

УДК 539.3

УНІВЕРСАЛЬНИЙ ТРИВИМІРНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

О.Б. Калашніков,

здобувач ступеня канд. техн. наук

О.П. Кривенко,

канд. техн. наук, старший науковий співробітник

П.П. Лізунов,

д-р техн. наук, професор

*Київський національний університет будівництва і архітектури
просп. Повітряних сил, 31, м. Київ. 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2024.112.93-107

Робота присвячена розробці нової модифікації скінченного елемента, призначеного для розрахунку неоднорідних композитних оболонок. Елемент побудований на базі універсального тривимірного ізопараметричного восьмикутного багатошарового скінченного елемента суцільного середовища. У новій модифікації скінченного елемента матеріалами шарів є композити, що армовані односпрямованими волокнами. В рамках скінченноелементної моделі багатошарової оболонки ступінчасто-змінної товщини розроблена методика моделювання властивостей односпрямованого волокнистого композитного матеріалу, яка спирається на метод структурування неоднорідностей матеріалу за товщиною і за планом. Шари багатошарового скінченного елемента жорстко поєднані між собою в монолітний пакет без проковзування та відриву. Кожен шар може мати свій тип матеріалу: традиційний або композитний. Ефективні фізико-механічні характеристики матеріалу шарів визначаються за відомими мікромеханічними методиками прогнозування термопружних сталих волокнистого композиту через відомі фізичні характеристики матриці та волокна. Волокнистий матеріал шару подається як однорідний трансверсально-ізотропний з площинами ізотропії, нормальними до напрямку армування. Додаткові змінні параметри «базового» універсального скінченного елемента доповнені новими атрибутами, що визначають термопружні властивості компонентів композиту. Це дає змогу при розрахунках використовувати в шарах неоднорідних оболонок як традиційні, так і волокнисто-композитні матеріали. На чисельних прикладах показано ефективність розробленого підходу.

Ключові слова: тривимірний багатошаровий ізопараметричний скінченний елемент, односпрямований волокнистий композитний матеріал, мікромеханічні параметри, пружна оболонка, термомеханічне навантаження, моментна схема скінчених елементів.

Вступ. У теперішній час композитні матеріали (КМ) або композити знаходять усе більше використання в тонкостінних елементах різноманітних конструкцій. Вони застосовуються, наприклад, в авіа-, ракето-, суднобудуванні та т.п. [1-7]. Ці матеріали мають ефективні механічні характеристики та унікальні теплофізичні властивості, через що широко використовуються в провідних галузях спеціальної техніки. В першу чергу це стосується композитів з шарувато-волокнистою структурою, які характеризуються наявністю пружних армованих шарів з різними фізико-механічними властивостями. Методи моделювання напружено-деформованого стану (НДС) пружних оболонкових елементів тонкостінних конструкцій, матеріалами яких є багатошарові волокнисті композити, набувають все більшої уваги дослідників та інтенсивно розробляються [5, 6, 8-11].

Для поширення методу аналізу геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних оболонок, виготовлених з традиційних матеріалів, на дослідження поведінки композитних оболонок розроблена нова модифікація універсального тривимірного багатошарового скінченного елемента (СЕ), яка створена на основі "базового" універсального СЕ [12, 13]. Метою роботи є розробка методики побудови ізопараметричного тривимірного СЕ суцільного середовища, пристосованого для розрахунку оболонок, матеріалами шарів яких є КМ. Пропонований в роботі модифікований тривимірний СЕ оболонок і пластин орієнтований на КМ волокнисто-шаруватої структури.

1. Постановка задачі. Розглядаються пружні багат шарові оболонки з геометричними особливостями за товщиною (ребрами, накладками, каналами, отворами, зламами серединної поверхні тощо), які знаходяться під дією статичного неоднорідного термомеханічного навантаження [14, 15]. З геометричної точки зору тонка та середньої товщини оболонка подається як тривимірне тіло. Обшивка оболонки (тіло оболонки без геометричних особливостей за товщиною) і ребра, що її підкріплюють, складаються з заданої довільної кількості шарів. Кожен шар матеріалу може мати різні геометричні та фізичні властивості та бути анізотропним. Шари поєднані між собою в єдиний монолітний пакет. Вони деформуються спільно без проковзування та відриву по поверхнях контактів, де виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Нагрів оболонки розглядається як усталений процес, для якого температурне поле вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат. Через тонкість оболонки розподіл температури за товщиною шару прийнято лінійним. Термопружні властивості матеріалів оболонки є сталими та незалежними від температури. Розглядаються великі переміщення при малих деформаціях. Матеріали шарів оболонки визначаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана.

Методика аналізу стійкості та власних коливань пружних неоднорідних оболонок при дії статичного термомеханічного навантаження виконується за розробленим скінченноелементним методом [12, 13]. Відповідно до методу НДС оболонки на всіх етапах термомеханічного навантаження як у докритичній, так і в закритичній областях розглядається з позицій геометрично нелінійних співвідношень тривимірної теорії термопружності. Використовується неklasична кінематична гіпотеза деформівної прямої (не обов'язково нормалі до серединної поверхні) – пряма до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Це дає змогу природнім шляхом моделювати злами серединної поверхні оболонки. Застосування неklasичної статичної гіпотези про сталість напружень обтиснення за товщиною шару оболонки не позбавляє СЕ тривимірних властивостей.

Дискретизація конструкції виконується на основі методу скінченних елементів. У напрямку товщини оболонка, як тонке тривимірне тіло, апроксимується одним просторовим скінченим елементом, тобто застосовується так звана одношарова скінченноелементна апроксимація оболонки за товщиною [12-15]. За невідомі приймаються вузлові переміщення СЕ. Використовується тривимірний 8-ми вузловий СЕ з полілінійними функціями форми, який є класичним просторовим елементом обшивки (СЕО). Скінченний елемент, що застосовується, є “базовим” універсальним СЕ. Він призначений для моделювання як ділянок обшивки оболонки, так і ділянок з конструктивними особливостями за товщиною. Елемент СЕО може трансформуватися у скінченний елемент модифікований (СЕМ) для моделювання ділянок оболонки ступінчасто-змінної товщини (з ребрами та каналами). Це досягається за рахунок додаткових змінних геометричних параметрів елемента, які призначені для збільшення (чи зменшення) його розмірів у напрямку товщини та зсуву за товщиною. Для реалізації цих процедур використовується спосіб лінійного перетворення координат вузлів просторового СЕО у відповідні вузлові координати СЕМ в напрямку товщини [12-16].

Побудова розв'язувальних співвідношень виконується з використанням моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [12, 15, 17]. Дослідження процесів геометрично нелінійного деформування оболонки базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах. Для аналізу стійкості та власних коливань оболонок при дії статичних термомеханічних навантажень використовується комплексний підхід [14], за яким модальний аналіз переднапруженої оболонки виконується на кожному кроці навантаження.

При формуванні системи розв'язувальних рівнянь для усієї скінченноелементної моделі оболонки (СЕМО) застосовується методика, яка враховує ексцентричне розміщення СЕ на ділянках ступінчасто-змінної товщини [12]. За невідомі функції приймаються нові узагальнені переміщення, які є сукупністю вузлових переміщень на серединній поверхні СЕ та різниці переміщень на його обмежувальних поверхнях. Для створення єдиного ансамблю рівнянь завжди виконується корегування всіх матриць СЕМ щодо прийнятої загальної поверхні відліку – серединної поверхні обшивки оболонки (рис. 1).

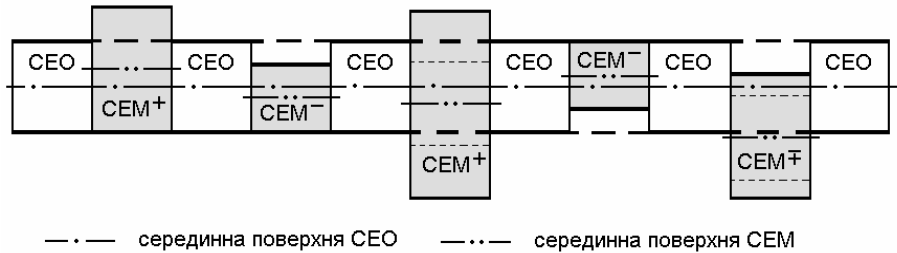


Рис. 1. Схематичне зображення поєднання різних СЕ в єдиний ансамбль

2. Моделювання фізико-механічних характеристик матеріалів шарів СЕ. Методика моделювання термопружних властивостей неоднорідного матеріалу конструкції базується на двох принципах: структуруванні неоднорідностей матеріалу оболонки як за її товщиною, так і за її планом, що реалізується за допомогою багат шарового тривимірного СЕ [18, 19]. Структурування неоднорідностей матеріалу оболонки за товщиною виконується у межах СЕ і характеризується заданим типом пакета багат шарового матеріалу. Структурування неоднорідностей матеріалу оболонки за планом пов'язане з можливістю використання різних типів пакетів матеріалу при побудові СЕМО.

В кожному шарі СЕ може бути свій вид волокнистого КМ. В обчислювальному комплексі ефективні фізико-механічні характеристики КМ визначаються на основі використання відомих мікроемеханічних моделей, які враховують параметри компонентів композиту – матриці та волокна [20-22]. За необхідності можуть бути застосовані інші нові моделі, що розроблені. Волокнистий КМ шару СЕ має однорідну односпрямовану структуру. Тому отриманий матеріал подається як однорідний трансверсально-ізотропний з площинами ізотропії, нормальними до напрямку армування.

Нова модифікація багат шарового тривимірного СЕ отримана на основі “базового” універсального СЕ, матеріалами шарів якого є традиційні матеріали [12]. Як зазначалось, він є одним типом елемента, що використовується на всіх ділянках оболонки при моделюванні всіх її структурних неоднорідностей: як геометричних, так і фізико-механічних при використанні традиційних матеріалів. “Базовий” СЕ удосконалено з урахуванням волокнисто-багат шарової та гібридної структури КМ за товщиною оболонки. Для нової модифікації універсального тривимірного СЕ додаткові змінні параметри “базового” СЕ доповнені новими атрибутами, які пов'язані з вибором в шарі СЕ типу матеріалу волокнистого КМ, зі заданням фізико-механічних властивостей його компонентів (матриці та волокна) і кута орієнтації армування (табл. 1).

Додаткові змінні параметри СЕ призначені для перевизначення за необхідності його основних параметрів. Розглянемо сутність цих параметрів.

Параметр (1) визначає тип елемента і задає ознаку необхідності перетворення СЕ обшивки (СЕО) у СЕМ зі зміненими геометричними параметрами. Параметр (2) задає кількість шарів m для моделювання багат шарового матеріалу та розподілу температури за товщиною елемента. Параметр (3) задає відносні товщини ребер СЕМ в шарах, а параметр (4) – ексцентриситет зі знаком зміщення середин ребер СЕО і СЕМ. Параметр (5) задає типи матеріалів шарів СЕ: традиційний (ТМ) чи композитний. Традиційні матеріали шару (ТМ) можуть бути ізотропними, ортотропними або трансверсально-ізотропними (6). Композитні матеріали шару (КМ) можуть бути волокнистими односпрямованими, або іншими новоствореними КМ (7).

Параметр (8) задає технічні термопружні сталі ТМ шарів СЕ (позначення надані для випадку ортотропного матеріалу). Параметр (9) задає мікроемеханічні параметри компонентів (волокон і матриці) КМ шарів СЕ. Параметри (10) та (11) задають кут орієнтації базису ортотропії в шарі та кут напрямку укладки волокон в площині шару, відповідно.

Отже, кожен шар СЕ може мати різний тип матеріалу: традиційний або композитний. До того ж, в кожному шарі може бути свій кут орієнтації базису ортотропії (орієнтації волокон). В прийнятій методології фізико-механічні характеристики односпрямованого волокнистого КМ

визначаються за відповідними ефективними термopружними сталими, які обчислюються через мікромеханічні параметри його компонентів. Якщо ефективні фізико-механічні характеристики з якихось причин є відомими, в такому разі волокнистий односпрямований КМ шару подається як однорідний трансверсально-ізотропний матеріал. В кожному шарі СЕ може бути свій тип волокнистого КМ, що відкриває можливість використовувати в пакеті матеріалу СЕ гібридні волокнисто-багатшарові КМ.

Таблиця 1

1. Топологічні параметри		
1	Ознака СЕ	CEO СЕМ <i>або</i>
2.	Кількість шарів	m
2. Геометричні параметри		
3	Відносна товщини ребра бічної грані в шарі	$\bar{h}_{n\ s_2s_3} = h_{n\ s_2s_3} / h$
4	Відносна відстань між серединами ребер CEO і СЕМ (ексцентриситет зі знаком)	$\bar{r}_{s_2s_3} = r_{s_2s_3} / h$
3. Фізико-механічні параметри		
5	Тип матеріалу n -го шару	традиційний – TM_n <i>або</i> композитний – KM_n
6	Тип традиційного матеріалу	ізотропний – TM_{iso} , <i>або</i> ортотропний – TM_{ortho} , <i>або</i> трансверс.-ізотропний – TM_{tr-iso}
7	Тип композитного матеріалу	волокнистий односпрямований – KM_{fm} , <i>або</i> інший новостворений – KM_{other}
3.1 Термopружні характеристики матеріалу n -го шару:		
8	технічні пружні сталі TM_n (ізотропного, ортотропного, трансверсально-ізотропного)	$E''_n, \nu''_n, G''_n, \alpha''_n, \rho_n$
9.	мікромеханічні параметри KM_n (волокнистого односпрямованого)	$E''_{nf}, \nu''_{nf}, G''_{nf}, \alpha''_{nf}, \rho''_{nf}, c''_{nf}$; $E''_{nm}, \nu''_{nm}, G''_{nm}, \alpha''_{nm}, \rho''_{nm}$
3.2 Кут орієнтації в n -му шарі:		
10	базису ортотропії TM_n (ортотропного, трансверсально-ізотропного)	β_n
11	напрямку укладки волокон KM_n	β''_{nf}

З означення додаткових змінних параметрів для СЕМ впливає, що “базовий” СЕ є частинним випадком, коли СЕ є одношаровим з ознакою CEO, тобто СЕ обшивки. Таким чином, весь набір додаткових параметрів призначений для апроксимації в рамках однієї розрахункової моделі різних конструктивних елементів оболонки.

Розширення властивостей “базового” універсального тривимірного СЕ дало змогу поширити методику дослідження поведінки оболонок, матеріалами шарів яких є ТМ, на новий клас оболонок, а саме на оболонки, матеріалами шарів яких є односпрямовані волокнисті КМ. Такий підхід дає змогу в межах розробленої методології досліджувати поведінку розширеного класу оболонок конструкцій. Основні класи оболонок, що належать розширеній дискретній розрахунковій моделі, наведені на рис. 2. Оболонки поділені за характерними ознаками: геометричними (“1. Геометрична неоднорідність”) та фізико-механічними (“2. Неоднорідність матеріалу”).

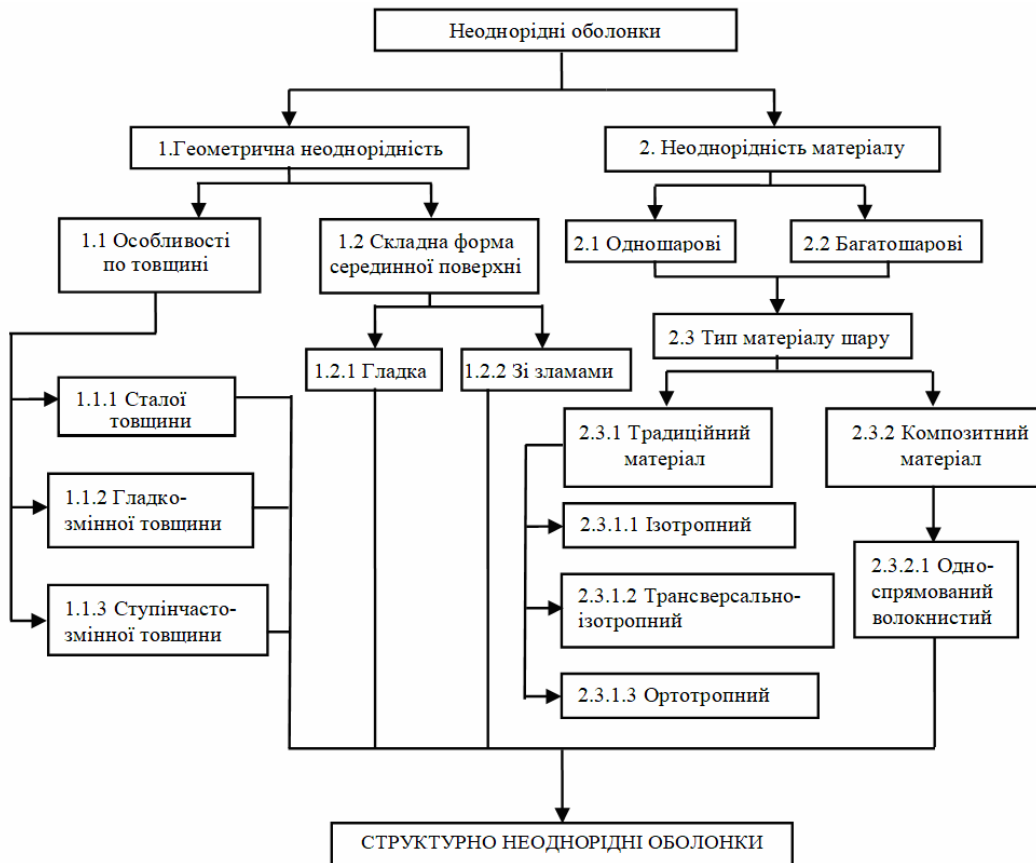


Рис. 2. Типи оболонок, які відносяться до розширеної розрахункової моделі

1. Геометрична неоднорідність. До цих класів конструкцій відносяться оболонки, що мають геометричні “1.1. Особливості за товщиною” та “1.2. Складну форму серединної поверхні”. Перша група складається з таких класів оболонок: “1.1.1. Сталі”, “1.1.2. Гладко-змінної”, “1.1.3. Ступінчато-змінної” товщини. Ступінчато-змінна товщина може мати ексцентриситет відносно серединної поверхні обшивки оболонки. До другої групи “1.2” відносяться оболонки зі складною формою серединної поверхні, яка може бути “1.2.1. Гладкою” або “1.2.2. Зі зламами”.

2. Неоднорідність матеріалу. Оболонки можуть бути: “2.1. Одношаровими” або “2.2. Багатошаровими”. У загальному випадку в кожному шарі задається “2.3. Тип матеріалу шару”. Це може бути “2.3.1. Традиційний матеріал” або “2.3.2. Композитний матеріал”. ТМ – це матеріал з найпоширенішою симетрією термомпружних сталей: “2.3.1.1. Ізотропний”, “2.3.1.2. Трансверсально-ізотропний” та “2.3.1.3. Ортотропний”. КМ – це варіант композитів, які розглядаються як “2.3.2.1. Односпрямований волокнистий матеріал”.

Разом отримуємо широкий клас конструкцій, які поєднуються загальною назвою “3. Структурно неоднорідні оболонки” або “Оболонки неоднорідної структури”.

Отже, прийнятий підхід надає можливість у рамках єдиної методології досліджувати стійкість і власні коливання широкого класу структурно неоднорідних оболонок при дії статичного термомеханічного навантаження. Задаючи значення одинадцяти додаткових змінних параметрів, можна змодельовати необхідний варіант структурно неоднорідної СЕМО. Узагальнюючи викладене, можна констатувати, що на базі прийнятої і розробленої методології моделювання термомпружних характеристик КМ та розширення на цій основі набору додаткових змінних параметрів отримано нову модифікацію універсального тривимірного багатошарового СЕ.

3. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних термопружних сталей волокнистих композитів. До найбільш відомих аналітичних мікромеханічних моделей прогнозування ефективних пружних фізико-механічних характеристик односпрямованих волокнистих КМ можна віднести низку моделей [20-22], наприклад:

- модель Е. Рейсса і В. Фойгта («Р-Ф»), яка полягає в усередненні відповідних параметрів компонентів за об'ємом і за орієнтацією;

- модель О.А. Кільчинського, З. Хашіна і Б. Розена «К-Х-Р»), згідно з якою КМ розглядається, як волокно у вигляді циліндра, що поміщено в циліндричну оболонку – матрицю, яка в свою чергу знаходиться в необмеженому середовищі з пружними параметрами, що дорівнюють ефективним параметрам композита;

- підхід Д.С. Аболіньша («А»), що є модифікацією моделі Кільчинського-Хашіна-Розена;

- модель Г.А. Ваніна («В»), що передбачає використання теорії еліптичних та мероморфних функцій.

Опис зазначених моделей та формули для визначення пружних ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого КМ можна знайти в [20-22]. Найбільш вживаною є найпростіша модель, що розроблена Рейссом-Фойгтом [23], яка має назву “правило суміші”:

$$E' = E_f c_f + E_m (1 - c_f), \quad E = \frac{E_f E_m}{E_m c_f + E_f (1 - c_f)},$$

$$G' = \frac{G_f G_m}{G_m c_f + G_f (1 - c_f)}, \quad G = \frac{\chi_m + c_f + (1 - c_f)g}{(1 - c_f)\chi_m + (1 + c_f)\chi_m} G_m,$$

$$\nu' = \nu_f c_f + \nu_m (1 - c_f), \quad \chi_m = 3 - 4\nu_m, \quad g = G_m / G_f.$$

Тут індекс «*f*» відноситься до волокна (*fiber*), індекс «*m*» – до матриці (*matrix*); c_f – коефіцієнт армування композиту (відносний об'ємний вміст волокон у матеріалі).

Мікромеханічні моделі прогнозування ефективних параметрів коефіцієнтів температурного розширення є менш розробленими через складність задачі. Серед моделей, які визначають обидва коефіцієнта теплового розширення волокнистого КМ, можна відмітити такі:

- модель “правило суміші”: («П-С») [23]

$$\alpha' = \frac{c_f \alpha_f E_f + (1 - c_f) \alpha_m E_m}{c_f E_f + (1 - c_f) E_m}, \quad \alpha = c_f \alpha_f + (1 - c_f) \alpha_m;$$

- модель Шепери «Scharpery» [24, 25]

$$\alpha' = \frac{c_f \alpha_f E_f + (1 - c_f) \alpha_m E_m}{c_f E_f - (1 - c_f) E_m},$$

$$\alpha = (1 + \nu_m)(1 - c_f) \alpha_m + (1 + \nu_f) \alpha_f c_f - \alpha' [\nu_f c_f + \nu_m (1 - c_f)];$$

- модель Грещука «Greszczuk» [26]

$$\alpha' = \frac{c_f \alpha_f E_f + (1 - c_f) \alpha_m E_m}{c_f E_f - (1 - c_f) E_m}, \quad \alpha = \frac{1}{E} [\alpha_0 E_0 \beta + \alpha_m E_m (1 - \beta)],$$

$$E = \frac{E_f E_m}{c_f E_m + (1 - c_f) E_f}, \quad \alpha_0 = \alpha_m (1 - 2\beta) + 2\alpha_f \beta - \nu_m (\alpha_f - \alpha_m) (1 - 2\beta),$$

$$E_0 = E_m E_f / [E_f (1 - 2\beta) + 2E_m \beta], \quad \beta = \sqrt{c_f / \pi}.$$

Ефективні пружні сталі в цих моделях визначаються за правилом суміші. Слід відмітити, що в більшості моделей волокнистого КМ, включаючи надані, повздовжні коефіцієнти теплового розширення визначаються за одними формулами. Моделі різняться методами визначення поперечних коефіцієнтів.

Ефективність розглянутих методик щодо визначення термопружних характеристик односпрямованих КМ оцінена на прикладі двох типових полімерних волокнистих композитів, для яких у літературі наявні експериментальні дані [22, 27]:

- полімерний вуглепластик, утворений системою безперервних односпрямованих волокон марки AS4, що рівномірно розподілені в епоксидній матриці 3501-6: $E_f = 225$ ГПа, $G_f = 15$ ГПа, $\nu_f = 0,2$, $\alpha_f = -0,5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $c_f = 0,6$; $E_m = 4,2$ ГПа, $G_m = 1,567$ ГПа, $\nu_m = 0,34$; $\alpha_m = 45 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$;

- склопластик з волокнами E-glass 21xK43 Gevetex та епоксидною матрицею LY556/HT907/DY063: $E_f = 80,0$ ГПа, $G_f = 33,33$ ГПа, $\nu_f = 0,2$, $\alpha_f = 4,9 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $c_f = 0,62$; $E_m = 3,35$ ГПа, $G_m = 1,24$ ГПа, $\nu_m = 0,35$, $\alpha_m = 58 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$.

Зіставлення експериментально визначених ефективних термопружних сталих КМ з результатами, що отримані на підставі мікромеханічних методик, показало таке (табл. 2, табл. 3). Для цих КМ усі розглянуті моделі добре узгоджуються між собою та з експериментом тільки для поздовжнього модуля пружності E' , для поперечного модуля пружності E та коефіцієнта Пуассона ν' – збіг є задовільним. Щодо інших пружних характеристик, модулів зсуву G', G , результати значно різняться. Для ефективних коефіцієнтів температурного розширення склопластику різниця з експериментом є більш-менш задовільною, в той час як для вуглепластика вона є відчутною. Найвні розбіжності результатів пов'язані з тим, що структура реального матеріалу, зазвичай, далека від прийнятої ідеалізованої, що використовується у моделях. Через це ефективні мікромеханічні співвідношення переважно призначені для орієнтовних оцінок та якісного аналізу впливу мікроструктурних параметрів на властивості композиту. Виникає питання оцінки впливу використання тої чи іншої моделі ефективних термопружних сталих КМ на точність розрахунків, проведених на їхній основі.

Таблиця 2

Методика розрахунку	Ефективні термопружні сталі. Вуглепластик AS4/3501-6, $c_f = 0.6$						
	E' , ГПа (Δ , %)	E , ГПа (Δ , %)	G' , ГПа (Δ , %)	G , ГПа (Δ , %)	ν' , (Δ , %)	α' , $10^{-6} / ^\circ\text{C}$ (Δ , %)	α , $10^{-6} / ^\circ\text{C}$ (Δ , %)
«P–Ф»	136.7 (+8.5)	10.21 (-7.2)	3.387 (-48.7)	4.142 (+37.4)	0.256 (-8.6)	0.0593 (+106)	17.70 (-31.9)
«K–X–P»	137.7 (+9.3)	13.79 (+25.4)	4.536 (-31.3)	4.845 (+23.3)	0.246 (-12.1)	-	-
«A»	136.7 (+8.5)	11.46 (+4.2)	4.536 (-31.3)	3.387 (-13.8)	0.256 (-8.6)	-	-
«B»	136.7 (+8.5)	8.867 (-19.4)	4.536 (-31.3)	4.142 (+37.4)	0.248 (-11.4)	-	-
«Schapery»	-	-	-	-	-	0.0593 (+106)	23.75 (-8.7)
«Greszczuk»	-	-	-	-	-	0.0593 (+106)	19.49 (-25.0)
Експ. дані [22, 27]	126.0 -	11.00 -	6.600 -	3.929 -	0.280 -	-1.0000 -	26.00 -

Вплив використання ефективних термопружних сталих, обчислених на підставі різних мікромеханічних моделей на розв'язки, що отримуються, проаналізований на прикладі задачі згину пластинки з вуглепластику AS4/3501-6 (табл. 2) та зі склопластику E-glass 21xK43 Gevetex/LY556/HT907/DY063 (табл. 3).

Розглядається згин жорстко затиснутої на краю квадратної пластинки зі стороною $a = 100h$, яка лежить в площині x^2x^3 і навантажена рівномірно розподіленим тиском інтенсивності $q = 1 \text{ кг/см}^2$. Товщина пластинки $h = 1 \text{ см}$. Волокна КМ спрямовані вздовж осі x^2 . За розрахункову модель прийнято чверть пластинки з двома площинами симетрії.

Таблиця 3

Методика розрахунку	Ефективні термопружні сталі. Склопластик E-glass 21xK43 Gevetex/LY556/HT907/DY063, $c_f = 0.62$						
	E' , ГПа (Δ , %)	E , ГПа (Δ , %)	G' , ГПа (Δ , %)	G , ГПа (Δ , %)	ν' , (Δ , %)	α' , $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ (Δ , %)	α , $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ (Δ , %)
«P–Ф»	50.87 (-4.88)	8.252 (-53.4)	3.076 (-35.5)	4.061 (-35.7)	0.257 (-7.5)	6.23 (-27.5)	25.08 (-5.0)
«K–X–P»	50.89 (-4.84)	13.420 (-24.2)	4.602 (-21.1)	5.268 (-16.7)	0.274 (-1.4)	-	-
«A»	50.87 (-4.88)	9.236 (-47.8)	4.602 (-21.1)	3.076 (-51.3)	0.257 (-7.5)	-	-
«B»	50.90 (-4.82)	7.848 (-55.7)	4.602 (-21.1)	4.601 (-17.2)	0.249 (-10.4)	-	-
«Schapery»	-	-	-	-	-	6.23 (-27.5)	32.80 (+24.2)
«Greszczuk»	-	-	-	-	-	6.23 (-27.5)	28.72 (+8.8)
Експ. дані [22, 27]	53.48 -	17.700 -	5.830 -	6.321 -	0.278 -	8.60 -	26.40 -

При використанні різних моделей визначення ефективних пружних характеристик розв'язки для обох розглянутих матеріалів швидко збігаються (табл. 4 - табл. 6). Маємо гарну збіжність розв'язків для кожної моделі за прогином (табл. 4) та напруженням (табл. 5, табл. 6) в центрі пластини. Для кожної моделі порівняння виконувалося з даними, отриманими при сітці 12×12 СЕ (похибка Δ %, другий рядок в рядку таблиці).

Таблиця 4

Збіжність розв'язків за прогином ($-u'$, м) в центрі пластини

Мікромех. методика	Вуглепластик			Склопластик		
	4×4 СЕ	8×8 СЕ	12×12 СЕ	4×4 СЕ	8×8 СЕ	12×12 СЕ
«P–Ф»	0.04673 -1.81%	0.04744 -0.31% (-)	0.04759 -	0.1147 -1.54%	0.1162 -0.26% (-)	0.1165 -
«K–X–P»	0.04582 -1.65%	0.04646 -0.28% (-2.06%)	0.04659 -	0.1035 -1.33%	0.1047 -0.19% (-9.90%)	0.1049 -
«A»	0.04607 -1.77%	0.04676 -0.30% (-1.43%)	0.04690 -	0.1099 -1.43%	0.1113 -0.18% (-4.22%)	0.1115 -
«B»	0.04618 -1.99%	0.04696 -0.34% (-1.01%)	0.04712 -	0.1122 -1.41%	0.1136 -0.18% (-2.24%)	0.1138 -

Порівняння прогинів і напружень, що отримані за використання різних моделей (третій рядок в дужках, сітка 8×8 СЕ), показало достатньо гарний збіг розв'язків при порівнянні з даними для моделі «P–Ф». Виняток становлять напруження σ^{33} (табл. 5, табл. 6) для вуглепластику і склопластику, що отримані при використанні моделі «K–X–P».

Маємо гарний збіг форм деформування пластини при використанні чотирьох мікромеханічних методик прогнозування пружних сталей (рис. 3; ВП – вуглепластик, СП – склопластик). Форми наведено для серединної поверхні пластинки в напрямку армування

(вздовж осі x^2) і в поперечному напрямку (вздовж осі x^3). Кружечками надано розв'язок, отриманий в ПК NASTRAN за даними моделі «Р-Ф».

Таблиця 5

Збіжність розв'язків за напруженням в центрі пластини. Вуглепластик

Мікромех. методика	4 × 4 CE		8 × 8 CE		12 × 12CE	
	$-\sigma^{22}$, кг/см ²	$-\sigma^{33}$, кг/см ²	$-\sigma^{22}$, кг/см ²	$-\sigma^{33}$, кг/см ²	$-\sigma^{22}$, кг/см ²	$-\sigma^{33}$, кг/см ²
«Р-Ф»	2524 -4.32%	131.1 2.18%	2620 -0.68% -	128.3 0% -	2638 -	128.3 -
«К-Х-Р»	2477 -4.73%	197.9 1.17%	2581 -0.73% (-1.49%)	195.5 0.05% (+52.4%)	2600 -	195.6 -
«А»	2494 -4.48%	153.7 1.45%	2593 -0.69% (-1.03%)	151.5 0% (+22.2%)	2611 -	151.5 -
«В»	2507 -4.13%	101.6 0.99%	2597 -0.69% (-0.88%)	100.4 -0.20% (-21.7%)	2615 -	100.6 -

Таблиця 6

Збіжність розв'язків за напруженням в центрі пластини. Склопластик

Мікромех. методика	4 × 4 CE		8 × 8 CE		12 × 12CE	
	$-\sigma^{22}$, кг/см ²	$-\sigma^{33}$, кг/см ²	$-\sigma^{22}$, кг/см ²	$-\sigma^{33}$, кг/см ²	$-\sigma^{22}$, кг/см ²	$-\sigma^{33}$, кг/см ²
«Р-Ф»	2327 -5.06%	348.1 -0.94%	2432 -0.77% -	350.5 -0.26% -	2451 -	351.4 -
«К-Х-Р»	2125 -5.18%	557.1 -2.40%	2223 -0.80% (-8.57%)	568.4 -0.42% (+62.17%)	2241 -	570.8 -
«А»	2231 -4.94	379.4 -1.43%	2329 -0.77% (-4.23%)	383.7 -0.31% (9.47%)	2347 -	384.9 -
«В»	2266 -4.83%	312.1 -1.01%	2363 -0.75% (-2.75%)	314.5 -0.25% (-10.25%)	2381 -	315.3 -

Вплив використання мікромеханічних методик визначення ефективних коефіцієнтів лінійного теплового розширення на розв'язки, що отримуються, досліджено на прикладі нагріву на $T = +20^\circ\text{C}$ жорстко затиснутої за контуром квадратної панелі з кривизною $K = 2a^2/(Rh) = 24$, де $h = 0.01\text{ м}$ – товщина оболонки, $a = 60h$ – розмір у плані, R – радіус серединної поверхні. Волокна КМ спрямовані за віссю x^2 . За розрахункову модель прийнято чверть панелі з двома площинами симетрії.

Для оболонки зі склопластику величини вигину центра панелі від рівномірного за об'ємом нагріву мають значний розбіг з результатами, що здобуті при використанні ефективних характеристик експерименту (табл. 7). Відповідно до цього отримано значну розбіжність форм деформування, що одержані зі залучанням різних мікромеханічних моделей визначення ефективних теплових характеристик, з розв'язком, що відповідає даним експерименту (рис. 4). При цьому маємо гарний збіг між собою форм деформування, що визначені за використання різних мікромеханічних моделей. На рисунку вихідна форма панелі показана жирною штрих-пунктирною лінією з позначкою $T = 0, q = 0$. Розв'язки для оболонки з вуглепластику, що

спираються на застосування різних мікромеханічних моделей, мають гарний збіг як між собою, так і з розв'язком, в якому ефективні термопружні характеристики визначено експериментально.

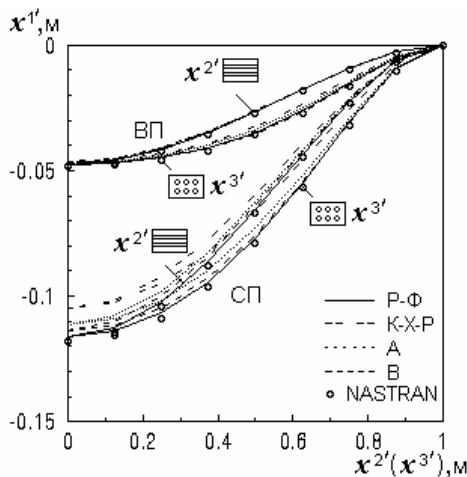


Рис. 3. Форми деформування згину пластини

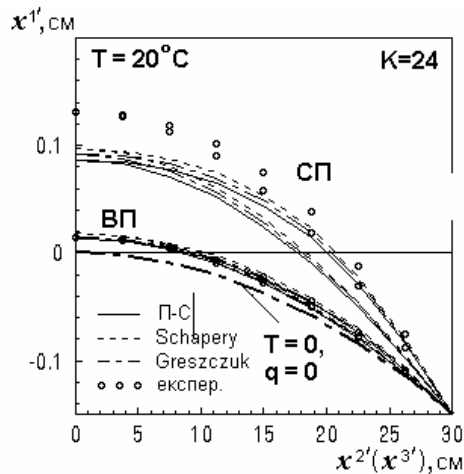


Рис. 4. Форми деформування оболонки при нагріві

Таблиця 7

Випинання в центрі оболонки (u^1 , мм), 8×8 СЕ

Мікромех. методика	Вуглепластик	Склопластик
«П-С»	0.1384 (-7.11%)	0.8655 (-33.88%)
«Schapery»	0.1839 (+23.42%)	0.9679 (-26.06%)
«Greszczuk»	0.1518 (+1.88%)	0.9211 (-29.63%)
Експеримент [27]	0.1490 (-)	1.3090 (-) --

Розроблений підхід є дієвим інструментом для оцінки ефективності новостворюваних мікромеханічних методик прогнозування ефективних термопружних характеристик волокнистих КМ, а також може бути з успіхом застосований при аналізі поведінки оболонок новостворених матеріалів волокнистої структури.

4. Тестові задачі. Розглядається тонка квадратна тришарова шарнірно оперта пластинка з перехресним укладанням шарів $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Вихідні дані такі: товщина шарів $h_1 = h_2 = h_3 = h/3$, $h = 1$ см, $a = 100h$. Розглянуто два типи навантаження: рівномірно розподілений тиск та тиск за синусоїдальним законом. Безрозмірний прогин в центрі пластинки визначався за формулою: $\bar{u}^1 = 100u^1(Eh^3/q_0a^4)$. Приймалося, що матеріал шарів трансверсально-ізотропний з такими фізико-механічними характеристиками:

$$E' = E_{2''} = 1.7845 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad E = E_{1''} = E_{3''} = 7.137 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2,$$

$$G' = G_{1''2''} = G_{2''3''} = 3.5180 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad G = G_{1''3''} = 1.4072 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2,$$

$$\nu' = \nu_{2''1''} = \nu_{2''3''} = 0.25, \quad \nu = \nu_{1''3''} = \nu_{3''1''} = 0.01.$$

Розв'язки, що отримані зі застосуванням запропонованого нового СЕ, зіставлені з опублікованими даними інших авторів. В обох випадках отримано гарну збіжність і точність розв'язків.

Для пластинки, що навантажена рівномірно розподіленим тиском $q_0 = 1$ кг/см², розрахунки, що виконані з використанням нової модифікації універсального тривимірного СЕ, показали гарну збіжність і точність розв'язків (табл. 8). При сітці лише 4×4 СЕ (МССЕ) розбіжність з контрольним розв'язком Sheikh & Chakrabarti [29] менше 1%.

Таблиця 8

Порівняльна похибка прогину \bar{u}' тришарової пластинки

Sheikh, Chakrabarti 1024 CE [29]	Reddy [30]	Ghosh, Dey [31]	Khoa 64 CE [28]	Khoa 512 CE [28]	MCCE 4×4 CE	MCCE 8×8 CE	MCCE 12×12 CE
0.6708	0.6705	0.6823	0.6894	0.6751	0.6664	0.6691	0.6697
Δ, %							
–	-0.04	+1.71	+2.77	+0.64	-0.65	-0.25	-0.16

Порівняння результатів розв'язання задачі згину пластинки під синусоїдальним навантаженням, що отримані з використанням нової модифікації універсального CE, з точним розв'язком Pagano [32] та результатами інших авторів надано в табл. 9.

Таблиця 9

Порівняльна похибка прогину \bar{u}' тришарової пластинки

Pagano [32]	Reddy [30]	Panda [33]	Sheikh [29]	Khoa 64 CE [28]	Mawenya [34]	NASTRAN 8×8 CE	MCCE 4×4CE
0.4368	0.4340	0.4346	0.4350	0.4273	0.4398	0.4237	0.4039
Δ, %							
–	-0.64	-0.50	-0.41	-2.17	+0.69	-2.99	-7.53

Розв'язок, отриманий за MCCE з використанням розробленого модифікованого універсального тривимірного CE, гарно збігається з точним розв'язком Pagano вже при сітці 4×4 CE для чверті пластинки.

Висновки. На базі скінченноелементної моделі, що використовує моментну схему скінченних елементів, розроблена нова модифікація універсального тривимірного багат шарового скінченного елемента, матеріали шарів якого є односпрямованими волокнистими композитами. У кожному шарі може бути свій тип волокнистого композитного матеріалу, що відкриває можливість використання в пакеті CE гібридні волокнисто-багат шарові композити. Додаткові змінні параметри «базового» CE доповнені новими компонентами, наявність яких дає змогу використовувати в шарах поряд з традиційними матеріалами композитні. Використання нової версії CE поширено на задачі стійкості та модального аналізу багат шарових композитних оболонок ступінчато-змінної товщини при дії термомеханічних навантажень. Виконана оцінка ефективності мікромеханічних методів прогнозування характеристик матеріалу. Проведений скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану багат шарових оболонок, матеріали шарів яких є волокнистими композитами, підтвердив достовірність отримуваних результатів. Розрахунки показали, що розроблений елемент забезпечує точність розв'язків, які отримуються, має обчислювальну ефективність, переважає універсальністю та широкою сферою застосування у порівнянні з іншими CE, а його використання в дослідницьких та інженерних програмах є перспективним.

Таким чином, розроблений підхід підвищує універсальність «базового» тривимірного CE та дозволив розширити розрахункову скінченноелементну модель на широкий клас оболоноквих конструкцій з традиційних, композитних та гібридних матеріалів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондарь В.Г., Бычков С.А., Король В.Н. Решение проблемы создания авиаконструкций из полимерных композиционных материалов на АНТК "Антонов" // Авиационно-космическая техника и технология: научно-техн. журнал. Харьков: ХАИ, 2003. – Вып. 8 (43). – С. 5-13.
2. Добриденко О.М., Скляр О.І., Турчин В.М., Белінська Р.Б. Аналіз існуючих композитних матеріалів та оцінка їх застосування у конструкціях планерів літальних апаратів військової авіації України // Зб. наук. праць Державного науково-дослідного інституту авіації, 2012. – Вып. №15. – С. 147-152.
3. Кондратенко А.Н., Голубкова Т.А. Полимерные композиционные материалы в изделиях зарубежной ракетно-космической техники (Обзор) // Конструкции из композиционных материалов, 2009. – № 2. – С. 24-35.

4. Копань В.С. Композиційні матеріали. – Київ: Пульсари, 2004. – 196 с.
5. Нарусберг В.Л., Тетерс Г.А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. – Рига: Зинатне, 1988. – 297 с.
6. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
7. Юскаев В.Б. Композиційні матеріали. – Суми: Вид-во СумДУ. 2006. 199 с.
8. Semenyuk M.P., Zhukova N.B. Stability of Composite Cylindrical Shells with Geometrical and Structural Imperfections Under Axial Compression // *International Applied Mechanics*, 2022. – Vol. 58 (3). – Pp. 307-319.
9. Shahmohammadi M.A., Azhari M.M., Sarrami-Foroushani S. Stability of laminated composite and sandwich FGM shells using a novel isogeometric finite strip method // *Engineering Computations: Int J for Computer-Aided Engineering*, 2019. – Vol. 37 (4). –Pp. 1369-1395.
10. Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B. The Theory of Stability of Cylindrical Composite Shells Revisited // *International Applied Mechanics*, 2015. – Vol. 51 (4). – Pp.449-460.
11. Zhang H, Gao Y, He D, Yang W. Free vibration and buckling analysis of composite laminated shells using the refined zigzag theory // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022. – Vol. 60(3). – Pp. 435-48.
12. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с. ISBN: 978-966-646-097-7.
13. Bazhenov V., Krivenko O. Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrücken, Deutschland, 2018. – 97 p.
14. Krivenko, O.P.; Lizunov, P.P.; Vorona, Yu.V.; Kalashnikov, O.B. A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells with an Inhomogeneous Structure. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and Technical collected articles*. Kyiv: KNUBA. 2023. Issue 110. P. 131-149. doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.131-149.
15. Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В., Калашніков О.Б. Використання моментної схеми скінчених елементів при дослідженні тонких пружних оболонок // *Управління розвитком складних систем*. – 2023. – (53). 52-62. DOI: 10.32347/2412-9933.2023.53.52-62.
16. Krivenko, O.P.; Lizunov, P.P.; Vorona, Yu.V.; Kalashnikov, O.B. Comparative analysis of the stability and natural vibrations of shallow panels under the action of thermomechanical loads // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 111. – Pp. 49-64. DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.49-64.
17. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С.Сахаров, В.Н.Кислоокий, В.В.Киричевский и др. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. – 480 с.
18. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О., Калашніков О.Б. Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 172-180.
19. Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В., Калашніков О.Б. Моделювання термпружних властивостей композитного матеріалу в задачах стійкості багатопарових оболонок // *Управління розвитком складних систем*. 2023. № 54. С. 52 – 62. DOI: 10.32347/2412-9933.2023.53.52-62
20. Кучер М.К. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів / М.М. Заразовський, М.К. Кучер. Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія Машинобудування. 2010. №58. С.24 – 29.
21. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик для односпрямованого волокнистого композитного матеріалу // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* – К.: КНУБА, 2014. – Вип. 92. – С. 30-49.
22. Рубашевський, В. В. Аналіз методів визначення констант пружності однонаправленого шару композиційних матеріалів / В. В. Рубашевський, М. М. Заразовський, С. М. Шукчаєв // *Mechanics and Advanced Technologies*. – 2017. – №2 (80). – P. 107-112.
23. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса, АН УССР. Ин-т проблем материаловедения. – К: Наукова думка, 1985. – 592 с.
24. Schapery, R.A. Thermal Expansion Coefficient of Composite Materials Based on Energy Principles. *Journal of Composite Materials*, 2, 1968, P. 380-404.
25. Harris V. *Engineering Composite Materials*. – The Institute of Materials, London, 1999. –195 p.
26. Ричардсон М. Промышленные полимерные композиционные материалы. Пер. с англ. под ред. Бабаевского П.Г. – М.: Химия, 1980. – 472 с.
27. Soden, P.D., Hinton, M.J. and Kaddour, A.S. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology*, 1998, № 58 p. 1011-1022.
28. N. N. Khoa and T. I. Tinh, Finite element analysis of laminated composite plates using high order shear deformation theory, *Vietnam Journal. of Mechanics*.№29 (2007) 47–57. DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/29/1/5590>.
29. A.H. Sheikh, A. Chakrabarti A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates *Finite Elements in Analysis and Design* Vol.39, Issue 9, June 2003, P. 883-903 [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(02\)00137-3](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(02)00137-3).
30. Reddy, J.N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *Journal. Appl. Mech.(ASME)*1984; 51(4): 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>
31. A.K. Ghosh, S.S. Dey. A simple finite element for the analysis of laminated plates, *Computers & Structures*, Vol.44, Issue 3, 1992, P. 585-596, [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90391-C](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90391-C).
32. Pagano N.J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. *Journal of Composite Materials*. 1970; Vol. 4, P.20-34. doi:10.1177/002199837000400102
33. S.C. Panda, R. Natarajan. Finite element analysis of laminated composite plates. *International. Journal Numerical. Methods. Engineering* Vol.14 (1979) P. 69-79. <https://doi.org/10.1002/nme.1620140106>
34. A. S. Mawenya, J. D. Davies. Finite element bending analysis of multilayered plates, *International. Journal Numerical. Methods* Vol.8 (1974) P. 215- 225. <https://doi.org/10.1002/nme.1620080203>

REFERENCES

1. Bondar V.G., Bychkov S.A., Korol V.N. Resheniye problemy sozdaniya aviakonstruktсий iz polimernykh kompozitsionnykh materialov na ANTK "Antonov" (Solution of the problem of creating aircraft structures from polymer composite materials at the Antonov ASTC) // *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya: nauchno-tekhn. zhurnal*. Khar'kov: KHAI, 2003. – Vip. 8 (43). – S. 5-13. (in Russian).
2. Dobrydenko O.M., Sklyar O.I., Turchyn V.M., Byelinska R.B. Analiz isnyuyuchykh kompozytnykh materialiv ta otsinka yikh zastosuvannya u konstruktсийakh planeriv litalnykh aparativ viyskovoyi aviatsiyi Ukrayiny (Analysis of existing composite materials and assessment of their use in airframe structures of military aviation of Ukraine) // *Zb. nauk. prats Derzhavnoho nauково-doslidnoho instytutu aviatsiyi*, 2012. – Vyp. №15. – S. 147-152 (in Ukrainian).
3. Kondratenko A.N., Golubkova T.A. Polimernyye kompozitsionnyye materialy v izdeliyakh zarubezhnoy raketno-kosmicheskoy tekhniki (Obzor) (Polymer composite materials in products of foreign rocket and space technology (Review)) // *Konstruktсий iz kompozitsionnykh materialov*, 2009. – № 2. – S. 24-35. (in Russian).
4. Kopan V.S. Kompozytsiyini materialy (Composite materials). – Kyiv: Pulsary, 2004. – 196 s. (in Ukrainian).
5. Narusberg V.L., Teters G.A. Ustoychivost' i optimizatsiya obolochek iz kompozitov (Stability and optimization of composite shells) – Riga: Zinatne, 1988. – 297 s. (in Russian).
6. Rikards R.B., Teters G.A. Ustoychivost' obolochek iz kompozitnykh materialov (Stability of shells made of composite materials). – Riga: Zinatne, 1974. – 310 s. (in Russian).
7. Yuskayev V.B. Kompozytsiyini materialy (Composite materials). – Sumy: Vyd-vo SumDU. 2006. 199 s. (in Ukrainian).
8. Semenyuk M.P., Zhukova N.B. Stability of Composite Cylindrical Shells with Geometrical and Structural Imperfections Under Axial Compression // *International Applied Mechanics*, 2022. – Vol. 58 (3). – Pp. 307-319.
9. Shahmohammadi M.A., Azhari M.M., Sarrami-Foroushani S. Stability of laminated composite and sandwich FGM shells using a novel isogeometric finite strip method // *Engineering Computations: Int J for Computer-Aided Engineering*, 2019. – Vol. 37 (4). – Pp. 1369-1395.
10. Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B. The Theory of Stability of Cylindrical Composite Shells Revisited // *International Applied Mechanics*, 2015. – Vol. 51 (4). – Pp.449-460.
11. Zhang H, Gao Y, He D, Yang W. Free vibration and buckling analysis of composite laminated shells using the refined zigzag theory // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022. – Vol. 60(3). – Pp. 435-48.
12. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O. Nelineine deformuvannya ta stiiikist pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury (Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structure). – K.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s. ISBN: 978-966-646-097-7 (in Ukrainian).
13. Bazhenov V., Krivenko O. Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrücken, Deutschland, 2018. – 97 p.
14. Krivenko, O.P.; Lizunov, P.P.; Vorona, Yu.V.; Kalashnikov, O.B. A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells with an Inhomogeneous Structure // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and Technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 131-149. doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.131-149
15. Krivenko, O.P.; Lizunov, P.P.; Vorona, Yu.V.; Kalashnikov, O.B. (2023). Application of the finite element moment scheme to the investigation of thin elastic shells of inhomogeneous structure // *Management of Development of Complex Systems*, 53, 52–62, DOI: 10.32347/2412-9933.2023.53.52-62. (in Ukrainian).
16. Krivenko, O.P.; Lizunov, P.P.; Vorona, Yu.V.; Kalashnikov, O.B. Comparative analysis of the stability and natural vibrations of shallow panels under the action of thermomechanical loads // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 111. – Pp. 49-64. DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.49-64.
17. Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel / A.S.Saharov, V.N.Kislookij, V.V.Kirichevskij i dr. (The finite element method in solid mechanics) – K.: Visha shk. Golovnoe izd-vo, 1982. – 480 s (in Russian).
18. Solovei M.O., Krivenko O.P., Mishchenko O.O., Kalashnikov O.B. Vrakhuвання kharakterystyk kompozytnoho materialu v skinchennoelementnii modeli neodnorodnoyi obolonky (Taking into account the characteristics of a composite material in a finite element model of a non-uniform shell) // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2012. – Issue 89 – P. 172-180.
19. Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V., Kalashnikov O.B. Modelyuvannya termopruzhnykh vlastyivostey kompozytnoho materialu v zadachakh stiykosti bahatosharovykh obolonok (Modeling of thermo-elastic properties of composite material in stability problems of multilayered shells) // *Management of Development of Complex Systems*, 2023. – Issue 54. – P. 52 – 62. DOI: 10.32347/2412-9933.2023.53.52-62
20. Kucher M.K. Otsinka mikromekhanichnykh modeley prohnozuvannya efektyvnykh konstant pruzhnosti voloknystykh kompozytiv (Evaluation of micromechanical models for predicting effective elastic constants of fibrous composites) / M.M. Zarazovskyy, M.K. Kucher. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrayiny «Kyivskyy politekhnichnyy instytut»*. Seriya Mashynobuduvannya. 2010. №58. P. 24 – 29.
21. Solovei M.O., Kryvenko O.P., Mishchenko O.O. Vyznachennya efektyvnykh fizyko-mekhanichnykh kharakterystyk dlya odnospryamovanoho voloknistoho kompozytnoho materialu (Determination of effective physical and mechanical characteristics for a unidirectional fiber composite material) // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. – Kyiv: KNUBA, 2014. – Issue 92 – P. 30-49.
22. Rubashevskiy, V.V. Analiz metodiv vyznachennya konstant pruzhnosti odnonapravlennoho sharu kompozytsiynykh materialiv (Analysis of methods for determining elasticity constants of a unidirectional layer of composite materials) / V.V. Rubashevskiy, M.M. Zarazovskiy, S.M. Shukaev // *Mechanics and Advanced Technologies*. – 2017. – №2 (80). – P. 107-112.
23. Kompozitsionnyye materialy: Spravochnik (Composite materials: Handbook) / Ed. D.M. Karpinos. – Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Institute of Problems of Materials Science. – Kyiv: Naukova Dumka, 1985. – 592 p.

24. Schapery, R.A. Thermal Expansion Coefficient of Composite Materials Based on Energy Principles. *Journal of Composite Materials*, 2, 1968, P. 380-404.
25. Harris B. *Engineering Composite Materials*. – The Institute of Materials, London, 1999. – 195 p.
26. Richardson M. *Promyshlennyye polimernyye kompozitsionnyye materialy*. Per. s angl. pod red. Babayevskogo P.G. (Richardson M. *Industrial polymer composite materials*) – M.: Khimiya, 1980. – 472 s. (in Russian).
27. Soden, P.D., Hinton, M.J. and Kaddour, A.S. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology*, 1998, № 58 p. 1011-1022.
28. Khoa N.N. and Thinh T.I. Finite element analysis of laminated composite plates using high order shear deformation theory // *Vietnam Journal of Mechanics*, 2007. – №29. P. 47–57. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/29/1/5590>.
29. Sheikh A.H., Chakrabarti A. A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates // *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003. Vol.39, Issue 9, P. 883-903 [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(02\)00137-3](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(02)00137-3).
30. Reddy, J.N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates // *Journal. Appl. Mech. (ASME)*, 1984. – 51(4). P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>
31. Ghosh A.K., Dey S.S. A simple finite element for the analysis of laminated plates, // *Computers & Structures*, 1992. – Vol.44, Issue 3. P. 585-596, [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90391-C](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90391-C).
32. Pagano N.J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates // *Journal of Composite Materials*, 1970. Vol.4, P.20-34. doi:10.1177/002199837000400102
33. Panda S.C., Natarajan R. Finite element analysis of laminated composite plates. // *International Journal Numerical. Methods. Engineering*, 1979. – Vol.14. – P. 69-79. <https://doi.org/10.1002/nme.1620140106>
34. Mawenya A.S., Davies J.D. Finite element bending analysis of multilayered plates, // *International Journal Numerical. Methods*, 1974. – Vol.8 – P. 215- 225. <https://doi.org/10.1002/nme.1620080203>.

Стаття надійшла 09.04.2024

Kalashnikov O.B., Krivenko O.P., Lizunov P.P.

UNIVERSAL THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT FOR ANALYZING OF ELASTIC INHOMOGENEOUS SHELLS UNDER THERMOMECHANICAL LOADS

The work is devoted to the development of a new modification of the finite element intended for the calculation of inhomogeneous composite shells of thin and medium thickness. The element is constructed on the basis of a universal three-dimensional isoparametric 8-node multilayer finite element of a continuous medium. The layers of the modified finite element are made of composite materials reinforced with continuous unidirectional fibers. Within the framework of a finite element model of a multilayer shell of stepwise variable thickness, a technique for modeling the properties of a unidirectional fibrous composite material has been developed, based on a method for structuring material inhomogeneities by thickness and by plan. The shell can consist of an arbitrary number of layers of varying thickness bonded into a single piece. Each layer can have its own type of material: traditional or composite. Effective physical and mechanical characteristics of the layer material are determined using known micromechanical methods for predicting the thermoelastic constants of a fiber composite through the known physical characteristics of the matrix and fiber. The fibrous material of the layer is presented as homogeneous transversely isotropic with planes of isotropy normal to the direction of reinforcement. Additional variable parameters of the "basic" universal finite element are supplemented with new attributes that determine the thermoelastic properties of the composite components. The new parameters are related to the choice of the type of fibrous composite material in the layer of the finite element, to the setting of structural micromechanical parameters of its components, and to the setting of the reinforcement orientation angle. This allows the calculations to use both traditional and fiber-composite materials in layers of inhomogeneous shells. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the developed approach.

Keywords: three-dimensional multilayer isoparametric finite element, unidirectional fiber composite material, micromechanical characteristics, elastic shell, thermomechanical load, moment finite element scheme.

УДК 539.3

Калашніков О.Б., Кривенко О.П., Лізунов П.П. Універсальний тривимірний скінченний елемент для розрахунку пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – Київ: КНУБА, 2024. – Вип. 112. – С. 93-107.

Робота присвячена розробці нової модифікації скінченного елемента призначеного для розрахунку неоднорідних композитних оболонок. Елемент побудований на базі універсального тривимірного ізопараметричного восьми-вузлового багатощарового скінченного елемента суцільного середовища. Числові приклади демонструють ефективність розробленого підходу.

Табл. 9. Іл. 4. Бібліогр. 34 назв.

UDC 539.3

Kalashnikov O.B., Krivenko O.P., Lizunov P.P. Universal three-dimensional finite element for analyzing of elastic inhomogeneous shells under thermomechanical loads // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 112. – P. 93-107.

The work is devoted to the development of a new modification of the finite element intended for the calculation of inhomogeneous composite shells. The element is constructed on the basis of a universal three-dimensional isoparametric 8-node multilayer finite element of a continuous medium. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the developed approach.

Tabl. 9. Fig. 1. Ref. 34

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): здобувач ступеня кандидата технічних наук, кафедра будівельної механіки Калашніков Олександр Борисович
Адреса робоча: 03035 Україна, м. Київ, проспект Повітряних сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки
Робочий тел.: +38(044) 245-48-29
мобільний тел.: +38(066) 71-88-099
E-mail: kalash2d@gmail.com
ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0009-7825-9809>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник КРИВЕНКО Ольга Петрівна
Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, проспект Повітряних сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, НДІ будівельної механіки
Робочий тел.: +38(044) 245-48-29
мобільний тел.: +38(066) 048-32-77
E-mail: olakop@ukr.net
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки ЛІЗУНОВ Петро Петрович
Адреса робоча: 03035 Україна, м. Київ, проспект Повітряних сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки
Робочий тел.: +38(044) 245-48-29
мобільний тел.: +38(067) 921-70-05
E-mail: lizunov@knuba.edu.ua
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>