

УДК 539.3

## ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕТОНКИХ ГОФРОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕПЕРЕРВНО- НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

**Л.С. Рожок,**

д-р фіз.-мат. наук, професор

**А.М. Онищенко,**

д-р техн. наук, професор

**Л.А. Крук,**

канд. фіз.-мат. наук, доцент

**З.М. Найдюнова,**

аспірантка

*Національний транспортний університет, м. Київ*

DOI: 10.32347/2410-2547.2024.113.108-115

У даній роботі, із використанням просторової моделі лінійної теорії пружності на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, суть якого викладена в роботах [1, 11], розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок з гофрованим поперечним перерізом, виготовлених з неперервно-неоднорідного матеріалу, при дії внутрішнього тиску за певних граничних умов на торцях. Для класу розглядуваних оболонок встановлено залежність характеристик напруженого стану від амплітуди гофрування та товщини для трьох законів зміни модуля пружності вздовж товщини.

**Ключові слова:** гофровані циліндричні оболонки, дискретні ряди Фур'є, лінійна теорія пружності, напружений стан, неперервно-неоднорідний матеріал, просторова модель.

**Вступ.** Циліндричні оболонки, як конструктивні елементи, що використовуються в різних галузях господарювання [4, 8], мають давню історію застосування. Для вирішення проблем, пов'язаних із забезпеченням міцності та надійності експлуатації подібних елементів в складних умовах, а також для задоволення певних естетичних вимог, обирають циліндричні оболонки, з одного боку, некругової форми поперечного перерізу, а з іншого, виготовлені з, так званих, неперервно-неоднорідних матеріалів (ННМ) [3, 6, 10], що мають характерні властивості. Прорахувати наперед поведінку оболонкової конструкції, обираючи для неї геометричні та фізико-механічні параметри, дозволяє математичний експеримент, що базується на вдало підібраних для конкретного класу задач моделі та методах розрахунків [2, 5, 9, 12].

Дана робота є продовженням досліджень, пов'язаних з визначенням напруженого стану нетонких циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу, виготовлених з ННМ.

**Постановка задачі.** У просторовій постановці лінійної теорії пружності, розглядаються замкнуті вздовж напрямної нетонкі циліндричні оболонки з гофрованим поперечним перерізом, на торцях яких мають місце умови простого обпирання. Розв'язок задачі шукається в інтервалі  $0 \leq s \leq l$ ;  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ;  $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$ , де  $l$  – довжина оболонки,  $\psi$  – деякий кут в поперечному перерізі,  $h$  – товщина оболонки. Для матеріалу обрано полімерний ННМ з градієнтним профілем, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга за товщиною

$$E(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c, \quad -h/2 \leq \gamma \leq h/2. \quad (1)$$

Оболонки знаходяться під дією рівномірного нормального внутрішнього тиску  $q = q_0 \sin(\pi s / l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ).

За розв'язувальні функції обрано три компоненти напружень  $\sigma_\gamma, \tau_{\psi\gamma}, \tau_{s\gamma}$  і три компоненти переміщень  $u_s, u_\psi, u_\gamma$ . Дана крайова задача описується розв'язувальною системою

диференціальних рівнянь шостого порядку в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [1, 7, 11].

**Мета роботи** полягає у проведенні на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [1, 7, 11] чисельного аналізу і, на його основі, встановленні характерних залежностей напруженого стану розглядуваних оболонок даного класу від геометричних параметрів поперечного перерізу поверхні відліку та закону зміни модуля пружності.

**Виклад основного матеріалу.** Поверхня відліку та радіус кривизни, гофрованих у поперечному перерізі оболонок, задається в параметричній формі у вигляді [7]

$$\rho(\psi) = r_0 + \alpha \cos m\psi,$$

$$R_\psi = \frac{\sqrt{\left[ (r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + (\alpha m \sin m\psi)^2 \right]^3}}{(r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + 2(\alpha m \sin m\psi)^2 + (r_0 + \alpha \cos m\psi)\alpha m^2 \cos m\psi},$$

де  $\rho$  – полярний радіус,  $\alpha$  – амплітуда,  $m$  – частота гофрування,  $r_0$  – радіус вихідного кола,  $R_\psi$  – радіус кривизни поверхні відліку поперечного перерізу.

Для геометричних параметрів оболонок прийнято: довжина оболонки  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 2; 3; 4$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 0; 0,01 \div 0,03$ , з кроком  $0,01$  та  $\alpha = 0; 0,5 \div 2$  з кроком  $0,5$ , частота гофрування  $m = 4$ .

Тут і надалі усі лінійні розміри віднесені до одиниці довжини, напруження – до одиниці навантаження.

Розглядаються три варіанти закону зміни модуля пружності:

- зростаючий модуль Юнга (1)  $E(-h/2) = 110$  МПа;  $E(0) = 150$  МПа;  $E(h/2) = 243$  МПа;
- спадний модуль Юнга (2)  $E(-h/2) = 243$  МПа;  $E(0) = 150$  МПа;  $E(h/2) = 110$  МПа;
- усереднений по товщині модуль Юнга (3)  $E = 158,33$  МПа. Для коефіцієнта Пуассона прийнято значення  $\nu = 0,4$ , що пов'язано з незначними розбіжностями коефіцієнта Пуассона для полімерних ННМ.

В табл. 1 наведено значення для коефіцієнтів, що входять у вираз (1) в залежності від товщини і закону зміни модуля пружності.

Таблиця 1

Коефіцієнти модуля пружності  $E$ 

$h/l_0$	Закон зміни $E$	$a$	$b$	$c$
2	зростаючий (1)	26,5	66,5	150
	спадний (2)	26,5	- 66,5	150
	усереднений (3)	0	0	158,33
3	1	11,778	44,333	150
	2	11,778	- 44,333	150
	3	0	0	158,33
4	1	6,625	33,25	150
	2	6,625	- 33,25	150
	3	0	0	158,33

Результати розв'язування задачі для амплітуди гофрування  $\alpha = 0; 0,01 \div 0,03$  наведено в середньому перерізі довжини. Максимальні амплітудні значення представлені: у табл. 2 для нормальних переміщень  $u_\gamma$ , у табл. 3 – для напружень  $\sigma_\psi$  та у табл. 4 – для напружень  $\sigma_s$ .

Як видно з наведених в табл. 2 – табл. 4 даних, значення переміщень  $u_\gamma$  та напружень  $\sigma_\psi$ ,  $\sigma_s$  за умови  $\alpha \rightarrow 0$ , наближаються до відповідних значень у круговій циліндричній оболонці, що є одним із способів оцінки достовірності отримуваних результатів.

Таблиця 2

Максимальні амплітудні значення переміщень  $u_\gamma$  в залежності від амплітуди гофрування, товщини та закону зміни модуля пружності

$\alpha$	$h$	Закон зміни $E$			Похибка %
		1	2	3	
0	2	50,189	49,585	50,042	
	3	33,280	32,695	33,088	
	4	24,770	24,203	24,559	
0,01	2	51,624	51,026	51,472	< 3
	3	33,802	33,219	33,606	<1,6
	4	25,009	24,443	27,795	< 1
0,02	2	53,065	52,473	52,906	< 6
	3	34,327	33,745	34,127	< 3,5
	4	25,249	24,684	25,033	< 2
0,03	2	54,512	53,926	54,377	< 9
	3	34,854	34,273	34,649	< 5
	4	25,489	24,926	25,272	< 3

Таблиця 3

Максимальні амплітудні значення напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від амплітуди гофрування, товщини та закону зміни модуля пружності

$\alpha$	$h$	Закон зміни $E$			Похибка %
		1	2	3	
0	2	305,22	292,25	199,32	
	3	202,37	189,82	132,08	
	4	150,52	138,44	98,189	
0,01	2	309,22	295,76	202,29	<2
	3	204,45	191,84	133,63	<1,5
	4	151,75	139,72	99,105	< 1,3
0,02	2	313,22	299,27	205,27	<3,5
	3	206,53	193,87	135,18	< 3
	4	152,98	141,01	100,02	<2,5
0,03	2	317,23	302,77	208,25	<5
	3	208,61	195,89	136,73	<4,5
	4	154,21	142,290	100,94	<4

Також, можна відмітити, що при збільшенні товщини оболонки спостерігається зменшення розбіжностей в значеннях переміщень і напружень у круговій та оболонці з незначними гофрами для  $\alpha = 0,01 \div 0,03$ . При цьому за певних значень товщини та амплітуди в розрахунковій схемі можна не враховувати наявність гофрів у поперечному перерізі.

В табл. 5 наведено мінімальні значення радіуса кривизни поверхні відліку гофрованих циліндричних оболонок у їх вершинах при  $\psi = 0$  та відношення товщини до радіуса кривизни для оболонок з амплітудою гофрування  $\alpha = 0; 0,5 \div 2$ .

З даних, наведених в табл. 5 видно, що для товщини  $h = 2$  та амплітуди  $\alpha = 0; 0,5 \div 1,5$ , для товщини  $h = 3$  та амплітуди  $\alpha = 0; 0,5$  розглядувані оболонки можна віднести до класу тонких оболонок, для усіх інших варіантів товщини і амплітуди – до нетонких і у випадку товщини  $h = 4$  та амплітуди гофрування  $\alpha = 2$  – до товстостінних. Слід зазначити, що для оболонок з некруговою формою поперечного перерізу зі змінним в поперечному перерізі радіусом кривизни, наявність ділянок, в яких відношення товщини до радіуса кривизни оболонки

задовольняє нерівності  $h/R_{kp} \geq 0,1$ , потребує застосовувати для даного класу задач просторову модель.

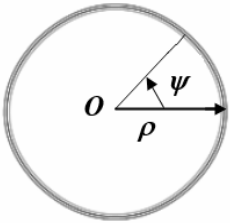
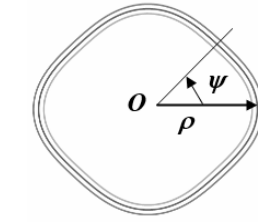
Таблиця 4

Максимальні амплітудні значення напружень  $\sigma_s$  в залежності від амплітуди гофрування, товщини та закону зміни модуля пружності

$\alpha$	$h$	Закон зміни $E$			Похибка %
		1	2	3	
0	2	34,752	31,760	25,838	
	3	34,054	31,348	25,368	
	4	33,252	30,837	25,214	
0,01	2	38,313	32,828	27,779	<10
	3	35,699	32,222	25,858	<5
	4	34,153	31,469	24,686	<3
0,02	2	41,877	33,903	30,327	<20
	3	37,347	33,099	27,048	<10
	4	35,054	32,102	25,341	<6
0,03	2	45,475	34,985	32,877	<30
	3	38,995	33,980	28,239	<15
	4	35,956	32,738	25,998	<9

Таблиця 5

Поперечний переріз гофрованої поверхні відліку та відношення товщини до радіуса кривизни поверхні відліку у вершині гофрів

$\alpha$	$R_\psi$	$h/R_\psi$			Поперечний переріз поверхні відліку	
		$h=2$	$h=3$	$h=4$	$\alpha=0,5; h=2$	$\alpha=2; h=4$
0	40,00	0,05	0,08	0,10		
0,5	32,17	0,06	0,09	0,12		
1	26,68	0,07	0,11	0,15		
1,5	22,63	0,09	0,13	0,18		
2	19,51	0,10	0,15	0,20		

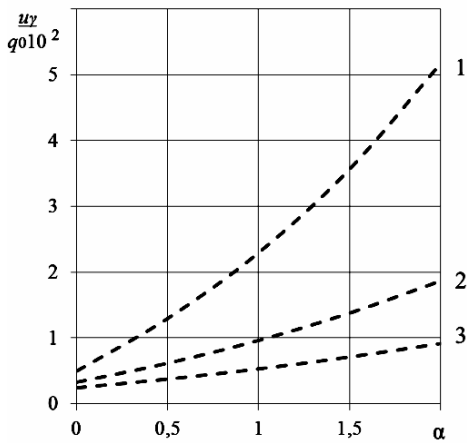


Рис. 1. Розподіл переміщень  $u_y$  в залежності від амплітуди гофрів та закону розподілу модуля пружності

Результати розв'язання задачі у випадку амплітуди гофрування  $\alpha = 0; 0,5 \div 2$  наведено для максимальних значень характеристик напруженого стану в середньому перерізі довжини на рис. 1 – рис. 3.

Результати для переміщень  $u_y$  (рис. 1) наведено на внутрішній поверхні в зоні мінімальної жорсткості в западині гофрів ( $\psi = \pi/4$ ); для напружень  $\sigma_\psi$  (рис. 2) та  $\sigma_s$  (рис. 3) у випадку зростаючого і усередненого законів зміни  $E$  – на зовнішній поверхні в западині гофрів ( $\psi = \pi/4$ ), а для спадного закону зміни  $E$  – на внутрішній поверхні у вершині гофрів ( $\psi = 0$ ) для напружень  $\sigma_\psi$  і у западині гофрів для напружень  $\sigma_s$ .

Криві, що відповідають зростаючому закону зміни модуля пружності позначені суцільними лініями, спадному – пунктирними та усередненому – штрих-пунктирними; цифрою 1 позначені криві у випадку товщини  $h = 2$ , цифрою 2 – для  $h = 3$  і цифрою 3 – для  $h = 4$ .

Значення переміщень мало залежні від закону зміни модуля пружності, тому на рис. 1 подано криві, що відповідають спадному закону зміни модуля пружності  $E$ .

З графіків, наведених на рис. 1 випливає, що зі збільшенням амплітуди гофрування в зоні максимальних значень переміщень  $u_r$ , оболонка стає більш податливою, що спричиняє збільшення величини переміщень в 2,6 рази для  $\alpha = 0,5$  та майже в 10 разів для  $\alpha = 2$  у випадку товщини  $h = 2$ , порівняно з оболонкою канонічної кругової форми. Зі збільшенням товщини розбіжності між значеннями максимальних переміщень зменшуються, так у випадку товщини  $h = 3$  та амплітуди гофрування  $\alpha = 0,5$  переміщення збільшуються в 2 рази, а для амплітуди  $\alpha = 2$  – у 5,6 разів; у випадку товщини  $h = 4$  та амплітуди гофрування  $\alpha = 0,5$  відповідно в 1,5 рази, а для амплітуди  $\alpha = 2$  – у 4 рази.

Переважаючими серед напружень є напруження  $\sigma_\psi$ , що набувають своїх максимальних амплітудних значень на внутрішній поверхні у вершині гофрів для спадного закону зміни модуля пружності і на зовнішній поверхні в западині гофрів – для зростаючого і усередненого.

При цьому, як видно з рис. 2, збільшення амплітуди гофрування для товщини  $h = 2$  призводить до збільшення величини напружень приблизно з 1,6 – 1,8 рази при амплітуді  $\alpha = 0,5$  до 3,6 – 4,8 рази при амплітуді  $\alpha = 2$ ; для товщини  $h = 3$ , відповідно, з 1,5 – 3,2 рази при амплітуді  $\alpha = 0,5$  до 3,2 – 3,7 рази при амплітуді  $\alpha = 2$  та для товщини  $h = 4$ , аналогічно, з 1,5 рази для амплітуди  $\alpha = 0,5$  до 2,8 – 3,1 для амплітуди  $\alpha = 2$ , порівняно з круговою оболонкою.

Характер розподілу напружень  $\sigma_s$ , представлений на рис. 3, має такі закономірності. Збільшення амплітуди гофрування суттєво впливає на зростання величини максимальних амплітудних значень напружень  $\sigma_s$  для оболонок меншої товщини ( $h = 2$ ). Так, якщо при амплітуді  $\alpha = 0,5$  напруження збільшуються приблизно від 3 до 6 разів, то вже при амплітуді  $\alpha = 2$  – від 11 до 25 разів. При збільшенні товщини різниця у зростанні значень становить від 2,5 – 3,5 разів для амплітуди  $\alpha = 0,5$  до 10 – 11,5 разів для амплітуди  $\alpha = 2$  при товщині  $h = 3$ . У випадку товщини  $h = 4$ , відповідно маємо від 2,5 разів для амплітуди  $\alpha = 0,5$  і до 7 разів для амплітуди  $\alpha = 2$  по відношенню до відповідних значень в круговій оболонці.

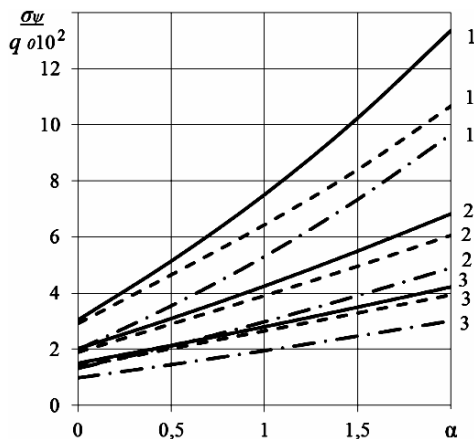


Рис. 2. Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від амплітуди гофрів та закону розподілу модуля пружності

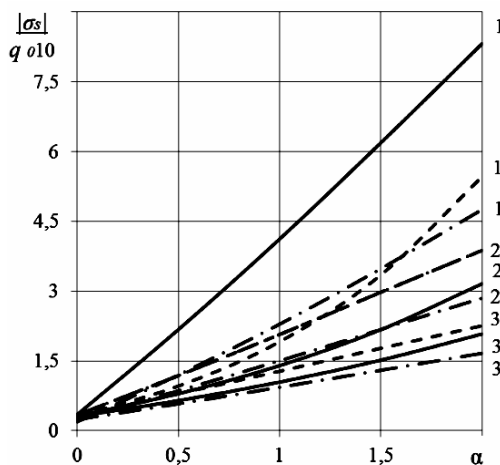


Рис. 3. Розподіл напружень  $\sigma_s$  в залежності від амплітуди гофрів та закону розподілу модуля пружності

**Висновки.** За допомогою розробленої методики щодо розв'язання задач просторової лінійної теорії пружності про напружений стан нетонких, неоднорідних по товщині, циліндричних некругових оболонок, яка базується на редукції вихідної тривимірної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, до одномірної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на основі застосування методів відокремлення змінних за двома координатними напрямками з паралельним використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації, проведено чисельний аналіз напруженого стану циліндричних, гофрованих у поперечному перерізі оболонок різної товщини, виготовлених з ННМ, що знаходяться під дією внутрішнього рівномірного тиску. В результаті проведеного чисельного аналізу встановлено характерні закономірності розподілу переміщень та напружень в залежності від амплітуди гофрування та закону зміни модуля пружності вздовж товщини неперервно-неоднорідного матеріалу, з якого виготовлені розглядувані оболонки. Зокрема, було показано, що для певних значень товщини, за незначних величин амплітуди, можна знехтувати наявністю гофрів і при розрахунках напруженого стану обирати за модель оболонку кругового поперечного перерізу.

Результати, отримані в роботі, можуть бути враховані для оптимізації конструктивно-технологічних рішень при виготовленні та експлуатації конструктивних елементів подібного класу, або використані як фундаментальні дослідження механіки деформівного твердого тіла.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Рожок Л.С., Онищенко А.М., Гаркуша М.В., Башкевич І.В. Спрощення розрахункової схеми при визначенні напруженого стану нетонких циліндричних оболонок зі складною формою поперечного перерізу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 109. – С. 287–300.
2. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки // Прикл. механіка. – 2023. – 59, № 1. – С. 79–89.
3. Chen T., Liu J., Zhang R. et al. Electromechanical coupling analysis of geometrically exact functionally graded piezoelectric shells based on weak form quadrature element method // Arch. Appl. Mech. – 2024. (<https://doi.org/10.1007/s00419-024-02619-0>).
4. Cheng X., Zhang H., Mu Y. Dynamic Response of Sand Cushion Layer Isolation Concrete Liquid Storage Structure with X-Type Soft Steel-SMA Shock Absorber Considering Long (Short) Period Earthquake // Iran. J. Sci. Technol. Trans. Civ. Eng. – 2024. (<https://doi.org/10.1007/s40996-024-01486-7>).
5. Draiche K., Tounsi A., Ibrahim K.D. et al. An improved mathematical model for static and dynamic analysis of functionally graded doubly-curved shells // Arch. Appl. Mech. – 2024. – 94. – P. 1589–1611. (<https://doi.org/10.1007/s00419-024-02595-5>).
6. Hart E.L., Terokhin B.I. Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 63–80.
7. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Analysis of Corrugated Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, No 12. – P. 1473–1481
8. Kumar A. Finite Element Approach to Investigate and Mitigate the Lateral Movement of Steel Stack // Int. J. Steel Struct. – 2022. – 22. P. 1395–1401.
9. Maksimyyuk Yu.V., Martyniuk I. Yu., Kozak O.V., Maksimyyuk O.V. Numerical analysis of the stressed-deformed state of a tubular element under thermal loading // Strength of Materials and Theory of Structures – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 199–206.
10. Ntayeesh T.J., Arefi M. Higher-order displacement, strain, and stress analyses of origami graphene auxetic metamaterial-reinforced cylindrical shell // Arch. Civ. Mech. Eng. – 2024. – 24, 149. (<https://doi.org/10.1007/s43452-024-00956-z>).
11. Rozhok L., Sperkach S., Vasil'eva L. Solving of Stress State Problems of Anisotropic Thick Noncircular Cylindrical Shells with Different Nonhomogeneous Structures Based on Discrete Continual Approach. – Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials. – Springer Cham, 2024. – Vol. 204. – Chapter, p. 425 – 441.
12. Sharifi H. Magneto–thermoelastic behavior of an orthotropic hollow cylinder based on Lord–Shulman and Green–Lindsay theories // Acta Mech. – 2024. (<https://doi.org/10.1007/s00707-024-03985-0>).

#### REFERENCES

1. Rozhok L.S., Onishchenko A.M., Garkusha M.V., Bashkevych I.V. Sproshchennia rozrakhunkovoi skhemy pry vyznachenni napruzhenoho stanu netonkykh tsylindrychnykh obolonok zi skladnoiu formoiu poperechnoho pererizu (Simplification of the calculation scheme for determining the stress state of non-thin cylindrical shells with a complex cross-sectional shape ellipticity). – Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. Kyiv: KNUBA. 2022. Issue 109. P. 287–300.
2. Semenyyuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Napruzhenno-deformovanyi stan товстостінної анізотропної циліндричної оболонки (Stress–Strain State of a Thick-Walled Anisotropic Cylindrical Shell). – Int. Appl. Mech. 2023. 59, No 1. 79–89.

3. *Chen T., Liu J., Zhang R. et al.* Electromechanical coupling analysis of geometrically exact functionally graded piezoelectric shells based on weak form quadrature element method. *Arch. Appl. Mech.* 2024. (<https://doi.org/10.1007/s00419-024-02619-0>).
4. *Cheng X., Zhang H., Mu Y.* Dynamic Response of Sand Cushion Layer Isolation Concrete Liquid Storage Structure with X-Type Soft Steel-SMA Shock Absorber Considering Long (Short) Period Earthquake. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Civ. Eng.* 2024. (<https://doi.org/10.1007/s40996-024-01486-7>).
5. *Draiche K., Tounsi A., Ibrahim K.D. et al.* An improved mathematical model for static and dynamic analysis of functionally graded doubly-curved shells. *Arch. Appl. Mech.* 2024. 94. P. 1589–1611. (<https://doi.org/10.1007/s00419-024-02595-5>).
6. *Hart E.L., Terokhin B.I.* Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles.* Kyiv: KNUBA. 2023. Issue 110. P. 63–80.
7. *Grigorenko Ya.M., Pozhok L.S.* Stress Analysis of Corrugated Hollow Cylinders. *Int. App. Mech.* 2002. 38, No 12. P. 1473–1481
8. *Kumar A.* Finite Element Approach to Investigate and Mitigate the Lateral Movement of Steel Stack. *Int. J. Steel Struct.* 2022. 22. 1395–1401.
9. *Maksymyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Kozak O.V., Maksymyuk O.V.* Numerical analysis of the stressed-deformed state of a tubular element under thermal loading. *Strength of Materials and Theory of Structures.* Kyiv: KNUBA. 2023. Issue 110. P. 199–206.
10. *Ntayeesh T.J., Arefi M.* Higher-order displacement, strain, and stress analyses of origami graphene auxetic metamaterial-reinforced cylindrical shell. *Arch. Civ. Mech. Eng.* 2024. 24, 149. (<https://doi.org/10.1007/s43452-024-00956-z>).
11. *Rozhok L., Sperkach S., Vasil'eva L.* Solving of Stress State Problems of Anisotropic Thick Noncircular Cylindrical Shells with Different Nonhomogeneous Structures Based on Discrete Continual Approach. – Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. *Advanced Structured Materials.* Springer Cham, 2024. Vol. 204. Chapter, p. 425 – 441.
12. *Sharifi H.* Magneto-thermoelastic behavior of an orthotropic hollow cylinder based on Lord-Shulman and Green-Lindsay theories. *Acta Mech.* 2024. (<https://doi.org/10.1007/s00707-024-03985-0>).

Стаття надійшла 26.07.2024

*Рожок Л.С., Онищенко А.М., Крук Л.А., Найдьонова З.М.*

#### **ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕТОНКИХ ГОФРОВаних ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕПЕРЕРВНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Циліндричні оболонки кругового і некругового поперечного перерізу, застосовуються як елементи конструкцій в багатьох галузях господарювання. Для підвищення надійності експлуатації таких елементів використовують неперервно-неоднорідні матеріали.

Об'єктом дослідження в даній роботі є нетонкі циліндричні оболонки з гофрованим поперечним перерізом, що виготовлені з неперервно-неоднорідного матеріалу. Оболонки знаходяться під дією внутрішнього тиску за умов простого обтірання торців.

Предметом дослідження є напружений стан оболонки і, як наслідок, встановлення залежностей між його характеристиками та геометричними параметрами поверхні відліку, товщиною оболонки та закону зміни модуля пружності матеріалу.

Метою роботи є проведення чисельного аналізу напруженого стану оболонки даного класу залежно від амплітуди гофрування, товщини оболонки та закону зміни пружних властивостей матеріалу. Розв'язок задачі базується на редукції вихідної тривимірної крайової задачі для системи рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами до одномірної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами більш високого порядку. При цьому застосовується аналітичний метод відокремлення змінних у двох координатних напрямках, із паралельним використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Одномірною крайовою задачею розв'язується за допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Проведено аналіз напруженого стану розглядуваних оболонки залежно від амплітуди гофрування, товщини оболонки та закону зміни пружних характеристик матеріалу. Показано, що за незначного відхилення форми поперечного перерізу від кругової, для певної величини товщини оболонки, можна знехтувати наявністю гофрів при виборі розрахункової моделі. Крім того, наявність гофрів спричиняє перерозподіл значень переміщень та напружень в характерних перерізах оболонки, що необхідно враховувати при проведенні розрахунків щодо міцності та надійності розглядуваних конструкцій.

**Ключові слова:** гофровані циліндричні оболонки, дискретні ряди Фур'є, лінійна теорія пружності, напружений стан, неперервно-неоднорідний матеріал, просторова модель.

*Rozhok L.S., Onishchenko A.M., Kruk L.A., Naidonova Z.M.*

#### **NUMERICAL ANALYSIS OF THE STRESS STATE OF NON-THIN CORRUGATED CYLINDRICAL SHELLS MADE OF CONTINUOUS-INHOMOGENEOUS MATERIALS**

Cylindrical shells of circular and non-circular cross-section are used as structural elements in many branches of economy. To increase the reliability of operation of such elements, continuous non-homogeneous materials are used.

This research investigates non-thin cylindrical shells with corrugated as cross sections made of the continuously inhomogeneous materials. The shells are subjected to internal pressure under conditions of simple support on the ends.

The subject of the study is the stressed state of the shells and, as a consequence, the establishment of dependencies between its characteristics and the geometric parameters of the reference surface, the thickness of the shells, and the law of change of the modulus of elasticity of the material.

The aim of the work is numerical analysis of the stress state of shells of such class depending on the amplitude of the corrugation, the thickness of the shells and the law of variation of elastic properties of their material. The solution of the problem is based on reduction of the original three-dimensional boundary value problem for the system of partial differential equations with variable coefficients to a one-dimensional boundary value problem for a system of ordinary differential equations with constant coefficients of higher order. At the same time, the analytical method of separating variables in two coordinate directions

is used, together with approximation of functions by discrete Fourier series. The one-dimensional boundary value problem is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization.

An analysis of the stress state of the considered shells was carried out depending on the amplitude of the corrugation, the thickness of the shells and the law of change of the elastic characteristics of the material. It is shown that with a slight deviation of the shape of the cross-section from the circular one, for a certain thickness of the shells, the presence of corrugations can be neglected when choosing the calculation model.

In addition, the presence of corrugations causes a redistribution of the values of displacements and stresses in the characteristic sections of the shells, which must be taken into account when calculating the strength and reliability of the structures under consideration.

**Keywords:** corrugated cylindrical shells, discrete Fourier series, linear theory of elasticity, stress state, continuous-inhomogeneous material, spatial model.

УДК 539.3

*Рожок Л.С., Онищенко А.М., Крук Л.А., Найдьонова З.М. Чисельний аналіз напруженого стану нетонких гофрованих циліндричних оболонок з неперервно-неоднорідних матеріалів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 113. – С. 108-115.*

*В даній роботі, із використанням просторової моделі лінійної теорії пружності на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, суть якого викладена в роботах [1, 11], розв'язано задачу про напружений стан нетонких циліндричних оболонок з гофрованим поперечним перерізом, виготовлених з неперервно-неоднорідного матеріалу, при дії внутрішнього тиску за певних граничних умов на торцях. Для класу розглядуваних оболонок встановлено залежності характеристик напруженого стану від амплітуди гофрування та товщини для трьох законів зміни модуля пружності вздовж товщини.*

Табл. 5. Іл. 3. Бібліогр. 12 назв.

UDC 539.3

*Rozhok L.S., Onyshchenko A.M., Kruk L.A., Naidonova Z.M. Numerical analysis of the stress state of non-thin corrugated cylindrical shells made of continuous-inhomogeneous materials // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 108-115.*

*In this work, using the spatial model of the linear theory of elasticity based on the method of approximation of functions by discrete Fourier series, the essence of which is given in the works [1, 11], the problem of the stress state of non-thin cylindrical shells with a corrugated cross section is solved, made of continuous non-homogeneous material, under the action of internal pressure under certain boundary conditions at the ends. For the class of shells under consideration, the dependences of the stress state characteristics on the corrugation amplitude and thickness was established for three laws of change of the modulus of elasticity along the thickness.*

Tabl. 5. Fig. 3. Ref. 12

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки РОЖОК Лілія Степанівна

**Адреса:** Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра теоретичної та прикладної механіки.

**Роб. тел.** +38(044) 286-38-89

**Мобільний тел.:** +38(050) 708-00-87

**E-mail:** teor\_mex@ukr.net

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0002-7926-9074>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд ОНИЩЕНКО Артур Миколайович

**Адреса:** Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра мостів, тунелів та гідротехнічних споруд.

**Роб. тел.** +38(044) 280-79-78

**Мобільний тел.:** +38(068)777-18-19

**E-mail:** onyshchenko.a.m.ntu@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-1040-4530>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки КРУК Леся Анатоліївна

**Адреса:** Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедратеоретичної та прикладної механіки.

**Роб. тел.** +38(044) 286-38-89

**Мобільний тел.:** +38(05)095 733 30 98

**E-mail:** krukles@ukr.net

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-8131-564X>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** аспірантка кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд НАЙДЬОНОВА Зорина Миколаївна

**Адреса:** Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, кафедра мостів, тунелів та гідротехнічних споруд.

**Роб. тел.** +38(044) 280-79-78

**Мобільний тел.:** +38(099) 1410119

**E-mail:** gubiw1986@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0009-0000-3709-4715>