0. \quad (38)$$

У цій рівності виділяється матриця-стовпець $K(L, l) f_u(l)$ розмірністю 4×1 .

Напрямок найшвидшого спуску цільового функціонала визначається вектором функціонального антиградієнта

$$-\nabla \Phi = -[\Phi_u]^* = -2u(l). \quad (39)$$

У нашому випадку це скалярна функція.

Виконуючи операцію проектування антиградієнта (39) на лінеаризоване обмеження [3], маємо

$$\delta u = -\alpha [2u - D^* T], \quad (40)$$

де α – малий нормуючий множник, що визначає величину кроку в визначеному напрямку, $T = C^{-1}M$ – 4-вимірний вектор-стовпець множників Лагранжа умов Куна-Таккера,

$C = \int_0^L D(l) D^*(l) dl$ – квадратна матриця розмірності 4×4 (матриця Гріна), при цьому $\det C \neq 0$ –

умова керованості системи, $M = \int_0^L D(l) 2u dl$ є 4-вимірним вектор-стовпцем.

У результаті виконання процедури (40) буде знайдено малий оптимізуючий приріст δu керування u і відповідно всі відповідні прирости фазових змінних δz_i (за допомогою формули (37)). Це рішення також задовольняє обмеження (34). Додаючи знайдені варіації керування δu та фазові змінні δz до відповідних відомих змінних, отримуємо новий стан системи $z + \delta z$, $u + \delta u$, який є ближчим до мінімуму функціонала $\Phi(u)$. Виконуючи наступні кроки вдосконалення розв'язку, вдається досягти мінімального значення функціонала $\Phi(u)$ за умов (26), (27). При цьому необхідно враховувати, що на кожному кроці процедур оптимізації використовувалася операція лінеаризації. Отже, невеликі неточності, які виникли в нелінійних рівняннях обмежень, слід покращувати після кожного кроку лінеаризації. Це уточнення виконується за допомогою методу Ньютона.

Обговорення результатів

Розглядається випадок, коли початкова траєкторія свердловини має контур, зображений на рис. 2. Вона складається з трьох частин кіл радіусів $R_1 = 18$ км, $R_2 = 0,48$ км, $R_3 = 12$ км та кутів $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 15^\circ$.

На рис. 3 зображені початкова функція кривини $k(l)$, яка представлена розривною

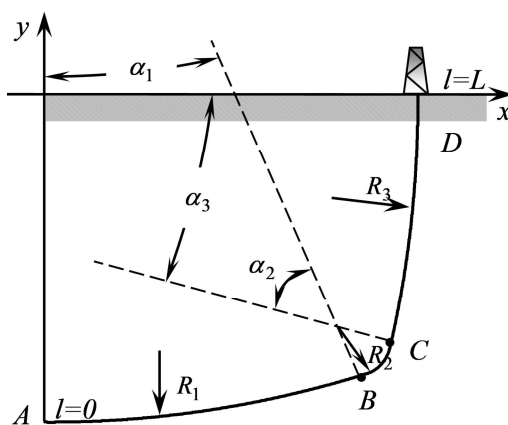


Рис. 2. Початкова траєкторія свердловини

лінією 1 з постійними сегментами $1/R_1$, $1/R_2$, та $1/R_3$, і лінія 2 - оптимальна функції кривини $k(l)$.

Для оптимізації траєкторії свердловини інтеграл (29) було мінімізовано шляхом використання операцій (37) – (40). Оптимальний стан досягався після реалізації $n=155$ варіаційних кроків, коли визначник матриці C набував близького до нуля значення. Це є критерієм збіжності процесу багатокрокової оптимізації.

Діаграма $\Phi(k(l))$ зниження від початкового значення $\Phi(k_0(l))=2.1596$, $1/\text{км}$ до кінцевої величини $\Phi(k_{155}(l))=0.5324$, $1/\text{км}$ показана на рисунку 4.

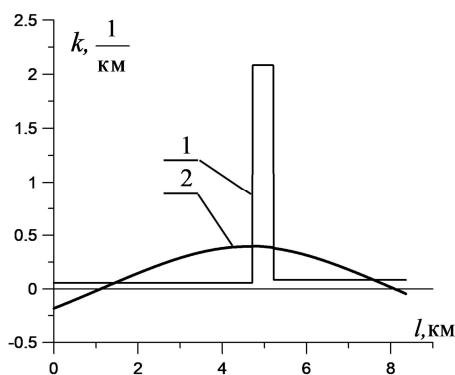


Рис. 3. Початковий (1) та оптимальний (2) функціонал кривини $k(l)$

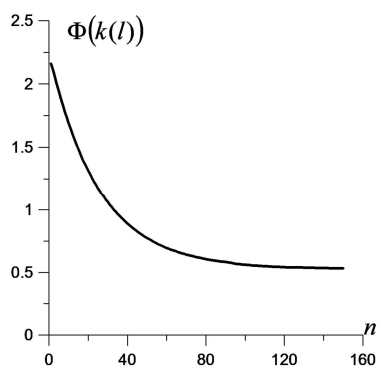


Рис. 4. Діаграма зниження значення $\Phi(k(l))$

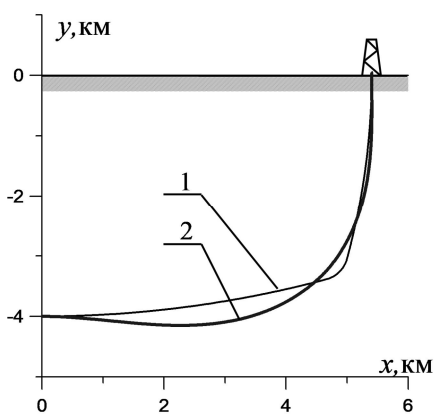


Рис. 5. Початковий (1) та оптимальний (2) контури траєкторії свердловини

На рис. 5 зображено початкову (крива 1) та оптимізовану (крива 2) траєкторії свердловини. Перший розглядався для аналізу розподілених сил тертя, що протидіють протягненню бурильної колони всередині обраної свердловини, складеної з трьох дуг кіл. Показано, що в точках з'єднання дуг сили набувають суттєвих збільшень. Оскільки оптимізована траєкторія більш плавна, вона втратила ці недоліки.

Висновки

1. Поставлено задачу оптимального керування траєкторією свердловини. Розглядаються різні цільові функції. Методика оптимізації базується на неперервній формі запропонованого авторами методу проєкції градієнта цільової функції на лінеаризовані обмеження.

2. Розглянуто простий приклад оптимізації плоскої траєкторії. Траєкторія свердловини оптимізована щодо плавності її контуру.

3. На основі постановки задач Лагранжа та Майєра розроблений підхід також може бути використаний для оптимізації 3D та багаторозгалужених свердловин щодо їх загальної кривини, довжини та вартості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Avriel, Mordecai Nonlinear Programming: Analysis and Methods. — Dover Publishing, 2003. - 544 pp.
2. Jan Brinkhuis and Vladimir Tikhomirov Optimization: Insights and Applications. - Princeton University Press, 2005. - 680 pp.
3. Luenberger, David G.; Ye, Yinyu. Linear and Nonlinear Programming. International Series in Operations Research & Management Science. - 116 (Third ed.) New York: Springer, 2008. - 546 pp.
4. Ross, I.M. A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control. - Collegiate Publisher, 2009. - 82 pp.
5. Ruszczynski, Andrzej. Nonlinear Optimization. - Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006. - 464 pp.
6. Гуляев В.И., Баженов В.А., Кошкин В.Л. Оптимальное управление движением механических систем. - Киев, УМКВО, 1988. - 232 с.
7. Richard E. Bellman. Dynamic Programming. Princeton Landmarks in Mathematics. - Princeton, 2010. - 392 pp.

8. Gulyayev, V., Glazunov, S., Glushakova, O., Vashchilina, E., Shevchuk, L., Shlyun, N., Andrusenko, E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. - Cambridge Scholars Publishing, 2019.

REFERENCES

1. Avriel, Mordecai Nonlinear Programming: Analysis and Methods. - Dover Publishing, 2003. - 544 pp.
2. Jan Brinkhuis and Vladimir Tikhomirov Optimization: Insights and Applications. - Princeton University Press, 2005. - 680 pp.
3. Luenberger, David G.; Ye, Yinyu. Linear and Nonlinear Programming. International Series in Operations Research & Management Science. - 116 (Third ed.) New York: Springer, 2008. - 546 pp.
4. Ross, I.M. A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control. - Collegiate Publisher, 2009. - 82 pp.
5. Ruszczynski, Andrzej. Nonlinear Optimization. - Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006. - 464 pp.
6. Gulyayev, V.I., Bazhenov, V.A., Koshkin, V.L. Optimal Control of Mechanical Systems Motion. - UMK VO, Kyiv, 1988. - 232 pp. (in Russian).
7. Richard E. Bellman. Dynamic Programming. Princeton Landmarks in Mathematics. - Princeton, 2010. - 392 pp.
8. Gulyayev, V., Glazunov, S., Glushakova, O., Vashchilina, E., Shevchuk, L., Shlyun, N., Andrusenko, E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. - Cambridge Scholars Publishing, 2019.

Стаття надійшла 25.02.2025

Андрусенко О.М., Гайдайчук В.В., Котенко К.Е., Лазарева М.В.

НЕЛІНІЙНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПОБУДОВОЮ ТРАЄКТОРІЇ ГЛИБОКОЇ СВЕРДЛОВИНИ

Використання методів теорії оптимального проектування та управління може забезпечити значні переваги при розробці оптимальних траєкторій для буріння нафтових і газових свердловин. На сьогодні нафтогазова промисловість стикається з проблемами, пов'язаними з видобутком та перерозподілом нафтогазових ресурсів. Сучасне буріння часто здійснюється на великих глибинах, де спостерігаються граничні значення швидкостей, гідростатичних тисків і температур, а також параметрів міцності та зношування матеріалів бурильних колон, під впливом фрикційних явищ, інтенсивних коливань і нестабільності всієї системи. Геометричний вигляд траєкторії свердловини, що залежить від структури нафтогазового родовища та прилеглих геологічних порід і їх механічних властивостей, має значний вплив на ефективність буріння, продуктивність свердловини, а також на ризики виникнення нештатних і аварійних ситуацій.

Траєкторія свердловини, а також трудові витрати, довжина та вартість її проходки, значною мірою залежать від розташування бурової установки щодо нафтогазоносного резервуару. Отже, координати цієї установки на поверхні землі або моря, тобто її позиціонування, можуть виступати як один із керуючих параметрів у задачі оптимізації траєкторії.

На базі методів диференціальної геометрії, нелінійного програмування та обчислювальної математики поставлено задачу про оптимальне керування трасуванням траєкторії глибокої свердловини. Сформульовані нелінійні диференціальні рівняння осової лінії свердловини, в якості керуючої функції обрана її кривина. Розглянуті різні форми цільових функціоналів, що дозволяють згладжувати траєкторії, а також мінімізувати вартість бурильних робіт при різноманітних обмеженнях, що викликані геологічною неоднорідністю гірських порід в зоні буріння і розташуванням нафто- та газових шарів. Вирішення оптимізаційної задачі здійснюється методом ортогонального проектування антиградієнта цільового функціоналу на лінеаризовані обмеження.

Ключові слова: криволінійне буріння, глибокі свердловини, оптимізація траєкторії, оптимальне керування.

Andrusenko O.M., Gaidachuk V.V., Kotenko K.E., Lazareva M.V.

NONLINEAR OPTIMAL CONTROL OF THE CONSTRUCTION TRAJECTURE OF A DEEP WELL

The use of optimal design and control theory methods can provide significant advantages in developing optimal trajectories for drilling oil and gas wells. Today, the oil and gas industry faces problems associated with the production and redistribution of oil and gas resources. Modern drilling is often carried out at great depths, where the limiting values of speeds, hydrostatic pressures and temperatures, as well as the strength and wear parameters of drill string materials are observed, under the influence of frictional phenomena, intense vibrations and instability of the entire system. The geometric shape of the well trajectory, which depends on the structure of the oil and gas field and adjacent geological rocks and their mechanical properties, has a significant impact on drilling efficiency, well productivity, as well as on the risks of abnormal and emergency situations.

The trajectory of the well, as well as the labor costs, length and cost of its penetration, largely depend on the location of the drilling rig relative to the oil and gas reservoir. Therefore, the coordinates of this rig on the surface of the earth or sea, i.e. its positioning, can act as one of the control parameters in the trajectory optimization problem.

Based on the methods of differential geometry, nonlinear programming, and computational mathematics, the problem of optimal control of deep well trajectory tracing is posed. Nonlinear differential equations of the well centerline are formulated, and its curvature is chosen as the control function. Various forms of objective functions are considered that allow smoothing trajectories, as well as minimizing the cost of drilling operations under various constraints caused by the geological heterogeneity of rocks in the drilling zone and the location of oil and gas layers. The optimization problem is solved by the method of orthogonal projection of the antigradient of the objective functional onto linearized constraints.

Ключові слова: curvilinear drilling, deep boreholes, trajectory optimization, optimal control.

УДК 539.3

Андрусенко О.М., Гайдайчук В.В., Котенко К.Е., Лазарева М.В. Нелінійне оптимальне керування побудовою траєкторії глибокої свердловини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2025. – Вип.114. – С. 145-154.

У статті поставлено задачу оптимального керування траєкторією свердловини. Розглядаються різні цільові функції. Методика оптимізації базується на неперервній формі запропонованого авторами методу проєкції градієнта цільової функції на лінеаризовані обмеження. Розглянуто приклад оптимізації плоскої траєкторії. Траєкторія свердловини оптимізована щодо плавності її контуру.

Лл. 5. Бібліогр. 8 назв.

UDC 539.3

Andrusenko O.M., Gaidaichuk V.V., Kotenko K.E., Lazareva M.V. Nonlinear optimal control of the construction trajectory of a deep well // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2025. – Issue 114. – P. 145-154.

The article sets the problem of optimal well trajectory control. Various objective functions are considered. The optimization method is based on the continuous form of the method proposed by the authors of projecting the gradient of the objective function onto linearized constraints. An example of optimization of a flat trajectory is considered. The well trajectory is optimized for the smoothness of its contour.

Fig. 5. Ref. 8.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «КПІ імені Ігоря Сікорського» АНДРУСЕНКО Олена Миколаївна

Адреса робоча: 03056, Україна, Київ, вул. Політехнічна, 14-б, Корпус 14 03680 Україна, м. Київ, «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», кафедра прикладної математики, АНДРУСЕНКО Олені Миколаївні.

Роб. тел.: +38(044) 204-84-05

Мобільний тел.: +38(067) 298-13-87

E-mail: a.andrusenko@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9986-5888>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної механіки КНУБА ГАЙДАЙЧУК Віктор Васильович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, к. 433, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки, кафедра теоретичної механіки, ГАЙДАЙЧУКУ Віктору Васильовичу

Робочий тел.: +38(044) 241-55-36

Мобільний тел.: +38(097) 542-94-27

E-mail: viktor_gaydaychuk@bigmir.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2059-7433>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри теоретичної механіки КНУБА КОТЕНКО Костянтин Едуардович.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, к. 433, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки, КОТЕНКУ Костянтину Едуардовичу

Роб. тел.: +380 (44) 241-55-72

Моб. тел.: +380 (95) 585-20-76

e-mail: 1969box@mail.ru

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3181-3819>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри опору матеріалів КНУБА, ЛАЗАРЕВА Марина Вікторівна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра опору матеріалів, ЛАЗАРЕВІЙ Марині Вікторівні.

Робочий тел.: +38(044) 241-54-21

Мобільний тел.: +38(093) 167-10-98

E-mail: lazareva.mv@knuba.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7573-1268>