

УДК 539.3

## БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ І ВАГИ ОБОЛОНКИ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ НА КРУГЛОМУ КОНТУРІ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ ІЗ ДВОХ ПОХИЛИХ ЕЛІПСІВ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

**Г.М. Іванченко,**  
д-р техн. наук, професор

**О.О. Кошевий,**  
д-р філософії (Ph.D.), доцент

**Г.А. Затилюк,**  
д-р філософії (Ph.D.), доцент

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
проспект Повітряних сил, 31, м. Київ. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2024.112.209-221

В статті розглянуто дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. Результати дослідження показали зменшення ваги оболонки після оптимізаційного розрахунку на 24.4%, при цьому максимальні переміщення зменшилися у 4.5 рази. Дана методика показує велику ефективність для проектування і виготовлення сталених конструкцій.

**Ключові слова:** оптимізація, параметрична оптимізація, багатокритеріальна оптимізація, оптимізація цільової функції, зміни проектування, обмеження, оболонки мінімальних поверхонь, геометрична нелінійність.

**Вступ.** Тонкі оболонки вдало підходять до задач оптимального проектування, за допомогою методу скінченних елементів і методу градієнтного спуску є можливість виконання зворотних задач будівельної і прикладної механіки. При цьому процес розрахунку відбувається з урахуванням геометричної нелінійності.

В сучасних чисельних дослідженнях використовують постановку з урахуванням геометричної нелінійності у методі скінченних елементів, а саме покрокову процедуру навантаження. Виникає потреба врахування співвідношень між векторами переміщення та їх похідними і приростами деформацій. Ці співвідношення допомагають визначити матрицю жорсткості скінченного елемента на кожному кроці навантаження, що призводить до якісного дослідження реальних переміщень в конструкції.

По факту дослідження напружено-деформовано стану з урахування геометричної нелінійності тонких оболонок є можливість досягти результатів чисельного дослідження з меншими переміщеннями ніж у звичайній статичній постановці. Для багатокритеріальної параметричної оптимізації, виконання цієї процедури дає можливість додатково зменшити вагу оболонки за рахунок знаходження дійсних реальних переміщень.

Сучасне об'єднання досліджень багатокритеріальної параметричної оптимізації з урахуванням геометричної нелінійності дає новий сучасний тип задач будівельної і прикладної механіки. Такий тип задач використовується вперше, та дає оцінити багатокритеріальну параметричну оптимізацію з нової точки зору при формуванні дійсних напружень і переміщень для тонких оболонок мінімальних поверхонь.

Геометрично-нелінійний розрахунок оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при багатокритеріальній параметричній оптимізації виконується методом скінченних елементів. Метод скінченних елементів – універсальний варіаційний метод, який орієнтований на вирішення найбільш складних задач теорії пружності та прикладної і будівельної механіки за рахунок окремих розрахункових комплексів.

Основна мета методу скінченних елементів полягає в дискретизації реального об'єкта дослідження. За допомогою цього методу загальний об'єм досліджуваного тіла розбивається на підобласті із малими об'ємними елементами, але точних розмірів – скінченні елементи (СЕ), в межах якого функція, яку необхідно знайти може бути апроксимована. У підсумку будь-яка наближена апроксимована величина може бути наближено апроксимована дискретною моделлю, яка представляє собою безліч скінченно-неперервних функцій, кожна з котрих визначена в межах підобласті.

Основні вирішуючі рівняння методу скінченних елементів можуть бути отримані із варіаційного принципу Лагранжа або більш в загальному випадку, в результаті постановки і вирішення відповідної варіаційної задачі. Незалежно від вибраного підходу, типова схема методу скінченних елементів виглядає наступним чином. Дискретизація області за рахунок поділу на скінченні елементи, нумерація вузлів дискретної області (глобальної нумерації) і кожного скінченного елемента окремо (локальна нумерація). Влаштування відповідності між глобальним і локальним номером за допомогою матриці ідентичності. Створена таким чином фізична модель об'єкта дослідження називається скінченно-елементною.

При побудові скінченно-елементної моделі континуальної системи розбиття на скінченні елементи не є однозначною процедурою і не очевидно, як наприклад в стержневих системах, де в якості елемента приймається окремий стержень. В континуальних системах дискретизації тіла, на скінченні елементи, часто визначається розмірність задачі. А саме, для дискретизації двомірних областей, як правило, використовуються скінченні елементи у вигляді плоских трикутних або чотирикутних – це стандарт. (але розміри можуть бути будь-які, головне щоб виконувалися основні вимоги до скінченно-елементної моделі і цілі дослідження). Елементи цього типу використовуються в якості підпирних стін, фундаментів, пластин, тонких оболонок.

Окремо, хочеться зазначити, що трикутні пластинчасті скінченні елементи можуть бути більш ефективними за чотирикутні за рахунок можливості описати будь-яку конфігурацію фізичної області і простіші в реалізації.

Дискретизація області завершується нумерацією вузлів і скінченних елементів. Технічно ця процедура достатньо проста, але потребує практичних навичок, так як від порядку нумерації залежить структура і ширина стрічки матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь методу. При раціональній нумерації ширина стрічки матриці буде мінімальною, що дуже спрощує і пришвидшує вирішення системи рівнянь.

Побудова дискретної математичної моделі. Дискретна математична модель включає у себе рішення наступних питань: апроксимацію функції в межах скінченного елемента через її значення у вузлах і апроксимацію в принципі безперервної в заданій області функції за допомогою шматково-безперервної функції, визначеної на кожному скінченному елементі. Обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості (МЖ) скінченного елемента, який пов'язує вузлові сили і вузлові переміщення в скінченному елементі.

На практиці в якості апроксимуючої функції в межах скінченного елемента частіше всього застосовують інтерполяційні поліноми різного ступеня, які називаються в методі скінченних елементів функціями форми. Точність наближеного рішення збільшується за рахунок згущення сітки, яка розділяє тіло на скінченні елементи. Теоретично відомо [14], що при необмеженому зменшенні розмірів скінченних елементів рішення задачі зводиться до точності 99.9%, якщо виконуються певні умови збіжності: в інтерполяційних поліномах містяться всі ступені повного поліному, як порядок якого не нижче порядку похідних від переміщень в геометричному рівнянні Коші, інтерполяційні поліноми вибрані так, що з'єднання елементів у вузлах забезпечує повну сумісність скінченних елементів між собою на границі розділу.

Частіше в якості апроксимуючих функцій застосовують поліноми першої категорії, оскільки вони мають простий вигляд, який задовольняє умови збіжності і простіше в реалізації, чим поліноми більш високого порядку.

В задачах прикладної і будівельної механіки континуальних систем невідомими функціями частіше застосовуються переміщення вузлів дискретної області і тоді метод скінченних елементів є аналогом методу переміщень стержневих систем.

Математична модель по суті встановлює заміну еквівалентної континуальної і ідеалізованої дискретної моделі. На основі матриці жорсткості відбувається формування елемента системи розв'язувальних рівнянь методу скінченних елементів для всієї дискретної області.

Далі відбувається вирішення системи розв'язувальних рівнянь відносно вузлових переміщень з урахуванням геометричної нелінійності. Визначення переміщень і деформацій, і напружень по області кожного скінченного елемента, і по всій скінченно-елементній моделі.

**Матриця жорсткості скінченно-елементної моделі з урахуванням геометричної нелінійності для оболонки мінімальної поверхні [3].**

Матриця жорсткості для всього тіла формується на основі матриці жорсткості скінченних елементів. При цьому передбачається, що енергія пружної деформації скінченно-елементної моделі дорівнює сумі енергій скінченних елементів:

$$U = \sum_{l=1}^m U_{(l)}, \quad (1)$$

де  $U_{(l)}$  – енергія деформації елемента з урахуванням геометричної нелінійності;  $m$  – загальна кількість скінченних елементів.

Враховуючи співвідношення

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \{u\}^T [B]^T [E][B] \{u\} dS. \quad (2)$$

Доповнимо вираз (1)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \{u\}_{(l)}^T [k]_{(l)} \{u\}_{(l)}. \quad (3)$$

Введемо в розгляд вектор переміщень вузлів всієї скінченно-елементної моделі

$$\{\bar{u}\} = \{u_1^{-(1)} u_2^{-(1)} u_1^{-(2)} u_2^{-(2)} \dots u_1^{-(n)} u_2^{-(R)}\}^T, \quad (4)$$

де  $n$  – кількість глобальних вузлів скінченно-елементної моделі;  $u_1^{(k)}$  – переміщення вузла з глобальним номером  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) по напрямку координатної осі  $x_i$  ( $i=1,2$ ).

Вектор переміщень вузлів скінченного елемента  $\{\bar{u}\}_{(l)}$  складається із компонентів вузлових переміщень  $u_1^{(k)}$ , який розташовується в порядку локальних номерів  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) вузлів. Оскільки вектори  $\{\bar{u}\}$  і  $\{\bar{u}\}_{(l)}$  характеризує переміщення з одним і тим же вузлів при різних ітераціях геометричної нелінійності і способі нумерації, вони можуть бути виражені один через одного за допомогою матриці інцидентності  $[i]_{(l)}$

$$\{\bar{u}\}_{(l)} = [i]_{(l)} \{\bar{u}\}. \quad (5)$$

Матриця  $[i]_{(l)}$  представляє собою таблицю із нулів і одиниць, число стовпців  $q$  яких рівно порядку вектору  $\{\bar{u}\}$ , а число рядків  $p$  – порядку вектора  $\{\bar{u}\}_{(l)}$ . Одиниці ставлять на перетині рядків і стовпців, які відповідають одним і тим же переміщенням. Положення одиниць в матриці інцидентності для довільного скінченного елемента визначається формулами

$$n_p = j + 2(n_{\text{лок}} - 1), \quad (6)$$

$$n_q = j + 2(n_{\text{гл}} - 1), \quad (7)$$

де  $n_p$  – номер рядка;  $n_q$  – номер стовпця матриці  $[i]_{(l)}$ ;  $j=1,2$  – номер напрямлення переміщення у вузлі з локальним номером  $n_{\text{лок}}$  і глобальним номером  $n_{\text{гл}}$ . Підставляємо формули (3)-(7) і отримаємо

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m ([i]_{(l)} \{\bar{u}\})^T [k]_{(l)} [i]_{(l)} \{\bar{u}\}. \quad (8)$$

Враховуючи матричну рівність

$$[i]_{(l)}\{\bar{u}\}^T = \{\bar{u}\}[I]_{(l)}^T, \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2}\{u\}^T \left( \sum_{l=1}^m [i]_{(l)}^T [k]_{(l)} [i]_{(l)} \right) \{\bar{u}\} = \frac{1}{2}\{u\}^T [\bar{k}]^T \{\bar{u}\}, \quad (10)$$

де

$$[\bar{k}] = \sum_{l=1}^m ([i]_{(l)}^T [k]_{(l)} [i]_{(l)}). \quad (11)$$

Вираз (11) матриця жорсткості всього тіла. Матриця жорсткості  $[\bar{k}]$  для двомірної скінченно-елементної моделі з двома ступенями свободи вузол має розмірність  $2n \times 2n$ , його структура симетрична  $k_{ij} = k_{ji}$  і  $k_{ij} > 0$ . Кожен коефіцієнт  $k_{ij}$  матриці жорсткості представляє собою  $R_l$  по напрямку  $L$ , яке викликано переміщеннями  $\bar{u}_j = 1$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n$ ).

Діюча область або на контурі навантаження приводиться до статичного еквівалентного вузлового навантаження, яке діє на конструкцію, і при ітераційному розрахунку дає вузлові переміщення, які за допомогою розрахункового комплексу Femap with Nastran передаються як напружено-деформований стан конструкції що і є геометричною нелінійністю

$$A = \iint_S \{u\}^T \{G\} dS + \iint_S \{u\}^T [F] dL = \{u\}^T \{Q\}. \quad (12)$$

де  $\{Q\}$  - вузлові сили,  $\{G\}$  і  $\{F\}$  матриці розподіленого навантаження.

**Система вирішуючих рівнянь з урахуванням геометричної нелінійності оболонки мінімальної поверхні методом скінченних елементів [1].** Систему вирішуючих рівнянь методу скінченних елементів формують, використовуючи варіаційний принцип Лагранжа, у відповідності з яким повна потенційна енергія  $\Pi$  скінченно-елементної моделі тіла знаходиться в стані стійкості і рівноваги має мінімальне значення.

Умова мінімуму буде використано, коли частинні похідні від потенційної енергії  $\Pi$  по всім вузлом переміщенням  $\{\bar{u}\}$  дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\bar{u}\}} = 0. \quad (13)$$

Повна потенційна енергія скінченно-елементної моделі дорівнює:

$$\Pi = U - A = \frac{1}{2}\{u\}^T [\bar{k}] \{\bar{u}\} - \{u\}^T \{Q\}. \quad (14)$$

Після диференціювання згідно (13) отримуємо систему вирішуючих рівнянь методу скінченних елементів:

$$[\bar{k}] \{\bar{u}\} - \{Q\} = 0. \quad (15)$$

В системі рівнянь (15) не враховані граничні умови відносно переміщень. Для приведення рівняння у відповідність із заданими значеннями вузлових переміщень необхідно виконати наступні зміни матриці жорсткості  $[\bar{k}]$  і вектора вузлових навантажень  $\{Q\}$  скінченно-елементної моделі. В першому варіанті в  $[\bar{k}]$  і  $\{Q\}$  записуються нулі в рядках, які відповідають відомим переміщенням, за виключенням діагональних членів матриці  $[\bar{k}]$ , які прирівнюються до одиниці. В другому варіанті стовпці матриці  $[\bar{k}]$ , які відповідають відомим переміщенням, множаться на ці переміщення і зі зворотнім знаком додається з відповідними компонентами вектора  $\{Q\}$ , після чого у вказаному стовпці матриці  $[\bar{k}]$  (крім діагональних елементів) записуються нулі. Перетворена система рівнянь приймає вигляд

$$[\bar{K}] \{\bar{U}\} - \{Q\} = 0. \quad (16)$$

Рішення системи рівнянь (16), як правило, виконується прямими методами, враховуючи особливості структури матриці (лінійність і симетрію відносно головної діагоналі).

Величини деформації і напружень в скінченному елементі визначається за формулами:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u\} = [B]\{u\}, \quad (17)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{z\} = [E][B]\{u\}. \quad (18)$$

Попередньо із вектора переміщення скінченно-елементної моделі  $\{\bar{u}\}$  виділяється вектор переміщення  $\{u\}_{(l)}$  скінченного елемента за допомогою матриці інцидентності

$$\{\bar{u}\}_{(l)} = [i]_{(l)} \{\bar{u}\}. \quad (19)$$

Викладена методика отримання співвідношення методу скінченних елементів з урахуванням геометричної нелінійності не залежить від форми і властивостей скінченних елементів, тому може бути впроваджена для пластинчастого скінченного елемента оболонки мінімальної поверхні [2].

Нижче представлені значення матриці для тонкої пластини, яка працює на згин чотирикутного тонкого скінченного елемента **plate**

$$[N] = [N_{11} N_{12} N_{13} N_{21} N_{22} N_{23} N_{31} N_{32} N_{33} N_{41} N_{42} N_{43}]. \quad (20)$$

$$N_{i_1} = \frac{1}{8} \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right) \left( 2 + \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + \frac{x_2}{x_2^{(i)}} - \frac{x_1^{(2)}}{a_1^2} - \frac{x_2^{(2)}}{a_2^2} \right), \quad (21)$$

$$N_{i_2} = \frac{x_1^{(i)}}{8} \left( \frac{x_1^{(2)}}{a_1^2} - 1 \right) \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right), \quad (22)$$

$$N_{i_3} = \frac{x_2^{(i)}}{8} \left( \frac{x_2^{(2)}}{a_2^2} - 1 \right) \left( \frac{x_1}{x_1^{(i)}} + 1 \right) \left( \frac{x_2}{x_2^{(i)}} + 1 \right), \quad (23)$$

$N_{ij}$  ( $j=1,2,3$ ) - функції форми  $i$ -го вузла чотирикутного плоского скінченного елемента **plate** в розрахунковому комплексі **Femap with Nastran** [3].

**Аналіз чутливості параметричної оптимізації для оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі.** В рамках аналізу чутливості обчислюються градієнти змінних проектування конструкції, переміщень у вигляді частинних похідних від цих характеристик по змінним проектуванням та товщини оболонки. Інформація про чутливість служить основою побудови алгоритму оптимального проектування методом градієнтного спуску функції цілі. Матриця чутливості

$$G = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X_j}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m} \right\} \quad (24)$$

і градієнт цільової функції  $\nabla \bar{f}(X)$  використовується для побудови матриці проектування, обчислення множників Лагранжа і визначення напрямку спуску по градієнту. Тут  $n$  – кількість змінних проектування,  $m$  – кількість обмежень. Крім того, при проведенні аналізу чутливості з'являється кількісна інформація про вплив зміни змінних проектування на функціонування системи [19].

З математичної точки зору, залежність реакцій оболонки у вигляді переміщень і напружень від змінних проектування є товщина оболонки. Такі рівняння лінійні відносно змінних станів, але якщо врахувати вплив змінних проектування на коефіцієнти лінійних операторів, рівняння стану є нелінійним відносно функціональної залежності змінних станів і змінних проектування.

Аналіз чутливості реакцій конструкцій на зміну змінних проектування можливо провести без обчислення похідної матриці жорсткості. Для цього виконуємо диференціювання по  $i$ -й складовій  $X_i$  рівняння стану [20]

$$K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i} + \frac{\partial K}{\partial X_i} \times \bar{z} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i}. \quad (25)$$

Цей вираз можливо перетворити до вигляду:

$$K \times \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} \times \bar{z}. \quad (26)$$

Праву частину рівняння (26) можливо розглядати як вектор псевдо навантаження  $\vec{p}$ . Тоді для системи похідних переміщень вираз можна переписати як:

$$K \times \left[ \frac{\partial \vec{z}}{\partial X_1}, \frac{\partial \vec{z}}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \vec{z}}{\partial X_n} \right] = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_k^*], \quad (27)$$

де  $k$  – кількість навантажень конструкції.

Оскільки вирішення системи рівнянь статки можливо при багатьох варіантах правих частин рівняння [21], то рішення (1.27) формується одночасно з вирішенням рівняння стану методу скінченних елементів. Як показують дослідження, така схема вирішення задачі при розгляді до 100 вантажних векторів потребує всього на 15% більше часу роботи процесору в порівнянні з вирішенням задачі на один вантажний вектор. Ефект досягається за рахунок виключення  $K \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial X_i}$  із виразу градієнтів цільової функції і обмежень.

Матриця (27) легко обчислюється при відомій функціональній залежності зовнішніх навантажень від змінних проектування. Якщо  $\vec{p}(\vec{X})$  – вектор зовнішніх навантажень, який є постійним, то  $\frac{\partial \vec{p}}{\partial X_i} = 0$  [4]

$$P = \left\{ \frac{\partial p_j}{\partial X_i}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m} \right\}. \quad (28)$$

Розглянемо визначення похідної  $K \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial X_i}$ , для цього ведемо наступні позначення  $K_g$  і  $K_l$  – матриця жорсткості відповідного елемента в загальній локальній системі координат;  $\vec{z}_g$  і  $\vec{z}_l$  – вузлові переміщення в локальній системі координат;  $T$  – матриця перетворення локальної системи координат в глобальну [20, 22].

Основні співвідношення методу скінченних елементів при перетворенні координат:

$$K = T^T \times K^l \times T, \quad (29)$$

$$\vec{z}_l = T \times \vec{z}_g. \quad (30)$$

Так як в якості змінних проектування прийнята товщина оболонки, то координати вузлів конструкції похідна  $K_g$  по  $\vec{X}$  дорівнює [6, 19]:

$$\frac{\partial K_g}{\partial \vec{X}} = \left( \frac{\partial T}{\partial \vec{X}} \right) \times K_l \times T + T^T \times \frac{K_l}{\partial \vec{X}} \times T + T^T \times K_l \times \frac{\partial T}{\partial \vec{X}}. \quad (31)$$

Приймаємо до уваги рівність (1.30), маємо:

$$\frac{\partial K_g}{\partial \vec{X}} \vec{z}_g = \left( \frac{\partial T}{\partial \vec{X}} \right)^T \times (K \times \vec{z}_l) + T^T \times \left( \frac{K_l}{\partial \vec{X}} + K_l \times \frac{\partial T}{\partial \vec{X}} \times \vec{z}_g \right). \quad (32)$$

Можемо показати, що

$$\frac{\partial}{\partial \vec{X}} K \times \vec{z} = \frac{\partial}{\partial \vec{X}} \left( \sum_{i=1}^{NE} K_g^i \times \vec{z} \right) = \sum_{i=1}^{NE} \left( \frac{\partial K_g^i}{\partial \vec{X}} \times \vec{z}_g^i \right), \quad (33)$$

де  $NE$  – число скінченних елементів;  $K_g^i$  – матриця жорсткості  $i$ -го елемента в глобальній системі координат.

Звідси матриця  $\frac{\partial K}{\partial \vec{X}} \times \vec{z}$  може бути сформована шляхом обчислення вектору  $\frac{\partial K_g^i}{\partial \vec{X}} \times \vec{z}_g^i$  для кожного скінченного елемента конструкції і подальшої їх суми.

Вектор  $K_l \times \vec{z}_l$  в першому складеному рівнянні (29) представляє собою внутрішні зусилля в елементі в локальній системі координат, які можуть бути визначені як [7]

$$\bar{p}_l = K_l \times \bar{z}_l = \left( \int_0^l (B^T \times D \times B) dx \right) \times \bar{z}_l = \int_0^l (B^T \times \bar{\sigma}) dx, \quad (34)$$

де  $\bar{\sigma} = D \times B \times \bar{z}_l$ .

Вектор  $K_l \times \frac{\partial T}{\partial X} \times \bar{z}_g$  із останнього члена (33) може бути отриманий аналогічно із визначенням внутрішніх зусиль, відповідно фіктивним вузловим локальним переміщенням (34)

$$\bar{z}_l = \frac{\partial T}{\partial X} \times \bar{z}_g. \quad (35)$$

Вектор  $\frac{K_l}{\partial X} \times \bar{z}_l$  апроксимується за допомогою скінченної різниці шляхом перерахунку матриці  $K_l$  для малих відшкодувань змінних проектування  $X_i$ . З урахуванням (35) знаходження вектора  $\frac{K_l}{\partial X} \times \bar{z}_l$  зводиться до ряду векторних операцій, і при малих змінах  $\partial \bar{X}$  дорівнює:

$$\frac{K_l}{\partial X} \times \bar{z}_l = \frac{(K_l \times \bar{z}_l)_{\bar{X} + \delta \bar{X}} - (K_l \times \bar{z}_l)_{\bar{X}}}{\delta \bar{X}}. \quad (36)$$

Таким чином, аналіз чутливості реакцій оболонки для кожного пластинчастого скінченного елемента до варіацій змінних проектування зводиться до визначення вектору  $\frac{\partial K}{\partial X} \times \bar{z}$ , шляхом знаходження двох додаткових векторів внутрішніх зусиль в локальній системі координат і перетворення результативних векторів в загальну координатну систему.

Визначивши чутливість  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial X}$ , є можливість перейти від знаходження чутливості внутрішніх зусиль в скінченних елементах до зміни змінних проектування, оскільки для реалізації алгоритму вирішення задачі оптимізації потрібно побудова матриці чутливості обмежень  $G$  [23, 18].

Чутливість обмежень на переміщення вузлів може бути також представлена у вигляді [8, 17]:

$$\frac{\partial g_i}{\partial X} = - \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_i^2} \frac{\partial \Delta_i}{\partial X}. \quad (37)$$

**Чисельне дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності [9-11].** Для дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні з урахуванням геометричної нелінійності використовується спеціальний додатковий модуль оптимізатора створений авторами, який прив'язується до розрахункового комплексу Femap with Nastran [12]. Скінченно-елементна модель побудована з пластинчастих скінченних елементів **plate**, які представлені в розрахунковому комплексі Femap with Nastran і відповідає теоретичним відомостям, які вказані у статті вище. Кількість елементів **plate** 2000 штук і вузлів 2037 штук. Закріплення до жорсткого диску землі відбувається у двох точках де закріплюються переміщення в трьох напрямках і три кути повороту. Розрахункова модель зображено на рис. 1.

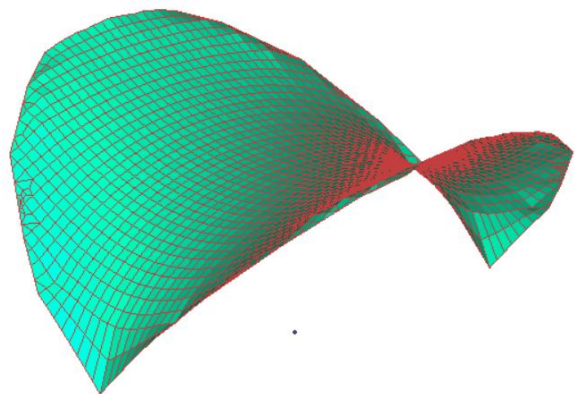


Рис. 1. Скінченно-елементна модель оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, яка складається з двох похилих еліпсів

Для налаштування чисельного дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації вводяться вихідні дані [10]. Цільова функція – вага і переміщення по трьом координатним осям. Змінні проектування – товщина оболонки від 1 до 200 мм. Обмежені показані, як розрахунковий опір сталі на розтяг  $R_y=260$  МПа, це середня сталь по міцності. Врахування геометричної нелінійності відбувається через нелінійний статичний розрахунок, за допомогою якого при кожній ітерації відбувається перенесення дійсних вузлових переміщень на оболонку за допомогою напружено-деформованого стану [13-16].

Після виконання розрахунку параметричної оптимізації маємо значення напружень на рис. 2., переміщень на рис. 3 та розподіл товщини на рис. 4, а також графік зміни цільових функцій на рис. 5.

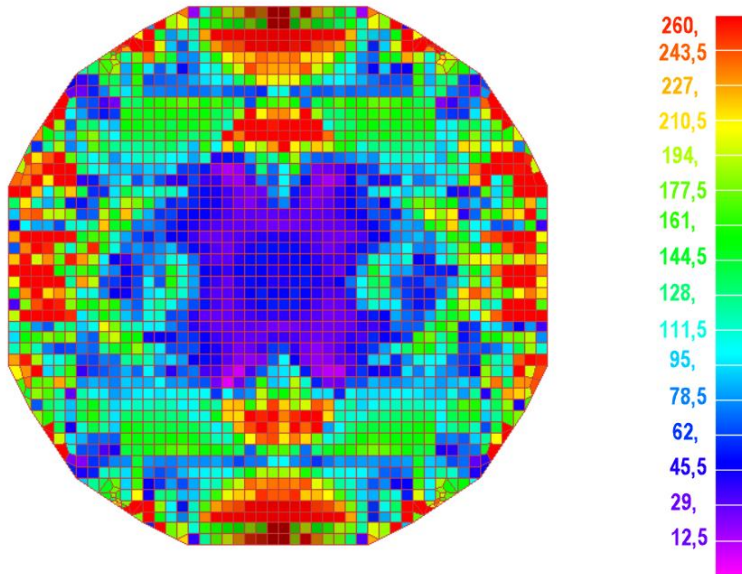


Рис. 2. Напруження по Мізесу оболонки після багатокритеріальної параметричної оптимізації

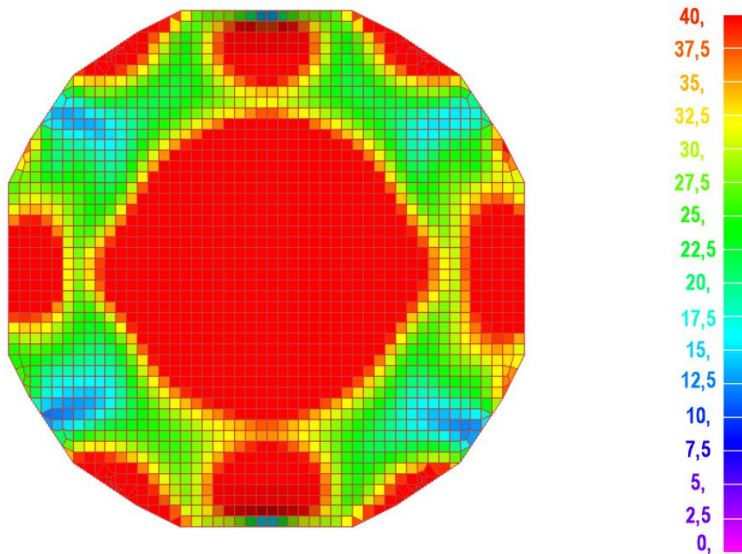


Рис. 3. переміщення оболонки після багатокритеріальної параметричної оптимізації



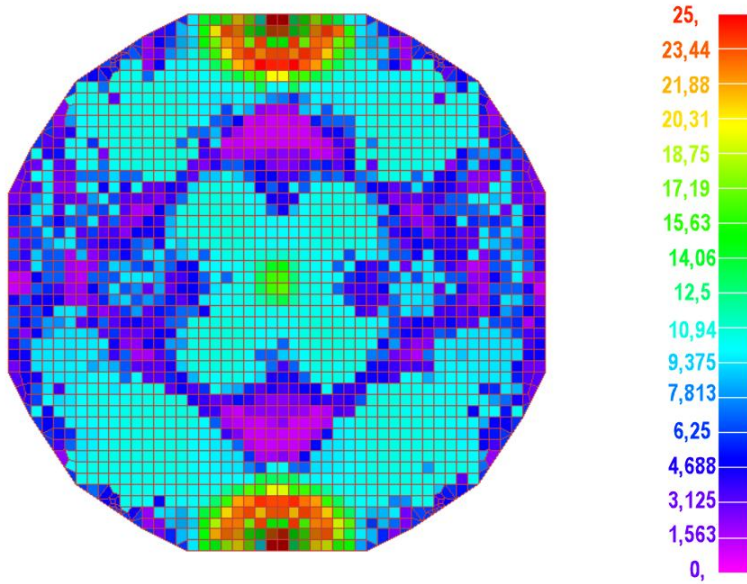


Рис. 4. Розподіл товщини оболонки після багатокритеріальної параметричної оптимізації

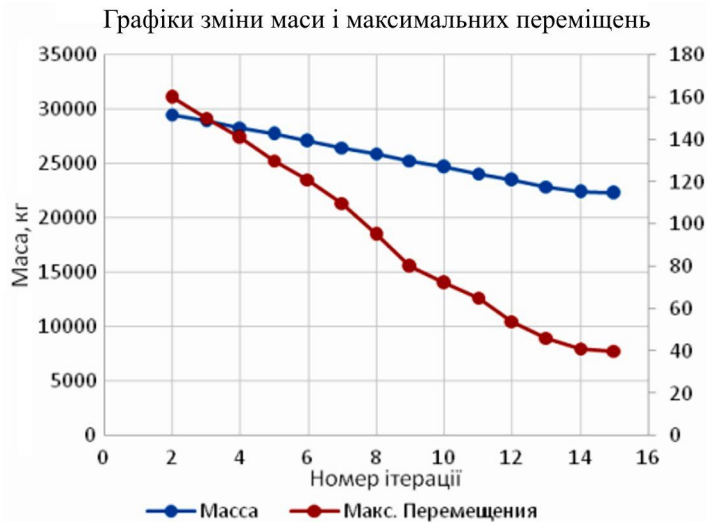


Рис. 5. Розподіл товщини оболонки після багатокритеріальної параметричної оптимізації

**Результати дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності.** Стандартна багатокритеріальна параметрична оптимізація дає можливість в середньому економити 10% сталі, з урахуванням геометричної нелінійності цей показник виростає до 20%. На даному об'єкті дослідження було зекономлено відносно 24.4% листової сталі на рис. 5, що є суттєвою відносною економією. Після розробки конструкторської документації інженер проектувальник зможе вирахувати абсолютну економію. Корисна економія виражається у зменшенні переміщень по трьом координаційним осям від 180 мм до 40 мм на рис. 3, що у відносному еквіваленті сягає зменшенню у 4.5 разів. Товщина оболонки коливається від 25 мм до 3 мм на рис. 4. Напруження по Мізесу відповідає максимальному обмеженню 260 МПа (рис. 2). При застосуванні високоміцних сталей можна досягнути ще більшої економії.

Дана методика авторів показує високі результати для інноваційного проектування і виробництва сталених тонких оболонок на території України і всього світу, а також дає можливість застосовувати декілька видів оптимізації на одному об'єкті дослідження.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П. Чисельна реалізація багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на квадратному контурі при термосиловому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 109. – С. 50-65
2. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П., Григор'єва Л.О. Чисельне дослідження параметричної оптимізації вимушених частот коливання оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі при термосиловому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 110. – С. 430-446
3. Іванченко Г.М., Чеведа П.П., Кушніренко М.Г., Козовенко А.М. Аналіз реакцій в елементах просторових схем при різних способах з'єднань // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 163-170.
4. Кошевий О.О. Оптимізація проектування циліндричних резервуарів з жорсткими оболонками покриття // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 253-265.
5. Кошевий О.О. Оптимізація сталеного звареного резервуару при обмеженні: напружень, переміщень, власних частот коливання. // Будівельні конструкції. Теорія і практика: наук.-техн. збірник. К.: КНУБА. 2018. Вип.3.– С.34– 50.
6. Гоцуляк С.О., Кошевий О.П., Морсков Ю.А. Чисельне моделювання оболонок, утворених мінімальними поверхнями. // Прикладна геометрія та інженерна графіка: наук.-техн. збірник. К.: КНУБА. 2001. Вип. 69.- С.47-51.
7. Кошевий О.П., Кошевий О.О. Чисельне дослідження власних коливань розтягнутих оболонок утворених мінімальними поверхнями // Містобудування та територіальне планування, Вип. 55. – Київ, КНУБА, 2015. – с. 215-227.
8. Кошевий О.П., Кошевий О.О. Власні коливання оболонок мінімальних поверхонь на круглому та квадратному контурі // Містобудування та територіальне планування, Вип. 59. – Київ, КНУБА, 2016. – с. 234-244
9. Кошевий О.О., Кошевий О.П., Григор'єва Л.О. Чисельна реалізація багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на прямокутному контурі при термосиловому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 108. – С. 309–324.
10. Кошевой А.П. Устойчивость пластин и оболочек сложной формы // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборник. – К.: КИСИ, 1991. – Вип. 59. – С. 65–71.
11. Манита, Л.А. Условия оптимизации в конечномерных нелинейных задачах оптимизации. – М.: Московский государственный институт электроники и математики, 2010. – 81 с.
12. Мелькумова Е.М. О некоторых подходах к решению многокритериальных задач. // Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии. – В.: ВГУ– №2–2010– 3 с.
13. Пелешко І.Д., Юрченко В.В. Оптимізація проектування металевих конструкцій на сучасному етапі (огляд праць). // Металеві конструкції: збірник наукових праць. – 2009. – №15 – С. 13–21.
14. Пелешко І.Д., Балук І.М. Оптимізація поперечних перерізів стрижнів сталевих конструкцій. // Збірник наукових праць УкрНДІПСК ім. В. М. Шимановського. – К.: Сталь, Вип. 4. – 2009. – С. 142–151.
15. Пелешко І.Д., Лісоцький Р.В., Балук І.М. Оптимізація сталевих стрижневої конструкції покриття торгово-розважального комплексу. // Збірник наукових праць УкрНДІПСК ім. В. М. Шимановського. – К.: Сталь, Вип. 5. – 2010. – С. 181–191.
16. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кенплер Х., Кочык З. Метод конечных элементов в механике твердых тел. // Издательство Вища школа. Головное издательство – Киев – 1982. – 480 с.
17. Bazenov V.A., Gaidachuk V.V., Koshevoy A.P. Stability of multiply connected ribbed shells and plates in a magnetic field. // Journal of Soviet Mathematics 66(6). –1993. – С. 2631–2636.
18. Cheung Y. K. The Finite Strip Method. Them. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p
19. Guest J.K., Priest J., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. –61(2) – P.238–254.
20. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. —New York: John Wiley and Sons, 2011. — 772 p.
21. Lobo M.S., Vandenbeghe L., Boyd S. Applications of second-order cone programming. // Linear Algebra and its Applications. – 1998. – Vol. 284, no. 1. – P. 193–228.
22. Yonekura K., Kanno Y. Second-order cone programming with warm start for elastoplastic analysis with von mises yield criterion. // Optimization and Engineering. – 2012. – Vol. 13, no. 2. – P. 181–218.
23. Waszytyński Z., Brandt A. The present state of knowledge in the field of. Optimum design of structures. // Appl. Mech. Rev. – 1963. Vol. 16 no. 5. – P. 341-350.

## REFERENCES

1. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П. Чисельна реалізація багатокритеріальної параметричної оптимізації оболонки мінімальної поверхні на квадратному контурі при термосиловому навантаженні (Numerical implementation of multicriteria parametric optimization of minimum surface shell on a square contour under therm force loading) // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 109. – P. 50-65.
2. Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Кошевий О.П., Григор'єва Л.О. Чисельне дослідження параметричної оптимізації вимушених частот коливання оболонки мінімальної поверхні на трапецевидному контурі при термосиловому

- navantazhenn (Numerical study of the parametric optimization of the forced oscillation frequencies of the shell of a minimal surface on a trapezoidal contour under thermal and power loading) // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 430-446.
3. *Ivanchenko H.M., Cheverda P.P., Kushnirenko M.H., Kozovenko A.M.* Analiz reaktsiy v elementakh prostorovykh skhem pry riznykh sposobakh z'yednan (Analysis of reactions in elements of spatial schemes with different methods of connections) // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. – K.: KNUBA, 2012. – Vyp. 90. – P. 163-170.
  4. *Koshevyi O.O.* Optymalne proektuvannya tsylindrychnykh rezervuariv z zhorstkymy obolonkami pokryttya (Optimal design of cylindrical tanks with rigid coating shells) // *Opirmaterialiv i teoriyasporud: nauk.-tekh. zbirnyk*. – K.: KNUBA, 2019. – №. 103. – P. 253-265.
  5. *Koshevyi O.O.* Optymizatsiya stalnoho zvarenoho rezervuaru pry obmezheni: napruzhen, peremishchen, vlasnykh chastot kolyvannya (Optimization of steelwelded tank with limitations: stresses, displacements, natural frequencies of oscillations). // *Budivelni konstruktsiyi. Teoriya i praktyka: nauk.-tekh. zbirnyk*. K.: KNUBA. 2018. №.3.– P.34 – 50.
  6. *Hotsulyak Ye.O., Koshevyi O.P., Morskov Yu.A.* Chyselne modelyuvannya obolonok, utvorenykh minimalnymy poverkhnnyamy (Numerical modeling of shells formed by minimal surfaces) // *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrakifa: nauk.-tekh. zbirnyk*. K.: KNUBA. 2001. №. 69.- P.47-51.
  7. *Koshevyi O.P., Koshevyi O.O.* Chyselne doslidzhennya vlasnykh kolyvan roztyahnutykh obolonok utvorenykh minimalnymy poverkhnnyamy. (Numerical study of natural oscillations of stretched shells formed by minimal surfaces) // *Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya*, №. 55. – Kyiv, KNUBA, 2015. – P. 215-227.
  8. *Koshevyi O.P., Koshevyi O.O.* Vlasni kolyvannya obolonok minimalnykh poverkhon na kruhlomu ta kvadratnomu konturi. (Own oscillations of shells of minimal surfaces on a round and square contour) // *Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya*, №. 59. – Kyiv, KNUBA, 2016. – P. 234-244.
  9. *Koshevyi O.O., Koshevyi O.P., Hryhoryeva L.O.* Chyselna realizatsiya bahatokryterialnoyi parametrychnoyi optymizatsiyi obolonky minimalnoyi poverkni na pryamokutnomu konturi pry termosylovomu navantazheni (Numerical implementation of multi-criteria parametric optimization of minimum surface shell on a rectangular contour under thermforced loading) // *Opirmaterialiv i teoriyasporud: nauk.-tekh. zbirnyk*. – K.: KNUBA, 2021. – Vyp. 108. – S. 309-324.
  10. *Koshevoy A.P.* Ustoychivost plastin i obolochek slozhnoyi formi (Stability of plates and shells of complex shape) // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. – K.: KISI, 1991. – Vip. 59. – P. 65-71.
  11. *Manyta L.A.* Usloviya optymyzatsiyi v konechnomernykh nelyneynykh zadachakh optymyzatsiyi. (Optimization conditions in finite-dimensional nonlinear optimization problems). – M.: Moskovskiy hosudarstvenniy instytut elektroniky i matematiki, 2010. – 81 p.
  12. *Melkumova E.M.* O nekotorykh podkhodakh k resheniyu mnogokryterialnykh zadach. (About some approaches to solving multicriteria problems) // *Vestnyk VHU. Seryya Systemnyy analiz y ynfomatsyonnye tekhnolohyy*. – V.: VHU– №2– 2010– 3 p.
  13. *Peleshko I.D., Yurchenko V.V.* Optymalne proektuvannya metalevykh konstruktsiy na suchasnomu etapi (ohlyad prats). (Optimal design of metal structures at the present stage (review of works)). // *Metalevi konstruktsiyi: zbirnyk naukovykh prats*. – 2009. – №15 – P. 13–21.
  14. *Peleshko I.D., Baluk I.M.* Optymizatsiyapoperechnykhpererizivstryzhnivstaleykhkonstruktsiy. (Optimization of crosssections of rods of steelstructures). // *Zbirnyknaukovykhprats UkrNDIPSKim*. V. M. Shymanovskoho. – K.: Stal, №. 4. – 2009. – P. 142–151.
  15. *Peleshko I.D., Lisotskyy R.V., Baluk I.M.* Optymalne proektuvannya stalevoyi stryzhnevoyi konstruktsiyi pokryttya torhovoro-zvazhalnoho kompleksu. (Optimal design of a steelrodcoverstructure of a shopping and entertainment complex). // *Zbirnyk naukovykh prats UkrNDIPSKim*. V. M. Shymanovskoho. – K.: Stal, №. 5. – 2010. – P. 181–191.
  16. *Sakharov A.S., Kyslookyy V.N., Kyrychevskyy V.V., Alienbakh Y., Habbert U., Dankert YU., Keppler KH., Kochyk Z.* Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel. (Finite element method in solid mechanics) // *Vydavnytstvo Vyshcha shkola. Holovnoe yzdatelstvo – Kyev* – 1982. – 480 p.
  17. *Bazenov V.A., Gaidaichuk V.V., Koshevoy A.P.* Stability of multiply connected ribbed shells and plates in a magnetic field. // *Journal of Soviet Mathematics* 66(6). –1993. – C. 2631–2636.
  18. *Cheung Y. K.* The Finite Strip Method. Them. – Boca Raton: CRC Press, 1997. – 416 p.
  19. *Guest J.K., Prievost J., Belytschko T.* Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004. –61(2)– P.238–254.
  20. *Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I.* Handbook of Monte Carlo Methods. — New York: John Wiley and Sons, 2011. — 772 p.
  21. *Lobo M.S., Vandenbeghe L., Boyd S.* Applications of second-order cone programming // *Linear Algebra and its Applications*. – 1998. – Vol. 284, no. 1. – P. 193–228.
  22. *Yonekura K., Kanno Y.* Second-order cone programming with warm start for elastoplastic analysis with von mises yield criterion. // *Optimization and Engineering*. – 2012. – Vol. 13, no. 2. – P. 181–218.
  23. *Waslytynski Z., Brandt A.* The present state of knowledge in the field of Optimum design of structures // *Appl. Mech. Rew.* – 1963. Vol. 16 no. 5. – P. 341-35.

*Ivanchenko G.M., Kosheviy O.O., Zatyliuk G.A.*

**БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ І ВАГИ ОБОЛОНКИ МІНІМАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ НА КРУГЛОМУ КОНТУРІ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ ІЗ ДВОХ ПОХИЛИХ ЕЛІПСІВ, ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ.**

В сучасних чисельних дослідженнях використовують постановку з урахуванням геометричної нелінійності у методи скінченних елементів, а саме покрокову процедуру навантаження. Виникає потреба врахування співвідношень між векторами переміщення та їх похідними і приростами деформацій. Ці співвідношення допомагають визначити матрицю жорсткості скінченного елемента на кожному кроці навантаження, що призводить до якісного дослідження реальних переміщень в конструкції.

Геометрично-нелінійний розрахунок оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при багатокритеріальній параметричній оптимізації виконується методом скінченних елементів. Метод скінченних елементів – універсальний варіаційний метод, який орієнтований на вирішення найбільш складних задач теорії пружності та прикладної і будівельної механіки за рахунок окремих розрахункових комплексів.

Матриця жорсткості – для всього тіла формується на основі матриці жорсткості скінченних елементів. Систему вирішуючих рівнянь методу скінченних елементів формують, використовуючи варіаційний принцип Лагранжа, у відповідності з яким повна потенційна енергія  $\Pi$  скінченно-елементної моделі тіла, яке знаходиться в стані стійкості і рівноваги має мінімальне значення.

В рамках аналізу чутливості обчислюються градієнти змінних проектування конструкції, переміщень у вигляді частинних похідних від цих характеристик по змінним проектуванням та товщини оболонки. Інформація про чутливість служить основою побудови алгоритму оптимального проектування методом градієнтного спуску функції цілі.

Стандартна багатокритеріальна параметрична оптимізація дає можливість в середньому економити 10% сталі, з урахуванням геометричної нелінійності цей показник виростає до 20%. На даному об'єкті дослідження було зекономлено відносно 24.4% листової сталі, що є суттєвою відносною економією.

Дана методика авторів показує високі результати для інноваційного проектування і виробництва на території України і всього світу сталей тонких оболонок, а також дає можливість застосовувати декілька видів оптимізації на одному об'єкті дослідження.

**Ключові слова:** оптимізація, параметрична оптимізація, багатокритеріальна оптимізація, оптимізація цільової функції, змінні проектування, обмеження, оболонки мінімальних поверхонь, геометрична нелінійність.

*Ivanchenko H.M., Kosheviy O.O., Zatyliuk Gh.A.*

**MULTI-CRITERIA PARAMETRIC OPTIMIZATION OF THE DISPLACEMENT AND WEIGHT OF A SHELL OF A MINIMUM SURFACE ON A CIRCULAR CONTOUR CONSISTING OF TWO INCLINED ELLIPSES UNDER THERMAL AND POWER LOADING WITH CONSIDERATION OF GEOMETRIC NONLINEARITY**

Thin shells are well suited to optimal design problems, and the finite element method and gradient descent method make it possible to solve inverse problems in structural and applied mechanics. The calculation process takes into account geometric nonlinearity.

In modern numerical studies, a formulation taking into account geometric nonlinearity in the finite element method is used, namely, a stepwise loading procedure. It becomes necessary to take into account the relations between displacement vectors and their derivatives and strain increments. These relations help to determine the stiffness matrix of the finite element at each loading step, which leads to a qualitative study of real displacements in the structure.

The geometrically nonlinear calculation of a shell of minimum surface on a circular contour consisting of two inclined ellipses in a multi-criteria parametric optimization is performed by the finite element method. The finite element method is a universal variational method that is focused on solving the most complex problems of elasticity theory and applied and structural mechanics using separate calculation complexes.

Stiffness matrix - for the whole body is formed on the basis of the finite element stiffness matrix. The system of solving equations of the finite element method is formed using the Lagrange's variational principle, according to which the total potential energy  $P$  of a finite element model of a body in a state of stability and equilibrium has a minimum value.

As part of the sensitivity analysis, gradients of the design variables of the structure, displacements in the form of partial derivatives of these characteristics along the design variables, and shell thickness are calculated. The sensitivity information serves as the basis for building an optimal design algorithm using the gradient descent method of the objective function.

Standard multi-criteria parametric optimization allows for an average of 10% steel savings, with geometric nonlinearity increasing to 20%. At this study site, 24.4% of sheet steel was saved, which is a significant relative saving.

This methodology of the authors shows high results for innovative design and production of steel thin shells in Ukraine and around the world, and also makes it possible to apply several types of optimization to one research object.

**Keywords:** optimization, parametric optimization, multicriteria optimization, objective function optimization, design variables, constraints, minimum surface envelopes, geometric nonlinearity.

УДК 539.3

*Іванченко Г.М., Кошевий О.О., Затилюк Г.А. Багатокритеріальна параметрична оптимізація переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів, при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 209-221.*

*В статті розглянуто дослідження багатокритеріальної параметричної оптимізації переміщення і ваги оболонки мінімальної поверхні на круглому контурі, що складається із двох похилих еліпсів при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. Результати дослідження показали зменшення ваги оболонки після оптимізаційного розрахунку на 24.4%, при цьому максимальні переміщення зменшилися у 4.5 рази. Дана методика показує велику ефективність для проектування і виготовлення сталених конструкцій.*

Таб. 0. Лл. 5. Бібліогр. 23 назв

UDS 539.3

*Ivanchenko H.M., Kosheviy O.O., Zatyliuk Gh.A. Multi-criteria parametric optimization of the displacement and weight of a shell of minimal surface on a circular contour consisting of two inclined ellipses under thermal and power loading with consideration of geometric nonlinearity// Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 209-221.*

*The paper deals with the study of multicriteria parametric optimization of the displacement and weight of a shell of a minimum surface on a circular contour consisting of two inclined ellipses under thermal power loading, taking into account geometric nonlinearity. The results of the study showed a 24.4% reduction in the shell weight after the optimization calculation, while the maximum displacements decreased by 4.5 times. This methodology shows great efficiency for the design and manufacture of steel structures.*

Tabl. 0. Fig. 5. Ref. 23.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, декан будівельного факультету КНУБА ІВАНЧЕНКО Григорій Михайлович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ІВАНЧЕНКУ Григорію Михайловичу

**Робочий тел.:** +38(044) 248-32-37;

**Мобільний тел.:** +38(067) 597-19-48;

**E-mail:** ivgm61@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-1172-2845>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор філософії (Ph.D.), доцент, доцент кафедри теоретичної механіки Кошевий Олександр Олександрович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОШЕВОМУ Олександр Олександровичу

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-36

**Мобільний тел.:** +38(098) 207-01-37

**E-mail:** a380982070137@gmail.com.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-1903-2905>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор філософії (Ph.D.), доцент, доцент кафедри будівельної механіки Затилюк Герман Анатолійович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЗАТИЛЮКУ Герману Анатолійовичу

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-36

**Мобільний тел.:** +38(099) 110-05-64

**E-mail:** zatyliuk.ha@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-0392-2214>