ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2024. № 112

УДК 624.04

ВНЕСОК ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ У ЇЇ СТАТИЧНУ НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ

А.В. Перельмутер[1,2],
д-р техн. наук

[1]*НВТ SCAD Soft, 03037, Київ, вул. Освіти, 3а*

[2]*Київський національний університет будівництва і архітектури, 03680, м. Київ, Україна. проспект Повітряних сил, 31*

DOI: 10.32347/2410-2547.2024.112.108-124

У статті розглядається і статико-кінематичний аналіз стрижневих систем. Фундаментальним вимірником рівня резервування стрижневих систем є ступінь статичної невизначеності. Але ця чисельна ознака не містить відомостей про роль кожного з елементів системи у формуванні ступеня статичної невизначеності. Цю роль виконує спеціально конструйована матриця розподілу статичної невизначеності (РСН-матриця), яка містить вичерпні відомості про вклад елементів системи в її статичні та кінематичні властивості. Наведено відомості про можливість використання РСН-матриці для оцінки надійності та живучості конструктивного комплексу.
Ключові слова: резервування, статико-кінематичний аналіз, живучість, чутливість, надійність.

1. Вступ

Концепція резервування (зайвості) у конструкціях займає центральне місце у багатьох філософіях проектування, і її важливість вже давно визнана інженерами-будівельниками. Було запропоновано кілька визначень надмірності, наприклад, з погляду руйнівного навантаження, кількості пластичних шарнірів, ймовірності відмови системи і т.д.

Грубо кажучи, резервування конструкції відноситься до ступеня деградації, на яку може вона піддатися без втрати певних елементів її функціональності. Наприклад, при проектуванні житлового будинку в сейсмічно активному районі може знадобитися збереження функцій захисту життя при землетрусі, але не обов'язково придатності конструкції у якості житла. Або, навпаки, конструкцію не можна вважати резервованою, якщо вихід з ладу якогось одного елемента негайно призводить до виходу з ладу всієї конструкції або втрати всіх її функціональних властивостей. У цій роботі резервування оцінюється стосовно відмови конструктивних елементів. Однак для реальної конструкції ми заздалегідь не знаємо скільки і які елементи вийдуть з ладу. Іншими словами, резервування слід розглядати за умов невизначеності 1.

Системи із резервуванням призначені для забезпечення альтернативних шляхів навантаження, що є однією з основних можливих стратегій проектування надійності та живучості конструктивного комплексу. У цьому випадку при втраті або ослабленні деяких конструктивних елементів навантаження все ж таки можуть перерозподілятися всередині системи, а потім поглинатися і безпечно передаватися за межі конструкції або фундамент.

У будівельній механіці, ймовірно, найбільш поширеним вимірником рівня резервування ферми або рами є її ступінь статичної невизначеності s, яка, наприклад, для ферм, вимірюється кількістю «зайвих» стрижнів, хоча неодноразово вказувалося 2, 3, що s не завжди підходить для оцінки працездатності всієї конструктивної системи.

Розглянемо, наприклад, конструкції ферм, показані на рис. 1, де вони складаються з шести стрижнів і мають однаковий набір вузлів. Ліва ферма стає змінною, якщо видалити певний стрижень, як показано на рис. 2, в той час як після видалення будь-якого окремого стрижня з правої ферми вона все ще залишається незмінною. Резервування g лівої ферми дорівнює $g = 0$, а правої ферми $g = 1$. При цьому ці дві ферми мають однаковий ступінь статичної невизначеності $s = 6$.

Отже, крім визначення ступеня статичної невизначеності, потрібні кількісні оцінки, що демонструють, наскільки ефективно статична невизначеність вкладена в систему. Корисно знати, яка важливість окремих компонентів для системи в цілому.

© Перельмутер А.В.

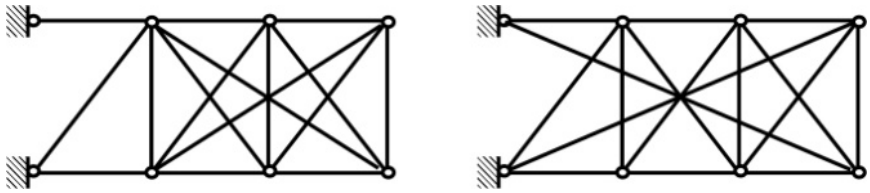


Рис. 1

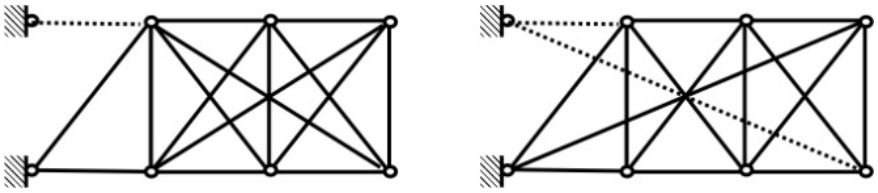


Рис. 2

Початком дослідження цієї проблеми поклали роботи К. Лінквіца [4] та його учнів [5], [6], де на основі аналогії між рівняннями обчислення поправок у геодезії та канонічними рівняннями методу сил у будівельній механіці була запропонована концепція надмірності (статичного резервування) у фермових та каркасних конструкціях. Це була перша спроба, де статичні властивості системи описувалися з погляду кожної її компоненти.

В рамках зазначеної концепції була введена в розгляд матриця, яка відображала належні структурам властивості і могла використовуватися для оцінки чутливості до недосконалостей [7, 8, 9, 10], та надійності (або живучості) [11, 12, 13, 14]. Для чутливості цю матрицю було названо матрицею надмірності, а контексті живучості - матрицею деформації.

Взагалі, ця матриця з'являлася в багатьох раніше виконаних дослідженнях і отримувала там різні назви: інваріант системи 15, матриця-проектор 16, матриця впливу 17. Без спеціального найменування вона використовувалася на роботах 18, 19. Але останнім часом в англомовній науковій літературі вона фігурує як Redundancy Matrix (матриця зайвості). Вона названа так у роботі 5, у тому сенсі, що статична невизначеність пов'язана з наявністю, так званих, «зайвих» в'язів, і ця матриця відбиває їхню роль. Оскільки згадана матриця вказує на розподіл статичної невизначеності (РСН) за елементами системи, то надалі вона називатиметься РСН-матрицею.

2. Повна система розв’язувальних рівнянь

Розглядаються пружні системи, що містять деяку цілком певну кількість вузлів, до яких примикають пружні елементи. Напружено-деформований стан елементів описується скінченим набором статичних і кінематичних параметрів. Поведінка елементів системи характеризується деяким набором внутрішніх переміщень (або, якщо завгодно, деформацій) $\mathbf{\Delta}_e$ і відповідних внутрішніх зусиль $\mathbf{s}_e$. Вектори $\mathbf{\Delta}$ і $\mathbf{s}$ у випадку лінійно-пружної системи пов'язані один з одним законом стану (фізичним законом), що виражається рівною

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{F}_e \mathbf{\Delta}_e. \tag{1}$$

Внутрішні переміщення елемента $\mathbf{\Delta}_e$ пов'язані із зовнішніми для елемента переміщеннями вузлів примикання $\mathbf{u}_e$ умовами сумісності деформацій

$$\mathbf{\Delta}_e = \mathbf{Q}_e^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_e + \mathbf{d}_e, \tag{2}$$

а зусилля $\mathbf{s}_e$ задовольняють умовам рівноваги

$$\mathbf{Q}_e\mathbf{s}_e = \mathbf{p}_e, \tag{3}$$

де $\mathbf{d}_e$ і $\mathbf{p}_e$ — вектори дислокаційних (на елементах) і силових (наведених до вузлів) впливів відповідно. Те, що матриці перетворень (2) і (3) є взаємно транспонованими, випливає з принципу можливих переміщень [20].

В результаті стандартної операції асемблювання кінцевих елементів, що складають розрахункову схему, виходить повна система рівнянь, а саме:

рівняння рівноваги	$\mathbf{Qs} = \mathbf{p}$,	
геометричні рівняння	$\mathbf{\Delta} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} + \mathbf{d}$,	(4)
фізичні рівняння	$\mathbf{s} = \mathbf{F\Delta}$	

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2024. № 112

відносно невідомих зусиль s, вузлових переміщень **u** та деформацій **Δ**.

Відповідною теоретичною основою такого аналізу є стандартна лінійно-алгебраїчна теорія векторних просторів [21] — виявляється, що вся необхідна інформація міститься у чотирьох фундаментальних векторних підпросторах, пов'язаних з матрицею рівноваги **Q**.

Матриця **Q** є лінійним оператором між простором зусиль в елементах системи та простором вузлових навантажень. Теорія лінійних векторних просторів вказує, що з матрицею **Q**, що має ранг *r*, пов'язані чотири різних векторних підпростори, а саме:
у просторі стрижнів (розмірність *n*) знаходяться

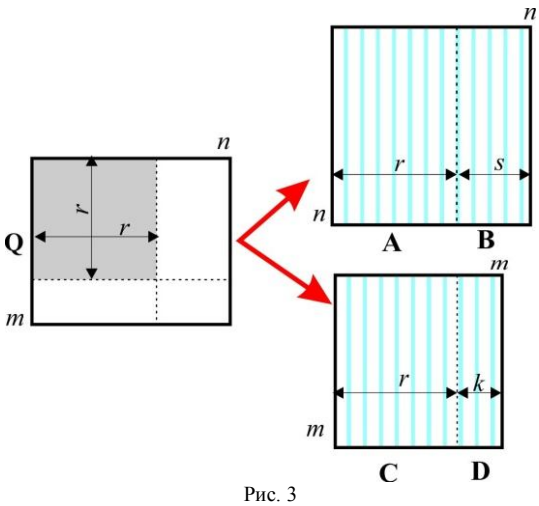


Рис. 3

• (A) підпростір рядків **Q** з розмірністю *r*,
• (B) нуль-підпростір **Q** з розмірністю *s=n-r*;
у просторі вузлів (розмірність *m*) знаходяться
• (C) підпростір стовпців **Q** з розмірністю *r*,
• (D) ліве нуль-підпростір **Q** з розмірністю *k=m-r*.

Схематично всі ці підпростори показані на рис. 3.

Підпростори A і B, як і підпростори З і D ортогональні, тобто, скалярні твори відповідних векторів дорівнюють нулю: $\mathbf{v}_A^T\mathbf{v}_B = 0,\ \mathbf{v}_C^T\mathbf{v}_D = 0.$

Для матриці рівнянь рівноваги **Q** детальний аналіз, розвинений у роботах С. Пеллегріно та К. Калладіна [22, 23, 24], дає глибоке розуміння механічної поведінки стрижневих систем. Зокрема, механічна інтерпретація зазначених вище підпросторів матриці **Q** та матриці $\mathbf{Q}^T$ (опис у дужках) вказує на такі статико-кінематичні характеристики для векторів, що належать цим підпросторам:

A – зусилля, що відповідають вузловим навантаженням (переміщення викликані деформуванням елементів);

B – зусилля, що врівноважують нульові навантаження – самонапруги (переміщення, що не створюють деформацій – механізми);

C – рівноважні навантаження (переміщення викликані деформаціями);

D – Нерівноважні навантаження (переміщення як механізму).

Якщо встановлено ранг r матриці **Q**, що має *m* рядків і *n* стовпців, можна визначити число *s=n-r* лінійно незалежних ненульових рішень однорідної системи рівнянь **Qs=0** (ступінь статичної невизначеності) і кількість *k=m-r* лінійно незалежних ненульових рішень системи рівнянь $\mathbf{Q}^T\mathbf{u}=\mathbf{0}$ (ступінь змінності).

Ці параметри визначають класифікацію статико-кінематичних властивостей системи, як показано у таблиці 1.

Таблиця 1

Тип	Параметри	Система
I	*s*=0, *k*=0	Статично визначна та кінематично визначальна
II	*s*=0, *k*>0	Статично визначальна і кінематично невизначена
III	*s*>0, *k*=0	Статично визначальна і кінематично невизначена
IV	*s*>0, *k*>0	Статично невизначена та кінематично невизначена

Отже, першим кроком у механічному аналізі будь-якого даного каркасу є визначення значень як *s* і *k*. Важливо, як визначає значення *s* і *k*, але й з'ясувати статичні деталі всіх можливих станів самонапруги і кінематичні деталі можливих механізмів.

1. РСН-матриця

Якщо, як це прийнято в методі переміщень, як основні невідомі визначити вузлові переміщення **u**, то, виключаючи з (4) вектори **s** і **Δ**, легко отримати

$$\mathbf{QFQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{QFd}. \qquad (5)$$

Припускаючи, що матриця жорсткості системи

$$\mathbf{K} = \mathbf{QFQ}^{\mathrm{T}} \qquad (6)$$

є невиродженою, що гарантується в тому випадку, коли ранг r матриці **Q** дорівнює числу її рядків m (а це відповідає випадку геометрично незмінної системи, k=0), отримуємо

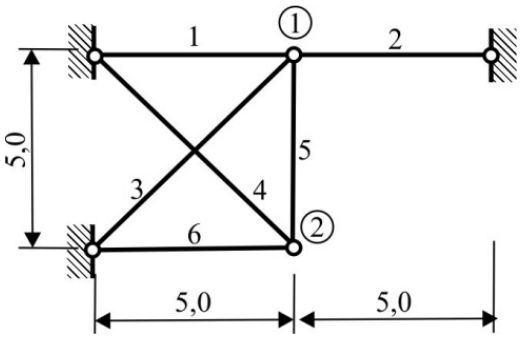


Рис. 4

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{QFd}). \qquad (7)$$

Зусилля в елементах вираховуються як

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} + \mathbf{d}) = \mathbf{FQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p} + (\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{Fd}, \qquad (8)$$

а за відсутності зовнішнього навантаження (**p**=**0**) маємо

$$\mathbf{s} = (\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{Fd} = (\mathrm{I} - \mathbf{M})\mathbf{Fd} = \mathbf{\Lambda Fd}. \qquad (9)$$

Тут через **Λ** позначено РСН-матрицю

$$\mathbf{\Lambda}=(\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}),\ \ \mathbf{M}=(\mathbf{FQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}). \qquad (10)$$

Як приклад, розглянемо систему, схема якої представлена на рис. 4, властивості жорсткості характеризуються матрицею

$$\mathbf{F}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}200 & 200 & 70{,}7 & 70{,}7 & 200 & 200\end{bmatrix}.$$

Система двічі статично невизначена, її матриця рівнянь рівноваги має вигляд:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -0{,}70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}70711 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}70711 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}70711 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обчислення за формулою (10) дають наступну РСН-матрицю:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix} 0{,}5181 & 0{,}4819 & -0{,}1448 & -0{,}1448 & 0{,}0362 & 0{,}0362 \\ 0{,}4819 & 0{,}5181 & 0{,}1448 & 0{,}1448 & -0{,}0362 & -0{,}0362 \\ -0{,}0512 & 0{,}0512 & 0{,}4095 & 0{,}4095 & -0{,}1024 & -0{,}1024 \\ -0{,}0512 & 0{,}0512 & 0{,}4095 & 0{,}4095 & -0{,}1024 & -0{,}1024 \\ 0{,}0362 & -0{,}0362 & -0{,}2896 & -0{,}2896 & 0{,}0724 & 0{,}0724 \\ 0{,}0362 & -0{,}0362 & -0{,}2896 & -0{,}2896 & 0{,}0724 & 0{,}0724 \end{bmatrix}.$$

Обчисливши для контролю слід матриці **Λ**, отримаємо $tr\mathbf{\Lambda}$=2, що збігається зі ступенем статичної невизначеності системи.

Зауважимо, що у разі статично визначеної системи має виконуватися рівність **Λ**=**I**, оскільки у такій системі початкове подовження будь-якого стрижня не створює жодних зусиль. Отже, дослідження властивостей матриці $\mathbf{\Lambda}= \mathbf{I}-\mathbf{FQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}$ має сенс лише для систем, ступінь статичної невизначеності яких $s > 0$.

Коли нас цікавлять лише статико-кінематичні властивості системи, які не залежать від параметрів жорсткосьі, можна покласти **F**=**I** та аналізувати інший варіант РСН-матриці

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{Q}, \qquad (11)$$

в якому відсутні параметри жорсткості стрижнів.

Якщо в розглянутому вище прикладі прийняти $\mathbf{F}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, то РСН-матриця стане рівною

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2024. № 112

$$\mathbf{\Lambda}^{*}=\begin{bmatrix} 0,5385 & 0,4615 & -0,1088 & -0,1088 & 0,0769 & 0,0769 \\ 0,4615 & 0,5385 & 0,1088 & 0,1088 & -0,0769 & -0,0769 \\ -0,1088 & 0,1088 & 0,3077 & 0,3077 & -0,2176 & -0,2176 \\ -0,1088 & 0,1088 & 0,3077 & 0,3077 & -0,2176 & -0,2176 \\ 0,0769 & -0,0769 & -0,2176 & -0,2176 & 0,1538 & 0,1538 \\ 0,0769 & -0,0769 & -0,2176 & -0,2176 & 0,1538 & 0,1538 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\mathbf{\Lambda}^{*}=$ Z і незважаючи на те, що значення діагональних членів матриці **Z** відмінні від діагональних членів $\mathbf{\Lambda}$, їхнє розташування в порядку зростання, що характеризує ієрархію важливості елементів, залишилися незмінними.

Відомо, що с матрицею повного рангу **Q** пов'язана матриця-проектор, точно збігається з **Z**, яка переводить будь-який вектор $\mathbf{d}_0$ у вектор $\mathbf{s}_0=\mathbf{Z}\mathbf{d}_0$, що належить ядру матриці **Q**, тобто. що відповідає однорідним рівнянням $\mathbf{Qs}=\mathbf{0}$.

Матриці Z і Λ мають такі властивості:

a. Вони є ідемпотентними, тобто $\mathbf{Z}^2=\mathbf{Z}$ та $\mathbf{\Lambda}^2=\mathbf{\Lambda}$;

b. Слід **Z** та слід $\mathbf{\Lambda}$ дорівнює ступеню статичної невизначеності системи, тобто $tr\mathbf{Z}=tr\mathbf{\Lambda}=s$;

c. Власні значення Z і Λ дорівнюють 0 або 1, причому $\lambda_1=1,\ldots, \lambda_s=1, \lambda_{s+1}=0,\ldots, \lambda_n=0$, а їх ранг дорівнює сліду, тобто ступеня статичної невизначеності *s*;

d. Якщо діагональний елемент цих матриць доівнює нулю, то дорівнюють нулю і всі елементи відповідного стовпця і рядка.

Всі ці якості визначають матрицю проектування [21 (стр. 140)].

Оскільки сума діагональних членів матриці **Z** дорівнює ступеню статичної невизначеності, можна вважати, що компонент ρ_{ii} (РСН-коефіцієнт) вказує на ступінь участі *i*-го елемента у формуванні статичної невизначеності системи.

Взагалі кажучи, що менше значення РСН-коэффициента, то важливіше присутність відповідного елемента з метою забезпечення незмінності. Якщо значення дорівнює 0 то відповідний елемент є безумовно необхідним. Навпаки, якщо його значення дорівнює одиниці, то відповідний елемент не впливає на поведінку інших елементів та його видалення із системи, зменшуючи на одиницю ступінь статичної невизначеності, ніяк не позначається на незмінності.

Для елементів конструкції, що є безумовно необхідними, тобто. таких, що їх видалення з системи веде до втрати геометричної незмінності [25], створення з їх допомогою зусиль попередньої напруги неможливе при будь-якому обуренні $\mathbf{d}_0$. Але це означає, що в матриці **Z** (і, відповідно, в $\mathbf{\Lambda}$) такому елементу повинні відповідати стовпець і рядок, всі компоненти яких складаються тільки з нулів. Зауважимо, що досить перевірити на збіг з нулем лише діагональний елемент РСН-матриці (див. властивість «d»).

Справедливе і зворотне твердження - умовно необхідному елементу (на відміну від абсолютно необхідного, умовно необхідний елемент можна видалити з системи без втрати нею геометричної незмінності) в РСН-матриці відповідають рядки і стовпці, в яких обов'язково є ненульові елементи, і при цьому на головній діагоналі є ненульова компонента.

Недіагональні елементи в *i*-м стовпці РСН-матриці є індикатором впливу початкового подовження в елементі *i* на навколишню структуру. Кількість ненульових записів у цьому стовпці вказує кількість порушених елементів, а значення є індикатором величини зусиль, що виникають.

Таким чином, значення компонентів РСН-матриці є кількісними оцінками, що демонструють, яким чином і через які елементи реалізується статична невизначеність системи.

2. Випадок системи, що змінюється

Хоча більшість інженерних споруд є геометрично незмінними системами, системи, що змінюються, не є рідкістю і застосовуються в будівництві, наприклад, у вигляді вантових покриттів. Ці структури відносяться до типу четвертої категорії, тобто до статично і кінематично невизначених систем, їх матриця жорсткості $\mathbf{K}=\mathbf{QFQ}^{\mathrm{T}}$ не є оборотною, тому сказане вище безпосередньо до них застосувати не можна.

На цікаву можливість вирішення зазначеної проблеми вказав Г. Тіберт [7], який скористався тим, що повний комплект лінійно незалежних розв'язків однорідних рівнянь рівноваги **Qs=0** та рівнянь спільності деформацій $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}=\mathbf{0}$ визначається розкладанням за сингулярними числами [21, 26]. Для аналізу статико-кінематичних властивостей стрижневих систем це розкладання було запропоновано у роботі Пеллегріно та Калладін [27].

Сингулярним розкладанням (Singular Values Decomposition, SVD) матриці Q порядку $m\times n$ є розкладання наступного виду (рис. 3)

$$\mathbf{Q}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

де $\mathbf{\Sigma}$ - матриця розміру $m\times n$ з невід'ємними елементами, яка має елементи, що лежать на головній діагоналі - це сингулярні числа (і всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, є нульовими), а квадратні матриці **U** (порядку m) і **V** (порядку n) - це дві матриці, що складаються з лівих та правих сингулярних векторів відповідно:

- ліві сингулярні вектори матриці **Q** — власні вектори матриці $\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}}$;
- праві сингулярні вектори матриці **Q** це власні вектори матриці $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$;
- власні числа матриць $\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}}$ і $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$, що не дорівнюють нулю, збігаються і дорівнюють квадратам сингулярних чисел $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$.

Матриці **U** та **V** ортогональний, тобто. $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}=\mathbf{I}$ та $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}=\mathbf{I}$, їх стовпці u та v підкоряються умовам

$$\mathbf{Q}\mathbf{v}_i=\begin{cases}\sigma_{ii}\mathbf{u}_i & i=1,\ldots,r\\ 0 & i=r+1,\ldots,n\end{cases},\quad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i=\begin{cases}\sigma_{ii}\mathbf{v}_i & i=1,\ldots,r\\ 0 & i=r+1,\ldots,m\end{cases}. \tag{13}$$

Зручно згрупувати лівий і правий сингулярні вектори відповідно до наступних підматриць:

$$\mathbf{U}_r=\left[\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r\right],\ \mathbf{U}_{m-r}=\left[\mathbf{u}_{r+1},\ldots,\mathbf{u}_m\right],\quad \mathbf{V}_r=\left[\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\right],\ \mathbf{V}_{m-r}=\left[\mathbf{v}_{r+1},\ldots,\mathbf{v}_n\right]. \tag{14}$$

Графічна ілюстрація сингулярного розкладання матриці Q представлена рис. 5.

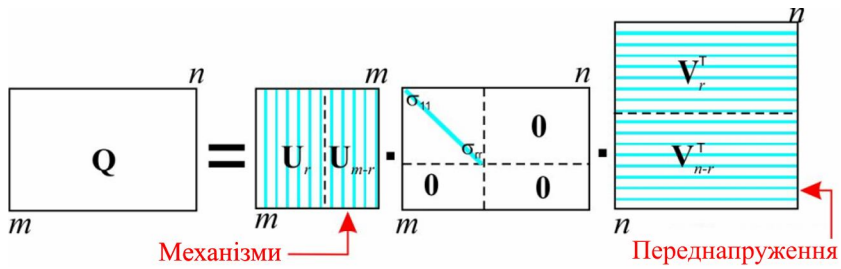


Рис. 5

Обчислювальна реалізація SVD-декомпозиції полягає в визначенні власних значень матриць $\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}}$ і $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$. Для цього вирішуються дві допоміжні задачі, перша з яких стосується знаходження власних значень та власних векторів симетризованої матриці рівнянь рівноваги (8):

$$(\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}}-\mu\mathbf{I})\mathbf{v}=0. \tag{15}$$

В результаті рішення обчислюються пари власне число та відповідний йому власний вектор

$$\mu_1\mathbf{u}_1,\ \mu_2\mathbf{u}_2,\ldots,\ \mu_m\mathbf{u}_{\mathrm{m}}. \tag{16}$$

Всі рішення задачі (14) можна подати у вигляді:

$$\mathbf{QQ}^{\mathrm{T}}=\mathbf{UMU}^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

де власні значення та нормовані власні вектори згруповані в матриці:

$$\mathbf{M}=\mathrm{diag}[\mu_1,\ \mu_2,\ldots,\ \mu_m], \tag{18}$$

$$\mathbf{U}=[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2,\ldots\mathbf{u}_m]. \tag{19}$$

Власні значення, згруповані в матриці (18), дорівнюють квадратам діагональних членів матриці **V**, вони невід'ємні, а можливе нульове власне значення відповідає існування ненульового рішення однорідної системи рівнянь рівноваги, тобто. самоурівноваженій системі зусиль попереднього напруження. Ці зусилля з точністю до множника представлені у власному векторі, що відповідає нульовому власному значенню.

Аналогічною є задача

$$(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}, \tag{20}$$

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2024. № 112

рішення якої представляється матрицями

$$\mathbf{L} = \mathrm{diag}[\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n], \tag{21}$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n]. \tag{22}$$

Власні значення, згруповані в матриці (21), невід'ємні, можливе нульове власне значення відповідає існуванню ненульового рішення однорідної системи рівнянь спільності деформацій, тобто. існуванню механізму. Форму такого механізму (рухів елементів як системи твердих тіл) можна знайти у власному векторі, що відповідає нульовому власному значенню.

Можна помітити, що вираз $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ можна розглядати як матрицю симетризованих рівнянь рівноваги (1) з невід'ємними власними значеннями. Нульові власні значення пов'язані із самоурівноваженими зусиллями, що задовольняють однорідним рівнянням рівноваги. Попереднє напруження. можна розглядати як власний вектор, що пов'язаний з нульовим власним значенням.

Аналогічно, вираз $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ можна розглядати як конкретну форму лінійної матриці жорсткості (6) з одиничною матрицею пружності $\mathbf{F}=\mathbf{I}$. Власні значення невід'ємні. Нульові власні значення пов'язані з нескінченно малими механізмами (рухами твердого тіла), які можна розглядати як власний вектор, що відповідає нульовим власним значенням.

Вибудовуючи стовпці $\mathbf{U}$ і $\mathbf{V}$ у порядку зменшення своїх значень, ці матриці можна розділити на дві підматриці:

$$\mathbf{U}=[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r|\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m] = [\mathbf{U}_r|\ \mathbf{M}],$$

$$\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r|\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{V}_r|\mathbf{L}], \tag{23}$$

де підматриця $\mathbf{L}$ містить основні базисні вектори для режимів самонапруження, і $s=n-r$ - сумарний ступінь статичної невизначеності а підматриця $\mathbf{M}$ містить базисні вектори механізмів, і $k=m-r$ - сумарний ступінь кінематичної невизначеності.

Для наведеного вище прикладу власні значення матриць $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ і $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ відповідно:

$$\mathbf{L} = \mathrm{diag}\left[2{,}9124 \quad 2{,}3001 \quad 1{,}4526 \quad 0{,}3339 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000\right];$$

$$\mathbf{M} = \mathrm{diag}\left[2{,}9124 \quad 2{,}3001 \quad 1{,}4526 \quad 0{,}3339\right].$$

У $\mathbf{M}$ немає нульового власного значення, а це означає, що механізми не ідентифіковані, а два нульових власнихе значення $\mathbf{L}$ відповідають за існування самонапружених станів (рис. 6):

$$\mathbf{u}_5 = \left[0{,}2132 \quad -0{,}2132 \quad -0{,}6030 \quad -0{,}6030 \quad 0{,}4264 \quad 0{,}4264\right]^T,$$

$$\mathbf{u}_6 = \left[0{,}7071 \quad 0{,}7071 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000\right]^T.$$

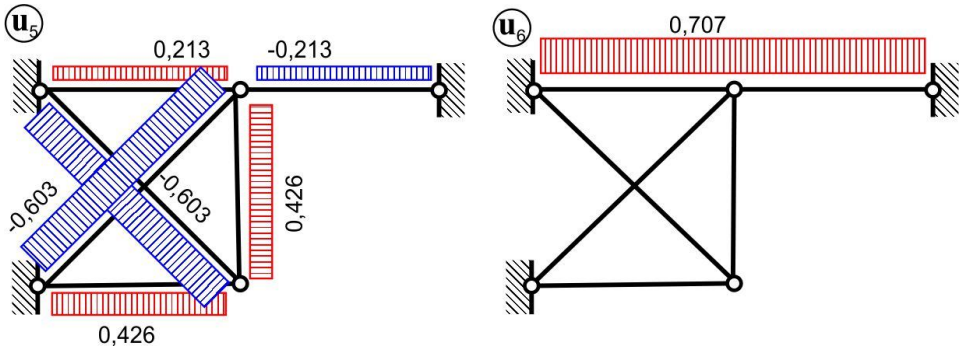


Рис. 6

Якщо в результаті подібних розрахунків визначилася підматриця самонапружнь $\mathbf{L}$, то загальний вираз для зусиль в елементах системи може бути представлений як

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q}^+\mathbf{p} + \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}, \tag{24}$$

де матриця $\mathbf{Q}^+$ означає узагальнену зворотну матрицю Q [21], а $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s]^T$ це вектор коефіцієнтів для s незалежних форм власних напружень.

Для статично невизначеної системи конкретний вектор $\boldsymbol{\alpha}$ може бути визначений набором s рівнянь сумісності (2). Оскільки деформації елементів $\boldsymbol{\Delta}$ складаються із двох ортогональних

частин, а саме. пружної деформації та дислокаційної складової [22], то за відсутності зовнішніх навантажень умову ортогональності можна записати у вигляді

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}[\mathbf{d}_0 + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}] = 0, \tag{25}$$

і тоді рішення рівнянь (25) дає

$$\boldsymbol{\alpha} = -(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{R})^{-1}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_0. \tag{26}$$

А зусилля у елементах **s**, що розглядаються тут, тобто. частина $\mathbf{s}_{e0}$, викликана початковими подовженнями, можуть бути отримані шляхом підстановки (26) у рівняння. (1). Тоді без урахування зовнішніх навантажень **p** отримаємо:

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{R}\,(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_0 = -\mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{d}_0, \tag{27}$$

де

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{R}\,(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{v})^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}. \tag{28}$$

Матриця $\boldsymbol{\Omega}$ також як і матриця $\boldsymbol{\Lambda}$ є матрицею масштабування, яка показує відношення зміни зусиль в елементах до початкових деформацій. Легко довести ідемпотентність матриці $\boldsymbol{\Omega}$, і те, що слід цієї матриці, еквівалентний її рангу, збігається зі ступенем статичної невизначеності s. Зважаючи на це діагональні елементи γ_i матриці $\boldsymbol{\Omega}$ можна інтерпретувати так само як діагональні елементи $\boldsymbol{\Lambda}$.

Для системи змінного типу, у яких матриця жорсткості **K** є виродженою, визначення $\boldsymbol{\Lambda}$ за формулою (10) не вдається, тоді як матриця $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{R}$ в рівнянні (26) завжди позитивно визначена, і ця формула застосовна як до геометрично незмінних, так і до змінних систем.

Наприклад розглянемо конструкцію подану на рис. 7, вважаючи для простоти, що всі властивості жорсткості стрижнів дорівнюють одиниці.

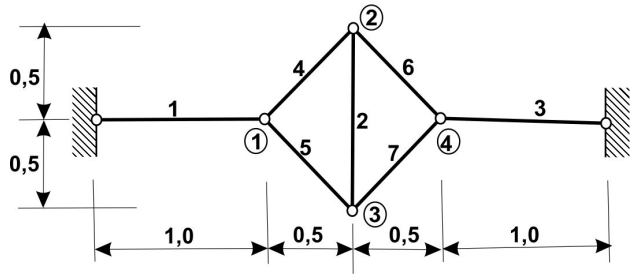


Рис. 7

Матриця коефіцієнтів рівнянь рівноваги цієї системи має вигляд

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}414 & 1{,}414 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}414 & -1{,}414 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & -1{,}414 & 0{,}000 & 1{,}414 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & -1{,}000 & 0{,}000 & -1{,}414 & 0{,}000 & -1{,}414 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & -1{,}414 & 0{,}000 & 1{,}414 \\ 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}414 & 0{,}000 & 1{,}414 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & -1{,}414 & -1{,}414 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}414 & -1{,}414 \end{bmatrix}.$$

Матриці **L** та **M** мають значення

$$\mathbf{L} = \mathrm{diag}[9{,}531\ 8{,}531\ 8\ 8\ 1{,}469\ 0{,}469\ 0\ 0];$$

$$\mathbf{M} = \mathrm{diag}[9{,}531\ 8{,}531\ 8\ 8\ 1{,}469\ 0{,}469\ 0].$$

Нульовим власним значенням **L** відповідають два механізми

$$\mathbf{v}_7 = [0\quad 0{,}707\quad 0{,}354\quad 0{,}354\quad -0{,}354\quad 0{,}354\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{v}_8 = [0\quad 0\quad -0{,}354\quad 0{,}354\quad -0{,}354\quad 0{,}354\quad 0\quad 0{,}707]^{\mathrm{T}}.$$

а нульовому власному значенню з матриці **M** відповідає вектор зусиль

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2024. № 112

$$\mathbf{u}_7=\begin{bmatrix}0{,}535 & -0{,}535 & 0{,}535 & 0{,}189 & 0{,}189 & 0{,}189 & 0{,}189\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

з якого складається матриця **R**.

Обчислення за формулою (26) дають РСН-матрицю

$$\mathbf{\Omega}=\begin{bmatrix}
0{,}286 & -0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}101\\
-0{,}286 & 0{,}286 & -0{,}286 & -0{,}101 & -0{,}101 & -0{,}101 & -0{,}101\\
0{,}286 & -0{,}286 & 0{,}286 & 0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}101\\
0{,}101 & -0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036\\
0{,}101 & -0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036\\
0{,}101 & -0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036\\
0{,}101 & -0{,}101 & 0{,}101 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036 & 0{,}036
\end{bmatrix}.$$

3. Особливості аналізу рамних конструкцій

Визначення РСН-матриці, описане в розділах 3 і 4 легко реалізується стосовно шарнірно-стрижневих конструкцій, де поведінка елементів характеризується лише одним значенням внутрішніх зусиль (подовжня сила) або деформацій (подовження). Але вже для плоских балок Ейлера-Бернуллі існує три внутрішні зусилля та три деформаційні змінні.

Можливі різні варіанти набору трьох режимів деформації. Вибір конкретного набору режимів деформації визначатиме матрицю сумісності QT та жорсткості цих режимів у матриці жорсткості F. Один із можливих варіантів показаний на рис. 8.

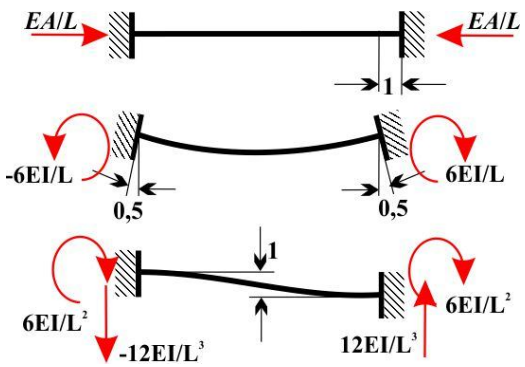


Рис. 8

У роботі [28] було запропоновано вибирати режими деформації, засновані на використанні власних векторів матриці жорсткості $\mathbf{k}_e$ окремого стрижня. Нормалізація власних векторів переноситься на власні значення шляхом поділу кожного власного значення на квадрат довжини відповідного власного вектора. Масштабовані власні значення і вихідні власні вектори також є дійсним розкладанням матриці жорсткості елемента $\mathbf{k}_e=\boldsymbol{\varphi}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}$.

Для стрижня Ейлера-Бернуллі будемо мати

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}=\begin{bmatrix}EA/L & 0 & 0\\ 0 & 3EI/L & 0\\ 0 & 0 & 3EI/L\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varphi}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2/L & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2/L & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}. \quad (29)$$

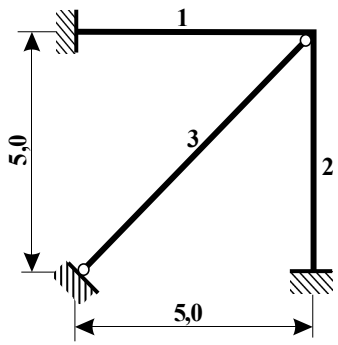


Рис. 9

Як приклад розглянемо найпростішу рамну конструкцію, представлену на рис. 9, де діагональний елемент має шарніри на обох кінцях. Усі елементи мають однаковий поперечний переріз із матрицею характеристик жорсткості $\bar{\lambda}$ =diag[100,0 1,0 1,0].

Ступінь статичної невизначеності для всієї системи дорівнює чотирьом. Рівняння рівноваги складене для єдиного вільного вузла має матрицю коефіцієнтів

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0&2&0&0&0,7071\\0&2&0&0&1&0&0,7071\\0&1&1&0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

РСН-матриця для цього прикладу має 9×9 елементів, відповідних трьом стрижням з трьома режимами деформації кожен (один режим подовження та два режими вигину). РСН-матриця, отримана за формулою (10), має вигляд:

$$\mathbf{\Lambda}=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
\mathbf{0,501} & 0,231 & -0,138 & -0,398 & 0,046 & -0,138 & -0,010 & 0 & 0\\
0,002 & \mathbf{0,706} & -0,224 & 0,005 & -0,259 & -0,224 & -0,023 & 0 & 0\\
-0,001 & -0,224 & \mathbf{0,734} & -0,003 & -0,245 & -0,266 & 0,014 & 0 & 0\\
\hdashline
-0,398 & 0,462 & -0,277 & \mathbf{0,504} & 0,092 & -0,277 & -0,020 & 0 & 0\\
0,000 & -0,259 & -0,245 & 0,001 & \mathbf{0,748} & -0,245 & -0,005 & 0 & 0\\
-0,001 & -0,224 & -0,266 & -0,003 & -0,245 & \mathbf{0,734} & 0,014 & 0 & 0\\
\hdashline
-0,007 & -1,632 & 0,979 & -0,014 & -0,326 & 0,979 & \mathbf{0,072} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}
\end{array}\right]$$

Діагональні елементи (РСН-коефіцієнти) виділені жирним шрифтом і для розрізнення стрижнів, до яких вони відносяться, введені розділові лінії. Записи останніх двох рядках і стовпцях дорівнюють нулю, оскільки елемент 3 шарнірно закріплений обох кінцях. І ранг, і слід матриці дорівнюють чотирьом, що дорівнює ступеню статичної невизначеності.

Сумарний показник зайвості елемента дорівнює сумі діагональних членів матриці $\mathbf{\Lambda}$. Через наявність у кожному рамному елементі трьох силових механізмів (подовження, зсув і вигин) надмірність такого елемента може досягати трьох, у той час як для шарнірно-стрижневих систем надмірність елемента не перевищує одиницю.

У режимах вигину та зсуву діагональ не бере участі, оскільки вона захищена від вигину шарнірами. Однак, діагональний елемент має центральне значення для конструкції. Його видалення вплине на несучу здатність конструкції. Це відповідає тому, що він має найменшу сумарну зайвість.

4. Оцінка конструктивної безпеки

На основі РСН-матриці ми можемо додатково вивчити деякі проблеми, пов'язані із конструктивною безпекою (живучістю) споруд. Кожен РСН-коефіцієнт відбиває важливість відповідного елемента її забезпеченні.

Взагалі кажучи, важливість елемента конструкції визначається як схемою конструкції, так і станом навантаження, і вихід з ладу будь-якого елемента вплине на структурну систему шляхом зміни траєкторії провідності сили і викличе перерозподіл компонентів резервування. Відповідно до сучасної концепції живучості, яка виходить з того, що відмова будь-якого елемента можлива і з невідомих причин, оцінку живучості можна виконувати і без урахування навантажень, що діють на систему. Хоча слід пам'ятати, що отримані в такий спосіб результати придатні лише порівняння поведінки різних систем, припущення, що ефекти навантаження ідентичні.

РСН-матриця використовувалася стосовно аналізу завдань забезпечення конструктивної безпеки в роботах [2, 16, 32, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Зазначалося, що ступінь статичної невизначеності оцінює лише загальну структуру системи, і що високий ступінь статичної невизначеності не означає більш безпечну структуру.

Проте сама собою статична невизначеність неспроможна надати інформацію про резерви системи у разі втрати. Необхідно знати, де в системі є резерви, а де не можна допустити пошкодження через відсутність альтернативних шляхів навантаження. Аналіз усього ряду DSI-коефіцієнтів інтуїтивно представляється досконалішою метрикою безпеки системи.

У цьому корисно пронормувати значення РСН-коэффициентов вважаючи що їхня сума дорівнює s. Тоді для порівняння РСН-коэффициентів між собою використовуються величини $c_i=(\rho_{ii}/s)$ сума яких дорівнює одиниці. І якщо говорити про оцінку живучості конструкції в

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2024. № 112

цілому, то як обережний захід можна вжити мінімального значення $\nu = \min_i(c_i)$. Тоді наявність у системі абсолютно необхідних елементів говорить про нульову живучість системи, яку можна зруйнувати шляхом вилучення такого елемента.

Можливий альтернативний підхід, заснований на гіпотезі, що найкращої точки зору живучості буде система, яка має всі елементи рівновідповідальні і однаково забезпечують живучість. Такий випадок буде реалізований, якщо всі мають значення 1/s. Тоді як міру живучості системи можна прийняти середньоквадратичний розкид їх значень:

$$C_R = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(c_i - \frac{1}{s}\right)^2}. \tag{30}$$

Ще в роботі [16] було показано, що при видаленні того чи іншого елемента (наприклад, *k*-го) нова РСН-матриця $\mathbf{\Lambda}^*$ може бути отримана, якщо над матрицею $\mathbf{\Lambda}=[\lambda_{ij}]$ виконати крок жорданових виключень з розв'язувальним елементом λ_{kk}. Тоді

$$\lambda_{ij}^* = \lambda_{ij} - \lambda_{is}\lambda_{kj} / \lambda_{kk}, \tag{31}$$

і нові значення λ_{ij}^* показують, якою стала роль відповідних елементів у системі, позбавленої *k*-го стрижня.

Як приклад, розглянемо систему, схема якої представлена на рис. 10 і будемо для простоти вважати всі її жорсткі параметри одиничними. Система тричі статично невизначена, і її РСН-матриця має вигляд

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0{,}313} & 0{,}091 & -0{,}239 & -0{,}082 & 0{,}203 & 0{,}046 & -0{,}269 & 0{,}083 & 0{,}143 \\
0{,}091 & \mathbf{0{,}313} & -0{,}082 & -0{,}239 & 0{,}046 & 0{,}203 & 0{,}083 & -0{,}269 & 0{,}143 \\
-0{,}239 & -0{,}082 & \mathbf{0{,}371} & 0{,}260 & 0{,}033 & 0{,}144 & 0{,}058 & -0{,}190 & -0{,}202 \\
-0{,}082 & -0{,}239 & 0{,}260 & \mathbf{0{,}371} & 0{,}144 & 0{,}033 & -0{,}190 & 0{,}058 & -0{,}202 \\
0{,}203 & 0{,}046 & 0{,}033 & 0{,}144 & \mathbf{0{,}320} & 0{,}209 & -0{,}321 & -0{,}073 & 0{,}000 \\
0{,}046 & 0{,}203 & 0{,}144 & 0{,}033 & 0{,}209 & \mathbf{0{,}320} & -0{,}073 & -0{,}321 & 0{,}000 \\
-0{,}269 & 0{,}083 & 0{,}058 & -0{,}190 & -0{,}321 & -0{,}073 & \mathbf{0{,}425} & -0{,}131 & 0{,}000 \\
0{,}083 & -0{,}269 & -0{,}190 & 0{,}058 & -0{,}073 & -0{,}321 & -0{,}131 & \mathbf{0{,}425} & 0{,}000 \\
0{,}143 & 0{,}143 & -0{,}202 & -0{,}202 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & \mathbf{0{,}143}
\end{bmatrix}.$$

Для прикладу за рис. 10 крок жорданових виключень з розв'язувальним елементом λ_{99} (видалення 9-го стрижня) дає новий проектор

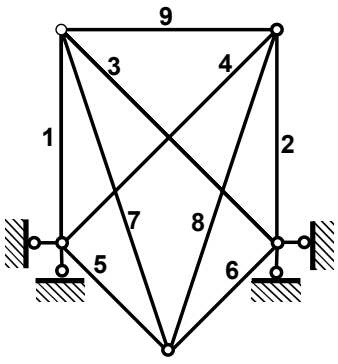


Рис. 10

$$\mathbf{\Lambda}^* = \begin{bmatrix}
\mathbf{0{,}170} & -0{,}052 & -0{,}037 & 0{,}12 & 0{,}203 & 0{,}046 & -0{,}269 & 0{,}083 \\
-0{,}052 & \mathbf{0{,}170} & 0{,}12 & -0{,}037 & 0{,}046 & 0{,}203 & 0{,}083 & -0{,}269 \\
-0{,}037 & 0{,}120 & \mathbf{0{,}086} & -0{,}025 & 0{,}033 & 0{,}144 & 0{,}058 & -0{,}19 \\
0{,}120 & -0{,}037 & -0{,}025 & \mathbf{0{,}086} & 0{,}144 & 0{,}033 & -0{,}19 & 0{,}058 \\
0{,}203 & 0{,}046 & 0{,}033 & 0{,}144 & \mathbf{0{,}320} & 0{,}209 & -0{,}321 & -0{,}073 \\
0{,}046 & 0{,}203 & 0{,}144 & 0{,}033 & 0{,}209 & \mathbf{0{,}320} & -0{,}073 & -0{,}321 \\
-0{,}269 & 0{,}083 & 0{,}058 & -0{,}19 & -0{,}321 & -0{,}073 & \mathbf{0{,}425} & -0{,}131 \\
0{,}083 & -0{,}269 & -0{,}19 & 0{,}058 & -0{,}073 & -0{,}321 & -0{,}131 & \mathbf{0{,}425}
\end{bmatrix},$$

з якого видно, наскільки в перетвореній системі зросла роль 3-го і 4-го стрижня, у котрих РСН-коефіцієнти зменшилися вчетверо.

Використовуючи методи аналізу надмірності, проектувальник може ефективно перевірити розподіл надлишковості для різних варіантів конструкції, а потім вибрати найбільш підходяще рішення.

Характерний приклад аналізу несучої конструкції висотної будівлі наведений у роботі [29]. Вихідна конструкція показано на рис. 11 (ліворуч) і складається з жорсткого рамного ядра і прикріплених до нього статично визначним чином системи ригелів та колон. Структура має ступінь статичної невизначеності *s*=30, значення РСН-коефіцієнтів показано на наступній схемі.

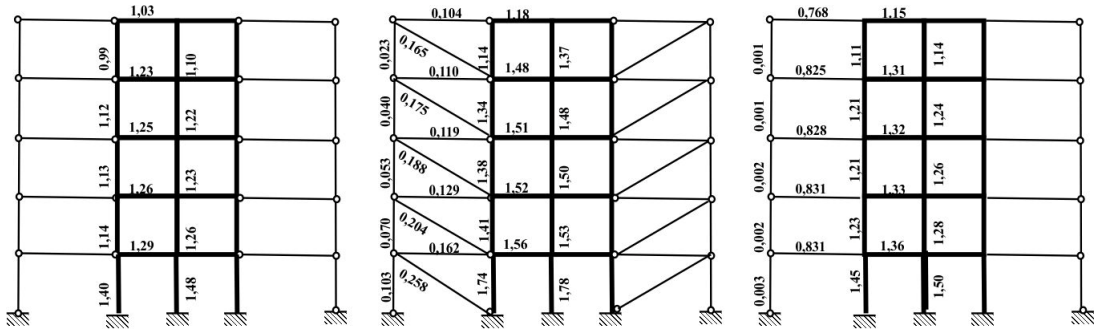


Рис. 11

Прибудована до ядра частина системи має нульову зайвість . Вихід з ладу розташованої там колони призводить до руйнування всіх вищерозташованих поверхів. Щоб уникнути такої катастрофічної відмови, прийнято рішення збільшити зайвість, для чого зіставляються два варіанти конструктивного рішення:

• зайвість систем ригелі-колони збільшується за рахунок додавання діагональних елементів, як показано на рис. 4 у середині.

• жорстке приєднання ригеля до ядра та колони, як і раніше, шарнірно прикріплені до ригелів.

Очевидно, що діагональні зв'язки роблять системи ригелі-колони статично невизначеними, але все ж зайвість у цій частині конструкції значно нижча, ніж в елементах ядра. У другому варіанті всі елементи системи мають ненульову зайвість. Однак у порівнянні з першим варіантом зайвість стійок дуже мала. Приклад свідчить про можливість перевірки розподілу зайвості багатьох інших варіантів конструкції, щоб спроектувати надійну структуру.

5. Інші застосування РСН-матриці

(1). РСН-матриця може використовуватися в багатьох додатках, найчастіше при оцінках живучості та кількісної оцінки чутливості до недосконалостей. Але одне з перших її застосувань було пов'язане з оцінкою впливу змін жорсткості на розподіл зусиль у статично невизначеній шарнірно-стрижневій системі [15].

Для такої системи матриці **d** і **F** діагональні, і в припущенні дещо невеликої зміни відносної жорсткості $\delta\mathbf{f}=(\delta\mathbf{F}/\mathbf{F})$ була отримана формула, що безпосередньо випливає з рівняння (9)

$$\delta\mathbf{s}= \mathbf{\Lambda d}\cdot\delta\mathbf{f}. \tag{28}$$

Норма $\|\mathbf{\Lambda}\|=1$ тому для вектора зміни зусиль норма $\|\delta\mathbf{s}\|= \|\mathbf{d}\cdot\delta\mathbf{f}\|$. У роботі [15] ця оцінка була покращена за рахунок того, що вектор $\delta\mathbf{f}$ був зменшений шляхом віднімання вектора $\delta\mathbf{f}_0=\alpha\mathbf{f}$, який відповідає пропорційній зміні всіх жорсткостей і, отже, не впливає на картину зміни зусиль ($\mathbf{\Lambda d}\cdot\delta\mathbf{f}_0=0$).

(2). У роботах [11] і 31 розглядалося питання про врахування індивідуальних вкладів елементів у можливість відмови системи. Пропонувалась оцінка надійності, в якій поєднується показники надійності β_i та ступеня зайвості λ_{ii} компонентів системи.

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}\left[1-\Phi(-\beta_i)\right]}{\sum_{i=1}^{n}\left(1-\lambda_{ii}\right)}, \tag{29}$$

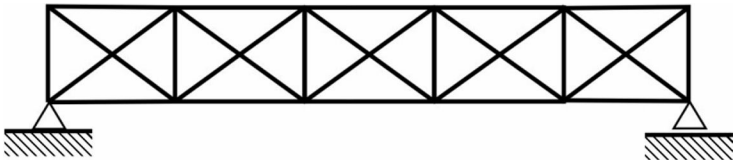
де $\Phi(-\beta_i)$ виражає можливість відмови елемента.

У випадку високонадійних елементів (наприклад, при всіх $\beta_i > 4$) можна вважати і замість (29) мати

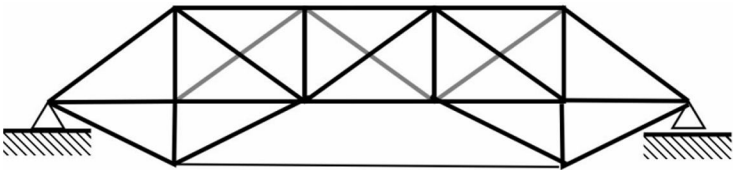
$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}}{\sum_{i=1}^{n}\left(1-\lambda_{ii}\right)} = \frac{s}{n-s}, \tag{30}$$

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2024. № 112

що повертає нас до оцінок впливу безвідмовність системи за рівнем її статичної невизначеності. Ця оцінка може бути використана при зіставленні конкуруючих схем, наприклад показаних на рис. 12.



(а)



(б)

Рис. 12

Так, для схеми «а» за рис. 12 ми маємо n=26, s=5 $\rho = 5/21=0{,}238$, а схеми «б» n=27, s=6, $\rho = 6/21=0{,}286$.

(3). Елементи РСН-матриці є прямим вимірником чутливості конструкції до недосконалостей окремих елементів. Невелике діагональне значення в РСН-матриці вказує на те, що недосконаліть виготовлення цього елемента призведе лише до невеликих обмежень і, отже, тільки невеликих монтажних зусиль у конструкції.

Ерікссон і Тіберт 33 використовували цю ідею для вивчення чутливості до виробничих дефектів антени з вантовою фермою. Вони вказали на те, що якщо у матриці надмірності РСН-коефіцієнт одного елемента більше, ніж у іншого, цей елемент більш чутливий до введення початкових подовжень. Це вказує на новий спосіб визначення того, наскільки точно повинна бути виготовлена конструктивний елемент, в якій більше значення РСН-коефіцієнта призводить до більш високих вимог до його точності. На роботі 9 зайвість як розподілена статична невизначеність використовується з метою оцінки чутливості до недосконалостей під час виробництва текстильних мембран і надувних конструкцій, представлених сітчастими системами.

Для шарнірно-стрижневої системи, наприклад, стрижні якої виготовлені неточно і помилки в довжинах стрижнів можна представити вектором $\mathbf{\Delta}_\mathrm{L}$, значення внутрішніх зусиль, які утворюються при примусовому замиканні всіх зазорів, що виникають за рахунок зазначених помилок

$$\mathbf{\Delta s} = \mathbf{\Lambda F \Delta}_\mathrm{L}. \tag{31}$$

У разі коли помилки Δ_L у довжинах елементів є випадковими, будемо вважати, що їх значення розподілені за нормальним законом, і вектор математичних очікувань $\overline{\mathbf{\Delta}}_L$ та матриця других моментів $\mathbf{K}_\mathbf{\Delta}$ відомі.

З лінійності співвідношення (31) випливає, що і зусилля $\mathbf{\Delta s}$ є нормально розподіленими випадковими величинами, математичні очікування та матриця других моментів яких визначаються такими виразами:

$$\overline{\mathbf{s}} = \mathbf{\Lambda F}\overline{\mathbf{\Delta}}_L, \;\; \mathbf{K_s} = \mathbf{\Lambda F K_\Delta (\Lambda F)}^\mathrm{T} = \mathbf{\Lambda F K_\Delta F}^\mathrm{T}\mathbf{\Lambda}^\mathrm{T}. \tag{32}$$

Випадкові відхилення довжин стрижнів зазвичай є центрованими випадковими величинами (їх математичні очікування дорівнюють нулю) і при цьому можуть бути некорельованими або корельованими. Випадок корельованих значень помилок досліджувався в роботі 34 де було показано, що кореляція зменшує дисперсію випадкових зусиль, і надано рекомендацію для практичних розрахунків використовувати некорельовані значення помилок, що йде в запас

міцності. Тоді матриця других моментів $\mathbf{K}_{\Delta}$ є діагональною і її компонентами є дисперсії випадкових відхилень.

У шарнірно-стрижневій системі матриця **F** діагональна, і випадковими вважатимуться не абсолютні значення відхилень у довжині елементів , а відносні величини $e = \Delta l_i / l_i$. З урахуванням того, що тоді РСН-матриця Λ нільпотентна отримуємо

$$\mathbf{K_s} = \mathbf{\Lambda C \Lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C \Lambda \Lambda}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C \Lambda}, \tag{33}$$

де **C** є діагональною матрицею з елементами EAe_i.

6. Короткі висновки

Ступінь статичної невизначеності як фундаментальний показник несучої здатності є властивістю структурної системи. Однак це однина не описує його розподіл у системі (РСН). Розглядається матриця, що надає інформацію про розподіл статичної невизначеності в системі і дозволяє виконувати вичерпний статико-кінематичний аналіз.

Описано математичні властивості РСН-матриці та її механічну інтерпретацію. Дослідження ґрунтується на використанні фундаментальних положень лінійної алгебри, за допомогою яких досліджується матриця **Q** коефіцієнтів системи лінійних рівнянь рівноваги. У тому числі розглянуто випадок неповного рангу **Q** (змінна система), коли для аналізу застосовується її сингулярне розкладання. Викладки мають теоретичний характер, проблема їх чисельної реалізації заслуговує на самостійний розгляд.

Наведено відомості про можливість використання РСН-матриці для оцінки надійності та живучості конструктивного комплексу та її використання для аналізу чутливості системи до неточності виготовлення елементів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kanno Y., Ben-Haim Y.* Redundancy and robustness, or when is redundancy redundant? // Journal of Structural Engineering, 2011, 137 — P. 935–945.
2. *Frangopol D.M., Curley J.P.* Effects of damage and redundancy on structural reliability // Journal of Structural Engineering, 1987, 113, 1533–1549.
3. *Pandey, P.C., Barai S.V.* Structural sensitivity as a measure of redundancy // Journal of Structural Engineering, 1997, 123 — P. 360–364.
4. *Linkwitz K.* Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme. Dissertation, Universitdt Stuttgart, Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C: Dissertationen Heft Nr. 46 — Munchen: Beck Verlag, 1961.
5. *Bahndorf J.* Zur Systematisierung der Seilnetzberechnung und zur Optimierung von Seilnetzen.Dissertation, Universitdt Stuttgart, Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C: Dissertationen Heft Nr. 373 — Munchen: Beck Verlag, 1991.
6. *Ströbel D.* Die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf elastomechanische Systeme.Dissertation, Universitdt Stuttgart, Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C: Dissertationen Heft Nr. 478 — Munchen: Beck Verlag, 1995.
7. *Tibert A.G.* Distributed indeterminacy in frameworksм // Proceedings of the 5th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures , 2005, Salzburg, Austria.
8. *Tibert A.G.* Flexibility evaluation of prestressed kinematically indeterminate frameworks — The 18th Nordic Seminar on Computational Mechanics, 2005, Helsinki, Finland.
9. *Ströbel D., Singer P.* Recent developments in the computational modelling of textile membranes and inflatable structures // Oñate E., Kröplin B. (Eds.), Textile Composites and Inflatable Structures II — Springer Netherlands, 2008 — P. 253-266. [doi:10.1007/978-1-4020-6856-0_14].
10. *Jiang M., Kou X.J., Li Z.M.* The redundancy matrix of rigid-frame structure and its application // Journal of Donghua University, 2012, 29 — P. 107-110.
11. *Kou X.J., Chen Q., Song J.* Reliability estimation involving indirect load effects // Proceeding of the 4th Asian-Pacific Symposium, 2008, Hong Kong— P. 137-140.
12. Chen Q., Kou X.J., Zhang Y. Internal force and de□formation matrixes and their applications in load path // Journal of Zhejiang University- Science A (Applied Physics & Engineering), 2010, 11(8) — P. 563-570. [doi:10.1631/jzus.A0900630].
13. Chen, Q., Kou, X.J., A constraint matrix approach for structural ultimate resistance to access the importance coefficient values of rigid joints // Advances in Structural Engineering, 2013, 16(11) — P. 1863-1870. [doi:10.1260/1369-4332.16.11.1863].
14. *Gao Y., Liu X.L.* Weighted graph form of structures and its application in robustness analysis // Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2013, 18(2) — P. 216-223. [doi:10.1007/s12204-013-1385-2]
15. *Перельмутер А.В.* О влиянии изменения жесткостей на перераспределение усилий в статически неопределимой системе // Строительная механика и расчет сооружений, 1974, №5.— С. 64–67.
16. *Перельмутер А.В.* Об оценке живучести несущих конструкций // Металлические конструкции: Работы школы профессора Н.С. Стрелецкого.— М.: МГСУ, 1995 — С. 62–68.

17. *Holnicki-Szulc J., Gierlinski J.T.* Structural analysis, design and control by the virtual distortion method. Chichester, UK: Wiley, 1995.
18. *Corradi dell Acua L., Maier J.* A matrix theory of elastic-locking structures // Meccanica, 1969, 4(4) — P. 1-16.
19. *Greene W.H., Haftka R.T.* Reducing distortion and internal forces in truss structures by member exchanges — Hampton, Virginia: National Aeronautics and. Space Administration. Langley Research Center., 23665, 1989 — 26 p.
20. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа — М.: ДМК Пресс, 2007 — 600 с. (Серия «Проектирование»).
21. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения.— М.: Мир, 1980 – 454 с.
22. *Pellegrino S., Calladine C.R.* Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks // International Journal of Solids and Structures, 1986, 22(4) — P. 409-428. [doi:10.1016/0020-7683(86)90014-4]
23. *Pellegrino S.* Analysis of prestressed mechanisms // International Journal of Solids and Structures, 1990, 26(12) — P. 1329-1350. [doi:10.1016/0020-7683(90)90082-7].
24. *Pellegrino S.* Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix // International Journal of Solids and Structures, 1993, 30(21) — P. 3025-3035. [doi:10.1016/0020-7683(93)90210-X].
25. *Рабинович И.М.* К теории статически неопределимых ферм — М.: Трансжеллориздат НКПС, 1933 — 119 с.
26. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления – М.: Мир, 1999 – 548 с.
27. *Pellegrino S.* Structural Computations with the Singular Value Decomposition of the Equilibrium Matrix // International Journal of Solids and Structures, 1993, 30(21) — P. 3025–3035.
28. *von Scheven M., Ramm E., Bischoff M.* Quantification of the redundancy distribution in truss and beam structures // International Journal of Solids and Structures, 2021, 213 — P. 41-49.
29. *Krake T., Scheven M.V., Gade J., Abdelaal M., Weiskopf D., Bischoff M.* Efficient Update of Redundancy Matrices for Truss and Frame Structures // ArXiv, abs/2205.12264, 2022 20 p. [doi:10.48550/arXiv.2205.12264]
30. *Kassabian P.E., You Z., Pellegrino S.* Retractable roof structures // ICE Proceedings Structures and Buildings, 1999, 134(1) — P. 45-56. [doi: 10.1680/istbu.1999.31252].
31. *Kou X., Li L., Zhou Y., Song J.* Redundancy Component Matrix and Structural Robustness // International Journal of Civil and Environmental Engineering, 2017, №11 — P. 1150–1155.
32. *Pandey P., Barai S.* Structural sensitivity as a measure of redundancy // Journal of Structural Engineering, 1997, 123(3), pp. 360–364. [doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1997)123:3(360)].
33. Eriksson A., Tibert G. Redundant and force-differentiated systems in engineering and nature // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195 (41) (2006), pp. 5437-5453.
34. Колесников Г.Н. Об учете случайных отклонений длин стержней от проектных размеров при расчете ферм // Петрозаводский государственный университет, 1985.-15с. Депонировано в ВИНИТИ 07.06.85, №3978-85.

REFERENCES

1. *Kanno Y., Ben-Haim Y.* Redundancy and robustness, or when is redundancy redundant? // Journal of Structural Engineering, 2011, 137 — P. 935–945.
2. *Frangopol D.M., Curley J.P.* Effects of damage and redundancy on structural reliability // Journal of Structural Engineering, 1987, 113, 1533–1549.
3. *Pandey, P.C., Barai S.V.* Structural sensitivity as a measure of redundancy // Journal of Structural Engineering, 1997, 123 — P. 360–364.
4. *Linkwitz K.* Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme. Dissertation, Universitdt Stuttgart, Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C: Dissertationen Heft Nr. 46 — Munchen: Beck Verlag, 1961.
5. *Bahndorf J.* Zur Systematisierung der Seilnetzberechnung und zur Optimierung von Seilnetzen.Dissertation, Universitdt Stuttgart, Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C: Dissertationen Heft Nr. 373 — Munchen: Beck Verlag, 1991.
6. *Ströbel D.* Die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf elastomechanische Systeme.Dissertation, Universitdt Stuttgart, Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C: Dissertationen Heft Nr. 478 — Munchen: Beck Verlag, 1995.
7. *Tibert A.G.* Distributed indeterminacy in frameworksм // Proceedings of the 5th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures , 2005, Salzburg, Austria.
8. *Tibert A.G.* Flexibility evaluation of prestressed kinematically indeterminate frameworks — The 18th Nordic Seminar on Computational Mechanics, 2005, Helsinki, Finland.
9. *Ströbel D., Singer P.* Recent developments in the computational modelling of textile membranes and inflatable structures // Oñate E., Kröplin B. (Eds.), Textile Composites and Inflatable Structures II — Springer Netherlands, 2008 — P. 253-266. [doi:10.1007/978-1-4020-6856-0_14]
10. *Jiang M., Kou X.J., Li Z.M.* The redundancy matrix of rigid-frame structure and its application // Journal of Donghua University, 2012, 29 — P. 107-110.
11. *Kou X.J., Chen Q., Song J.* Reliability estimation involving indirect load effects // Proceeding of the 4th Asian-Pacific Symposium, 2008, Hong Kong— P.137-140.
12. Chen Q., Kou X.J., Zhang Y. Internal force and de□formation matrixes and their applications in load path // Journal of Zhejiang University- Science A (Applied Physics & Engineering), 2010, 11(8) — P. 563-570. [doi:10.1631/ jzus.A0900630]
13. Chen, Q., Kou, X.J., A constraint matrix approach for structural ultimate resistance to access the importance coefficient values of rigid joints // Advances in Structural Engineering, 2013, 16(11) — P. 1863-1870. [doi:10.1260/1369-4332. 16.11.1863]
14. *Gao Y., Liu X.L.* Weighted graph form of structures and its application in robustness analysis // Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2013, 18(2) — P. 216-223. [doi:10.1007/s12204-013-1385-2]
15. *Perelmuter A.V.* The Effect of Stiffness Variation on Force Redistribution in a Statically Indeterminate System // Structural Mechanics and Structural Analysis.— 1974.— No. 5.— p. 64–67. (in Russian)

16. *Perelmuter A.V.* Assessment of Robustness of Load-Bearing Structures // Metal Structures: Works of Professor N.S. Streletskiy.— M.: MGSU, 1995.— p. 62–68. (in Russian)
17. *Holnicki-Szulc J., Gierlinski J.T.* Structural analysis, design and control by the virtual distortion method. Chichester, UK: Wiley, 1995
18. *Corradi dell Acua L., Maier J.* A matrix theory of elastic-locking structures // Meccanica, 1969, 4(4) — P. 1-16.
19. *Greene W.H., Haftka R.T.* Reducing distortion and internal forces in truss structures by member exchanges — Hampton, Virginia: National Aeronautics and. Space Administration. Langley Research Center., 23665, 1989 — 26 p.
20. *Perelmuter A.V., Slivker V.I.* Numerical Structural Analysis: Models: Methods and Pitfalls.— Berlin-New York-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer Verlag, 2003.— 600 p.
21. *Strang G.* Introduction to Linear Algebra — Wellesley: Cambridge Press, 2016 — 574 p
22. *Pellegrino S., Calladine C.R.* Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks // International Journal of Solids and Structures, 1986, 22(4) — P. 409-428. [doi:10.1016/0020-7683(86)90014-4]
23. *Pellegrino S.* Analysis of prestressed mechanisms // International Journal of Solids and Structures, 1990, 26(12) — P. 1329-1350. [doi:10.1016/0020-7683(90)90082-7]
24. *Pellegrino S.* Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix // International Journal of Solids and Structures, 1993, 30(21) — P. 3025-3035. [doi:10.1016/0020-7683(93)90210-X].
25. *Rabinovich I.M.* On the theory of statically indeterminate trusses — Moskow .: Transzhellorizdat NKPS, 1933 - 119 p. (in Russian)
26. *Golub G.H., Van Loan C.F.* Matrix Computations — Baltimore: The Johns Hopkins Univercity Press, 1996 – 694 p.
27. *Pellegrino S.* Structural Computations with the Singular Value Decomposition of the Equilibrium Matrix // International Journal of Solids and Structures, 1993, 30(21) — P. 3025–3035.
28. *von Scheven M., Ramm E., Bischoff M.* Quantification of the redundancy distribution in truss and beam structures // International Journal of Solids and Structures, 2021, 213 — P. 41-49.
29. *Krake T., Scheven M.V., Gade J., Abdelaal M., Weiskopf D., Bischoff M.* Efficient Update of Redundancy Matrices for Truss and Frame Structures // ArXiv, abs/2205.12264, 2022 20 p. [doi:10.48550/arXiv.2205.12264]
30. *Kassabian P.E., You Z., Pellegrino S.* Retractable roof structures // ICE Proceedings Structures and Buildings, 1999, 134(1) — P. 45-56. [doi: 10.1680/istbu.1999.31252]
31. *Kou X., Li L., Zhou Y., Song J.* Redundancy Component Matrix and Structural Robustness // International Journal of Civil and Environmental Engineering, 2017, №11 — P. 1150–1155.
32. *Pandey P., Barai S.* Structural sensitivity as a measure of redundancy // Journal of Structural Engineering, 1997, 123(3), pp. 360–364. [doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1997)123:3(360)]
33. Eriksson A., Tibert G. Redundant and force-differentiated systems in engineering and nature // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195 (41) (2006), pp. 5437-5453
34. Kolesnikov G.N. On accounting for random deviations of rod lengths from design dimensions when calculating trusses // Petrozavodsk State University, 1985.-15p. Deposited in VINITI 06/07/85, No. 3978-85. (in Russian)

Стаття надійшла 29.05.2023

Перельмутер А.В.

ВНЕСОК ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ У ЇЇ СТАТИЧНУ НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ

Стаття містить огляд основних ідей щодо нового напряму будівельної механіки, що розглядає питання живучості і інтенсивно розвивається. З точки зору резервування, як здатності системи забезпечити альтернативні шляхи передачі навантаження, що є однією з основних можливих стратегій проектування надійності та живучості, розглядається і статико-кінематичний аналіз стрижневих систем.

Фундаментальним вимірником рівня резервування стрижневих систем є ступінь статичної невизначеності. Але ця чисельна ознака не містить відомостей про роль кожного з елементів системи у формуванні ступеня статичної невизначеності. Цю роль виконує спеціально конструйована матриця розподілу статичної невизначеності (РСН-матриця), яка містить вичерпні відомості про вклад елементів системи в її статичні та кінематичні властивості.

З використанням фундаментальних положень лінійної алгебри аналізуються властивості матриці коефіцієнтів системи лінійних рівнянь рівноваги як оператора над векторними просторами зусиль і переміщень. Вказується на механічний зміст пов'язаних із цією матрицею чотирьох фундаментальних підпросторів. Цей аналіз визначає математичні властивості РСН-матриці та її механічну інтерпретацію.

Розглянуто способи формування РСН-матриці як для випадку геометрично незмінної системи, так і при аналізі систем геометрично змінюваної, коли доводиться вдаватися в сингулярного розкладання матриці рівнянь рівноваги. Усі теоретичні викладки супроводжуються ілюстративними прикладами, хоча питання чисельної реалізації розглянутих методів аналізу не розглядається. Очевидно, що вони заслуговують на самостійний розгляд.

Наведено відомості про можливість використання РСН-матриці для оцінки надійності та живучості конструктивного комплексу та її використання для аналізу чутливості системи до неточності виготовлення елементів.

Ключові слова: резервування, статико-кінематичний аналіз, живучість, чутливість, надійність.

Perelmuter A.V.

CONTRIBUTION OF SYSTEM ELEMENTS TO ITS STATIC INDETERMINACY

The article contains an overview of the main ideas regarding the new direction of construction mechanics, which considers the issue of survivability and is intensively developing. From the point of view of redundancy, as the ability of the system to provide alternative ways of transferring the load, which is one of the main possible strategies for designing reliability and survivability, the static-kinematic analysis of rod systems is also considered.

The fundamental measure of the level of redundancy of rod systems is the degree of static uncertainty. But this numerical sign does not contain information about the role of each element of the system in forming the degree of static uncertainty. This role is performed by a specially constructed distributed static indeterminacy matrix (DSI-matrix), which contains comprehensive information about the contribution of system elements to its static and kinematic properties.

Using the fundamental provisions of linear algebra, the properties of the matrix of coefficients of the system of linear equilibrium equations as an operator over the vector spaces of forces and displacements are analyzed. The mechanical content of the four fundamental subspaces associated with this matrix is indicated. This analysis determines the mathematical properties of the RSN matrix and its mechanical interpretation.

Methods of forming the DSI-matrix are considered both for the case of a geometrically constant system and for the analysis of geometrically variable systems, when it is necessary to resort to singular decomposition of the matrix of equilibrium equations. All theoretical explanations are accompanied by illustrative examples, although the issue of numerical implementation of the considered methods of analysis is not considered. It is obvious that they deserve independent consideration.

Information is provided on the possibility of using the DSI -matrix to assess the reliability and survivability of the structural complex and its use to analyze the sensitivity of the system to the inaccuracy of manufacturing elements.

Key words: redundancy, static-kinematic analysis, survivability, sensitivity, reliability.

УДК 624.04
Перельмутер А.В. **Внесок елементів системи у її статичну невизначеність** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 108-124.
У статті розглядається і статико-кінематичний аналіз стрижневих систем. Фундаментальним вимірником рівня резервування стрижневих систем є ступінь статичної невизначеності. Але ця чисельна ознака не містить відомостей про роль кожного з елементів системи у формуванні ступеня статичної невизначеності. Цю роль виконує спеціально конструйована матриця розподілу статичної невизначеності (РСН-матриця), яка містить вичерпні відомості про вклад елементів системи в її статичні та кінематичні властивості. Наведено відомості про можливість використання РСН-матриці для оцінки надійності та живучості конструктивного комплексу.
Іл. 12. Бібліог. 34` назв.

UDC 624.94.012.6.044
Perelmuter A.V. **Contribution of system elements to its static indeterminacy** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 108-124.
The article also considers the static and kinematic analysis of rod systems. The fundamental measure of the level of redundancy of rod systems is the degree of static uncertainty. But this numerical sign does not contain information about the role of each element of the system in forming the degree of static uncertainty. This role is performed by a specially constructed matrix of distribution of static uncertainty (RSN-matrix), which contains comprehensive information about the contribution of system elements to its static and kinematic properties. Information is given on the possibility of using the RSN-matrix to assess the reliability and survivability of the structural complex.
Figs 12. Refs. 34.

Автор: доктор технічних наук, головний науковий співробітник НВТ SCAD Soft Перельмутер Анатолій Вікторович
Адреса: 03037, Україна, м. Київ, вул Освіти, 3а, Науково-виробниче об'єднання з обмеженою відповідальністю SCAD Soft
Мобільний тел..: +38 (050) 382-16-25
E-mail: AnatolyPerelmuter@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9537-2728