УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Д.В. Пошивач,

О.О. Лук'янченко,
д-р техн. наук

Київский національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних сил України, 31, м. Київ. 03680

DOI: 10.32347/2410-2547.2024.112.327-331

Стохастичні параметричні коливання пружних систем відносяться до розділу статистичної динаміки нелінійних систем. Від дії стохастичного параметричного навантаження коливання пружних систем, які є випадковим процесом, найчастіше не стабілізуються, а розвиваються шляхом згасання або необмеженого зростання їх амплітуд. Тому важливим є питання стійкості стохастичних параметричних коливань, яке може розглядатися як стійкість за імовірністю, у середньому або відносно моментних функцій різних порядків. Формування математичних моделей, що описують стохастичні параметричні коливання пружних систем, базується як на аналітичних, так чисельних підходах. Дослідження стохастичної стійкості параметричних коливань пружних систем виконуються імовірнісними методами. Недостатньо дослідженою є стійкість параметричних коливань сучасних будівельних конструкцій, на які діють експлуатаційні випадкові навантаження.

В статті наведено чисельний підхід до дослідження динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному впливі. Математична модель стохастичних параметричних коливань конструкції будується у вигляді редукованої скінченноелементної моделі, матриці якої отримано із застосуванням процедур програмного комплексу NASTRAN. Динамічне навантаження представляється стаціонарним ергодичним випадковим процесом з заданою спектральною щільністю у вигляді скінченної суми гармонічних функцій. Стохастична стійкість конструкцій досліджується за допомогою методу Монте-Карло із застосуванням прямого чисельного інтегрування рівнянь редукованої моделі методом Рунге-Кутти четвертого порядку. Стохастична стійкість розглядається як стійкість за імовірністю появи тенденції до затухання або необмеженого зростання амплітуди коливань конструкції на заданому проміжку часу в просторі амплітудних і частотних випадкових параметрів навантаження. Чисельна методика застосована до дослідження стійкості параметричних коливань двотаврової гофрованої балки при вузькополосному випадковому впливі.

Ключові слова: випадкове параметричне навантаження, стохастична стійкість, метод Монте-Карло, метод скінченних елементів, метод Рунге-Кутти, пружні системи, двотаврова балка з гофрованою стінкою.

Вступ. Стохастичні параметричні коливання пружних систем відносяться до розділу статистичної динаміки нелінійних систем. Значний внесок в цю область зробили Андронов О.О., Боголюбов М.М., Болотін В.В., Витта О.А., Гіхман І.І., Диментберг М.Ф., Кляцкін В.І., Крилов М.М., Понтрягін Л.С., Скороход А.В., Стратонович Р.Л., Хасмінський Р.З., Aniartnam S.T., Kushner H.J, Schmidt G., Schulz R., Serawa K., Unita I. та інші [1-6].

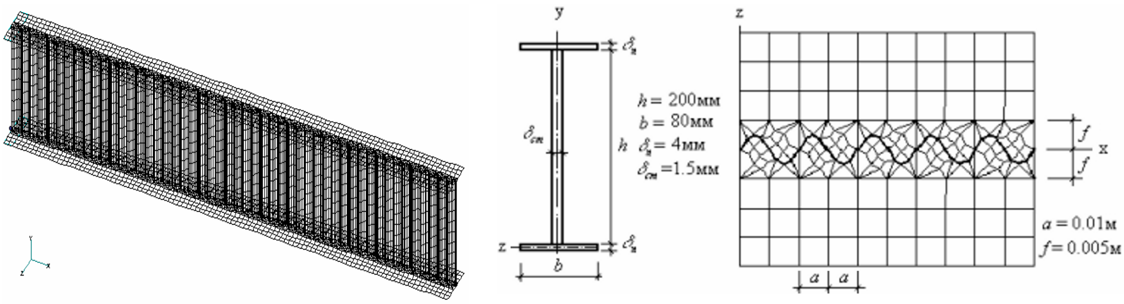
Побудова математичних моделей, що описують стохастичні параметричні коливання пружних систем, базується як на аналітичних, так чисельних підходах [2, 6]. Відомо, що від дії стохастичного параметричного навантаження коливання пружних систем є випадковим процесом, які найчастіше не стабілізуються, а розвиваються шляхом згасання або необмеженого зростання їх амплітуд. Тому важливим є стійкість стохастичних параметричних коливань пружних систем, яка може розглядатися як стійкість за імовірністю, у середньому або відносно моментних функцій різних порядків і досліджуватися імовірнісними методами [2]. На теперішній час недостатньо вирішена проблема стійкості параметричних коливань існуючих будівельних конструкцій, на які діють експлуатаційні випадкові навантаження.

В статті представлена чисельна методика дослідження динамічної стійкості пружної системи при стохастичному параметричному впливі методом Монте-Карло [3, 5] із застосуванням процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу NASTRAN [4, 7] і методу Рунге-Кутти четвертого порядку. Наведено результати дослідження динамічної стійкості двотаврової гофрованої балки при дії вузькосмугового параметричного навантаження.

1. Чисельна методика дослідження динамічної стійкості конструкцій при стохастичному параметричному впливі. Чисельна методика дослідження динамічної стійкості конструкцій при стохастичному параметричному впливі містить: побудову математичної моделі стохастичних параметричних коливань пружної системи; моделювання випадкового параметричного навантаження; розв’язання задачі стохастичної стійкості параметричних коливань конструкції за імовірністю; побудову границь областей динамічної стійкості конструкції.

Математична модель стохастичних параметричних коливань пружної системи будується у вигляді редукованої скінченноелементної моделі параметричних коливань пружних систем згідно чисельного підходу, наведеного в статті [4]. Матриці моделі формуються із застосуванням обчислювальних процедур програмного комплексу NASTRAN [7]. Редукована модель, яка описує динамічну стійкість конструкції, набуває виду стохастичного аналога рівнянь Матьє-Хілла. Динамічне навантаження моделюється як стаціонарний ергодичний випадковий процес з заданою спектральною щільністю у вигляді скінченної суми гармонічних функцій. Особливість генерування реалізацій випадкового процесу розглянута в статті [3]. Стохастична стійкість конструкцій досліджується за допомогою методу Монте-Карло із застосуванням прямого чисельного інтегрування рівнянь редукованої моделі методом Рунге-Кутти четвертого порядку. Стохастична стійкість розглядається як стійкість за імовірністю появи тенденції до затухання або необмеженого зростання амплітуди коливань конструкції на заданому проміжку часу в просторі амплітудних і частотних випадкових параметрів навантаження.

2. Побудова редукованої скінченноелементної моделі стохастичних параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою стінкою. Розглядалась зварна стальна двотаврова балка, що складалась з двох поясів, гофрованої стінки та граничних ребер жорсткості. Стінка та полки балки моделювались пластинчатими скінченними елементами, граничні ребра жорсткості – балочними (рис. 1, а). Поперечний переріз балки та геометричні параметри гофра навені на рис. 1, б. Модель містила 7227 вузлів та 8020 скінченних елементів. Матеріал задано з механічними характеристиками: модуль пружності – $2{,}06 \cdot 10^{11}$ Па, модуль зсуву – $0{,}79 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт поперечної деформації − 0,3 і густина – 7800 кг/м^3. На кінцях балки були обмежені лінійні переміщення та поворот навколо поздовжньої осі стінки. Вздовж серединної лінії стінки балки прикладено рівномірно розподілене динамічне навантаження $q(t)$, яке збурило згинальні коливання у площині стінки балки, і водночас, по відношенню до деформацій балки із цієї площини було параметричним (плоский згин).



(а) (б)

Рис. 1. Скінченноелементна модель балки (а), поперечний переріз балки і параметри синусоїдального гофра (б)

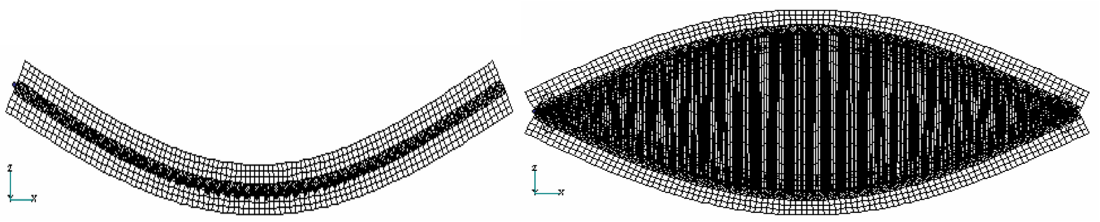
Математична модель дискретної моделі параметричних коливань мала вид

$$\ddot{\vec{u}}(t) + C\dot{\vec{u}}(t) + \left[K + Gq(t)\right]\vec{u}(t) = 0\,, \tag{1}$$

де $\vec{u}(t)$ − вектор узагальнених координат, C, K, G − редуковані матриці відповідно демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості, $q(t)$ − випадкове навантаження.

Редукування дискретної моделі (1) видбувалося шляхом розкладання вектора вузлових переміщень по перших двох частотах і формах власних коливань, які отримані за допомогою методу Ланцоша (рис. 2).

Критичне значення статичного навантаження $q_{\mathrm{cr}} = 365{,}510$ кН/м отримано методом Ньютона-Рафсона.



$\omega_1 = 888{,}566$ рад/с $\qquad$ $\omega_2 = 1046{,}958$ рад/с

Рис. 2. Перші форми згинальних і крутильних коливань балки

Система рівнянь (1) звелась до стохастичного аналогу рівнянь Матьє-Хілла

$$\ddot{y}_i(t) + 2\varepsilon_i\omega_i^2\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) + q(t)\sum_{j=1}^{2} g_{ij} y_{ij}(t) = 0, \;\; i, j = 1,2, \qquad (2)$$

де $g_{11} = g_{22} = 0$, $g_{12} = -1{,}6925$, $g_{21} = -1{,}6298$ − коефіцієнти редукованої матриці геометричної жорсткості, $\varepsilon_i = \varepsilon = 0{,}02$ − модальний параметр затухання.

Динамічне навантаження моделювалось як стаціонарний ергодичний вузькосмуговий випадковий процес

$$q(t) = q_0\zeta(t), \qquad (3)$$

де $\zeta(t)$ − випадкова функція з однобічною спектральною щільністю

$$G_\zeta(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\alpha(\omega^2+\theta^2)/\left((\omega^2-\theta^2)^2 + (2\alpha\omega)^2\right)\right], \qquad (4)$$

де α − параметр кореляції, ω − частота власних коливань балки, θ − характерна частота навантаження;
і шириною спектра

$$\alpha_0 = 2\alpha/\left(\omega_1+\omega_2\right) = 10^{-6}. \qquad (5)$$

3. Дослідження динамічної стійкості двотаврової гофрованої балки при стохастичному параметричному навантаженні. Стохастична стійкість параметричних коливань балки досліджена при різних амплітудних q_0 і частотних θ параметрах випадкового навантаження. Границі області стійкості параметричних коливань балки побудовані в координатах

$$\eta = \theta/\left(\omega_1+\omega_2\right), \quad \mu = q_0/q_{\mathrm{cr}}. \qquad (6)$$

Проведено серію з 20 випробувань для кожної точки координатної сітки $\eta\,\mu$. В кожному з випробувань отримано реалізації переміщень балки $y_i(t)$ $\left(i, j{=}1,2\right)$ прямим чисельним інтегруванням рівнянь редукованої моделі (2) методом Рунге-Кутти четвертого порядку.

На рис. 3 суцільними ламаними лініями показані границі області стохастичної стійкості параметричних коливань балки зі статистичною частотою втрати стійкості $\left[0;\,0{,}25;\,0{,}5;\,0{,}75;\,1\right]$. Втратою стійкості вважалась поява тенденції до необмеженого зростання амплітуди коливань балки. Білими маркерами позначені точки, що відповідають лише стійким реалізаціям переміщень зі статистичною частотою втрати стійкості 0, чорними − лише нестійким реалізаціям переміщень зі статистичною частотою 1.

Чисельні результати дослідження порівняно з аналітичними щодо визначення границі комбінаційного параметричного резонансу сумарного типу пружної системи для випадку детермінованого гармонічного навантаження $q(t) = q_0\cos(\theta t)$ [1]. На рис. 3 штриховою лінією позначена границя втрати стійкості параметричних коливань балки при гармонічному навантаженні, яка отримана аналітично.

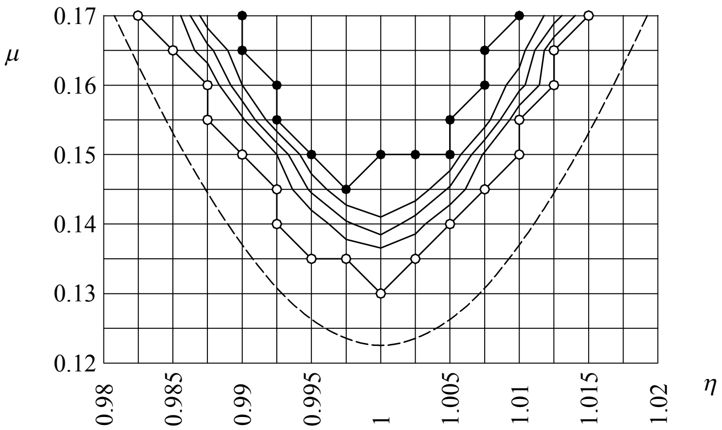


Рис. 3. Границі областей стохастичної стійкості параметричних коливань двотаврової гофрованої балки

Висновок. Представлена чисельна методика є ефективною щодо побудови математичної моделі стохастичних параметричних коливань пружних систем за рахунок застосування методу скінченних елементів і швидкісних обчислювальних процедур сучасного програмного комплексу NASTRAN. Методи Монте-Карло та Рунге-Кутти дозволяють дослідити поведінку конструкцій при стохастичному параметричному впливі, оцінити динамічну стійкість та побудувати границі області стохастичної стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вибрации* в технике: Справочник. В 6-ти т. − Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. − М.: Машиностроение, 1978 .− 352 с.
2. *Augusti G, Baratta A., Casciati F.* Probabilistic Methods in Structural Engineering. − London New York. Chapman and Hall, 1984. − 547 p.
3. *Пошивач Д.В.* Чисельний аналіз динамічної стійкості кругової циліндричної оболонки при випадковому параметричному збудженні // Зб. Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2002. − Вип. 71. − С.115-124.
4. *Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2004. − Вип. 74. − С.24-34.
5. *Гончаренко М.В., Пошивач Д.В.* Дослідження умов динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному впливі // Вібрації в техніці та технологіях, 2006. – №2 (44). – С.14-19.
6. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.* Коливання параметрично збуджених пружних стержневих систем К.: Каравела, 2021. – 154 с.
7. *Jaecheol Koh* Siemens NX Nastran: Tutorials for Beginners and Advanced Users. ASIN: B0B19ZBZCM, 2022. – 566 p.

REFERENCES

1. *Vibratsii v tekhnike*: Spravochnik. V 6-ti t. − T. 1. Kolebania lineinyh sistem [Linear Systems Vibrations] / Pod red. V.V. Bolotina. M.: Mashinostroenie, 1978 .− 352 s. (rus)
2. *Augusti G, Baratta A., Casciati F.* Probabilistic Methods in Structural Engineering. − London New York. Chapman and Hall, 1984. − 547 p.
3. *Poshyvach D.V.* Chyselynyi analiz dynamichnoi stiikosti kruhovoi tsylindrychnoi obolonky pry vypadkovomu parametrychnomy zbudzhenni [Numerical analysis of the dynamic stability of a circular cylindrical shell under random parametrical excitation] // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientificand-technical collected articles. − K.: KNUBA, 2002. − Issue 71. − P. 115-124. (ukr)
4. *Gotsulyak E.A., Dekhtyaruk E.S., Lukianchenko O.O., Borysenko V.G.* Metodyka redukuvannia rivnian v zadachakh parametrychnykh kolyvan konstruktsii [Method of redicing equations in the problems of structures parametric oscillations] // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientificand-technical collected articles. − K.: KNUBA, 2004. − Issue 74. − P. 24-34. (ukr)
5. *Goncharenko M.V., Poshyvach D.V.* Doslidzhennia umov dynamichnoi stiykosti pruzhnykh system pry stohastychnomu parametrychnomu vplyvi [Study of the conditions of dynamic stability of elastic system under random parametrical influence] // Vibratsii v tekhnitci ta tekhnologiiakh, 2006. – №2 (44). – S.14-19. (ukr)
6. *Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Kostina E.V.* Kolyvannia parametrychno zbudzhenykh pruzhnykh sterzhnevykh system [Oscillations of parametrically excited elastic rod systems. − K.: Karavela, 2021. – 154 s. (ukr)
7. *Jaecheol Koh* Siemens NX Nastran: Tutorials for Beginners and Advanced Users. ASIN: B0B19ZBZCM, 2022. – 566 p.

Стаття надійшла 11.04.2024

Poshyvach D.V., Lukianchenko O.O.
RESEARCH OF STOCHASTIC STABILITY OF CONSTRUCTIONS PARAMETRIC VIBRATIONS BY THE MONTE CARLO METHOD

The stochastic parametric vibrations of the elastic systems behave to the statistical dynamics section of the nonlinear systems. Under stochastic parametric influence the vibrations of the elastic systems, which is a random process more frequent are not stabilized, but their amplitudes are fading or unlimited are growing. Therefore important is stability of stochastic vibrations, which can be examined as stability by probability, on average or by the moment functions of different orders. The mathematical models which describe the stochastic parametric vibrations of the elastic systems are building by analytical or numeral approaches. Researches of stochastic stability of parametric vibrations are executing by probabilistic methods. Stability of parametric vibrations of modern constructions under the action of operating random loads are not enough investigated.

In the article the numeral method of research of dynamic stability of the elastic systems under stochastic parametric influence was presented. The mathematical model of stochastic parametric vibrations of construction in the form of a reduced finite element model was formed. Matrixes of the reduced model were obtained using calculated procedures of finite element analysis software NASTRAN. The dynamic loading as stationary ergodic random process with the spectral density was presented in the form of a finite amount of harmonic functions. Stochastic stability of the constructions was investigated using the Monte Carlo method and the Runge Kutta method of direct numeral integration of the equations of reduced model. Stochastic stability as stability by probability of appearance of tendency to fading or unlimited growth of amplitude of parametric vibrations was examined during the time interval in space of the random parameters of loading. Dynamic stability of a I-beam with corrugated wall under narrow-band parametric influence was investigated using the numeral method.

Keywords: random parametric loading, stochastic stability, Monte Carlo method, finite element method, Runge-Kutta method, elastic systems, I-beam with corrugated wall.

УДК 539.3
Пошивач Д.В., Лук'янченко О.О. **Дослідження стійкості стохастичних параметричних коливань конструкцій методом Монте-Карло** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 327-331.
Представлена чисельна методика дослідження динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному впливі методом Монте-Карло із застосуванням процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу NASTRAN і методу Рунге-Кутти четвертого порядку. Досліджена динамічна стійкість двотаврової балки з гофрованою стінкою при вузькосмуговому параметричному впливі.
Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр. 7 назв.

UDC 539.3
Poshyvach D.V., Lukianchenko O.O. **Research of stochastic stability of constructions parametric vibrations by the Monte-Carlo method** // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn., K.: KNUBA, 2024. – Issue. 112. – P. 327-331.
The numeral method of research of dynamic stability of the elastic systems under stochastic parametric influence by the Monte Carlo method was presented. Calculated procedures of finite element analysis software NASTRAN and the Runge-Kutta method of fourth order were applied. Dynamic stability of a I-beam with corrugated wall under narrow-band parametric influence was investigated.
Tab. 0. Fig. 3. Ref. 7.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): старший викладач кафедри опору матеріалів КНУБА, Пошивач Дмитро Володимирович.
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних сил України, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПОШИВАЧУ Дмитру Володимировичу.
Робочий тел.: +38(044) 241-54-21
Мобільний тел.: +38(067) 290-99-39
E-mail: poshyvach.dv@knuba.edu.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-8273-0298

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, професор кафедри будівельної механіки КНУБА, Лук'янченко Ольга Олексіївна.
Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних сил України, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.
Робочий тел.: +38(044) 241-54-20
Мобільний тел.: +38(095) 727-18-25
E-mail: lukianchenko.oo@knuba.edu.ua, lukianch0907@meta.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-1794-6030