

UDC 539.375

ANALYSIS OF STRUCTURES WITH ARBITRARY KINEMATIC BOUNDARY CONDITIONS BY THE SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD

Yu.V Maksimyk,

Doctor of Engineering

V.P. Andriievskiy,

Candidate of Technical Sciences

I.Yu. Martyniuk,

Candidate of Technical Sciences

O.V. Maksimyk,

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Povitroflotsky Ave., 31, Kyiv, 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.140-146

The successful application of ITU to the analysis of structures is largely due to the efficiency of the use of modern software packages, in connection with which the role of program systems that implement the solution process increases. The correct organization of the computing complex, the choice of optimal algorithms for solving systems of linear and nonlinear equations largely determine the possibilities of the method in terms of the structural complexity of the objects under consideration, the accuracy of the results obtained, and the complexity of setting nonlinear problems. Therefore, there is an increased interest in the development of fairly universal computing complexes based on ITU. One of the effective software complexes is the "Strength" system, designed to conduct comprehensive research in the field of mechanics of a deformable solid, the basic principles of construction of which are used in this work in the implementation of a semi-analytical version of the finite element method (FEM).

In this work, solutions of a significant number of control problems of deformation of massive and thin-walled prismatic bodies under different boundary conditions and loads are obtained. In the process of solving new problems, the estimation of the convergence of results was carried out on the basis of a sequential increase in finite elements and contained terms of decomposition, an increase in the accuracy of systems of linear and nonlinear equations, and the accuracy of satisfaction with natural boundary conditions was checked. The developed effective method for solving new complex problems of deformation of prismatic bodies is implemented in the form of complex programs and can be used in design and construction practice in construction, mechanical engineering and other fields of technology.

Keywords: finite element method (FEM), semi-analytical finite element method (SAFEM), stress-strain state, elastic deformation, bending of hinged square plate, cylindrical panel, elastic equilibrium of prismatic beam, thick square plate clamped along the contour.

Entry. A wide range of building structures or machine-building equipment consists of elements that are prismatic bodies of complex shape. Modern methods that are focused on the calculation of a wide class of structures consisting of massive and thin-walled elements [3, 7, 14] should, along with high accuracy of the description of the stress-strain state of objects of complex shape and structure, provide a high rate of convergence to an exact solution with minimal numerical Cost. In this work, solutions of a significant number of control problems of deformation of massive and thin-walled prismatic bodies under different boundary conditions and loads.

Bending a hinged square plate. We consider the elastic equilibrium of a thin square plate with a side under the action of a load normal to its plane, the intensity of which is described by the formula:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi z^1}{a} \sin \frac{\pi z^2}{a}, \quad (1)$$

where q_0 - is the value of the load in the center of the plate. Coordinate axis Z^1 and Z^2 are directed along the sides of the square. The plate is hinged on all side.

The solution of this problem, obtained in the work [9], is taken as a reference. Calculations performed according to the developed method have shown that the finite elemental approach provides a good convergence of the solution to the exact one. Similarly, when approximating a plate with a 2x5 FE grid, the values of the maximum deflection in the center of the plate obtained by the exact and approximate methods differ by less than 1%.

Cylindrical panel loaded with its own weight. One of the most common examples for estimating the convergence of numerical methods for calculating thin-walled objects is the problem of elastic equilibrium of a non-flat rectangular cylindrical panel, hinged on two curved sides and free on the other two, loaded with its own weight (Fig. 1) [6].

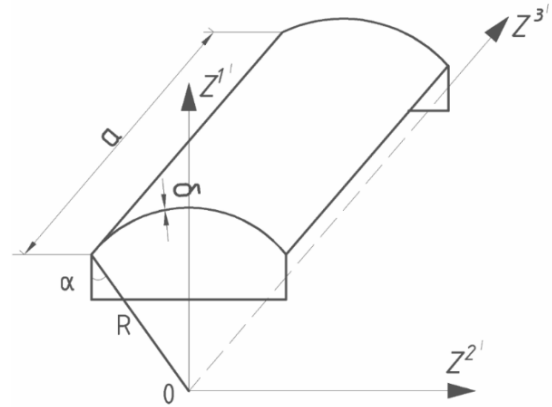


Fig. 1. Design diagram of a cylindrical panel

$$\begin{aligned}
 U_{(z^{3'}=0)}^{k'} &= U_{(z^{3'}=a)}^{k'} = 0, \\
 \sigma_{(z^{3'}=0)}^{3'3'} &= \sigma_{(z^{3'}=a)}^{3'3'} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Fig. 2 shows the graphs of the error change in determining the deflection of the center of the panel calculated in relation to the reference solution [9], in of the dependence on the order of the matrix of the system of allowed equations.

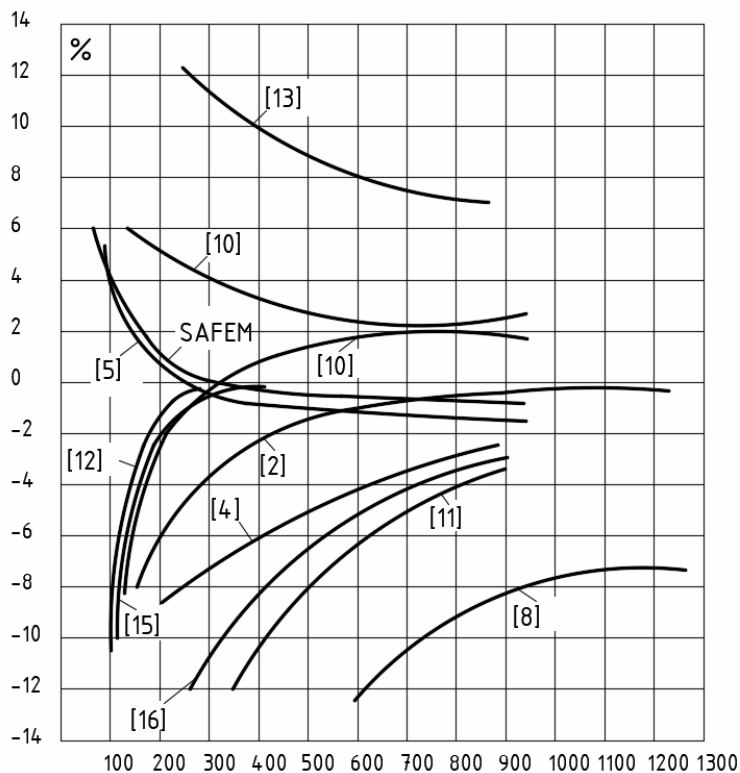


Fig. 2. Graphs of changes in the error in determining the deflection of the center of the panel

The solutions are obtained on the basis of various variants of shell finite elements, FEM when discretized along the one that forms and directs the SAFEM. Their analysis demonstrates the high efficiency of the FEM in the calculation of thin-walled objects.

As can be seen from the figure, the traditional [5] and semi-analytical versions of the FEM, based on the relations of the moment scheme, have approximately the same rate of convergence in this problem. So over the entire range, the change in the number of unknowns is the difference. The results obtained by different variants of the FEM are less than 1%, however, the width of the matrix of the system of allowed equations of the SAFEM is much smaller.

Elastic equilibrium of a prismatic bar. The possibility of applying the developed numerical analysis apparatus to the calculation of massive spatial structures is investigated on

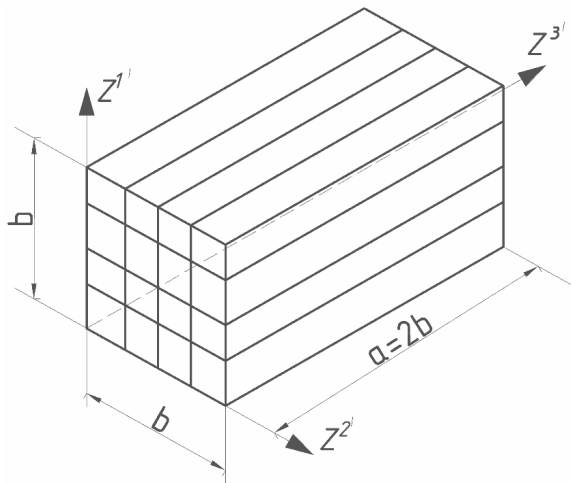


Fig. 3. Design diagram of a prismatic bar

the example of a prismatic beam with a square prismatic (fig. 3). Cross-section - b , the length of the beam - $a = 2b$. On the upper plane ($Z^1 = b$) the object is loaded with a vertical uniformly distributed load of unit intensity. The kinematic boundary conditions are assumed to be the absence of vertical displacements in the plane $Z^3 = 0$ and $Z^3 = a$.

The solution of a similar problem is obtained in [6] on the basis of the generalized method of finite integral transformations. Table 1 shows the values of vertical displacements at different points of the section $Z^3 = a/2$, obtained on the basis of

SAFEM and using the approach [6]. At all points of the section under consideration, the discrepancy in the results is about 1%.

$$\begin{aligned}
 U_{(z^3=0)}^{\alpha'} &= U_{(z^3=a)}^{\alpha'} = 0, \\
 \sigma_{(z^3=0)}^{33'} &= \sigma_{(z^3=a)}^{33'} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Table 1

Z^1	Z^2	SAFEM	[6]	%
0,5b	0,5b	3,41	3,45	1,16
b	0,5b	3,93	3,96	0,76
0,5b	b	3,67	3,71	1,08
b	b	4,20	4,24	0,94

Fig. 4 shows the nature of the change in vertical displacement along the face $Z^1 = b$, $Z^2 = b$. The solid line shows the reference results, the circles show the displacement values calculated by the SAFEM. A good alignment of solutions obtained by different methods is evident.

A thick square slab is clamped along the contour. Approximation by means of functional series requires a justification of the possibility of satisfying different types of kinematic

boundary conditions. For this purpose, the elastic deformation of a thick square slab under the action of a vertical uniformly distributed load applied to the upper plane ($Z^1 = h$) fig. 5.

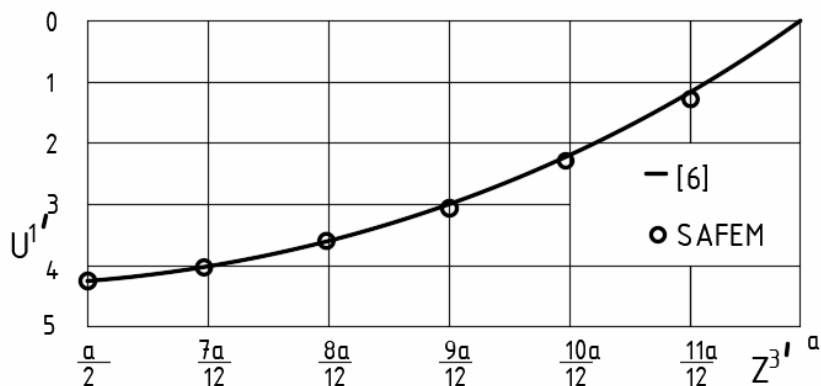


Fig. 4. Graphs of changes in vertical displacement along the face of the beam

$$\begin{aligned}
 U_{i'(z^3=a)} &= 0, \\
 U_{3'(z^3=0)} &= 0, \\
 U_{2'(z^2=a)} &= 0, \\
 U_{i'(z^3=0)} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

The thickness of the slab $h = 0,02m$, the length of the side $2a = 5h$, the intensity of the external load $q = E/50$, where E - is the modulus of elasticity of the material, the Poisson's ratio $\nu = 0,25$. The plate is clamped on all four sides. Due to the symmetry of the object, only the fourth part is considered, the design model of which is shown in fig. 5.

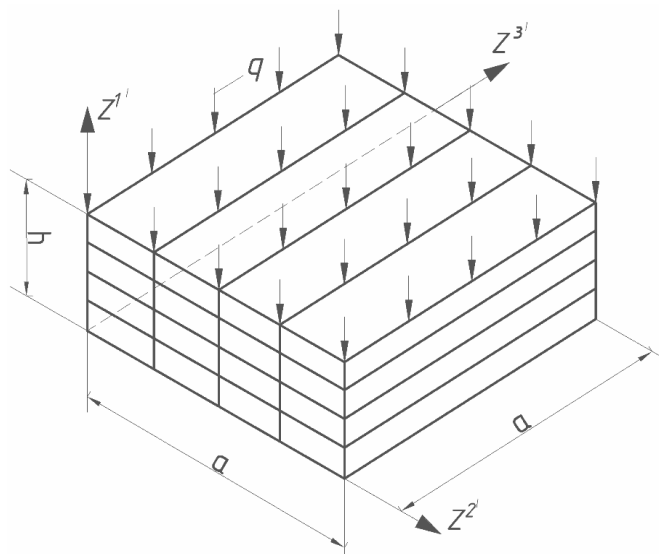


Fig. 5. Design diagram of a thick square slab clamped along the contour

A comparison of the results obtained on the basis of SAFEM and decomposition by orthogonal functions in all three directions is given in Table 2 and 3.

Table 2

Z^1	V_1	M		
		81	375	1029
0	5,414	4,804	5,410	5,512
		-11,27%	-0,07%	+1,81%
$h/2$	5,729	5,121	5,591	5,710
		-10,63%	-2,42%	-0,35%
h	5,723	4,952	5,623	5,770
		-13,50%	-1,75%	+0,82%

Table 3

$Z^{1'}$	$\bar{\sigma}^{3'3'}$	M		
		81	375	1029
0	3,825	3,501	3,767	3,810
		-8,49%	-1,51%	-0,39%
h	4,150	3,750	4,070	4,130
		-9,63%	-1,92%	-0,48%

Table 2 shows the convergence of dimensionless displacements $v_1 = u_1 E / qa$ depending on the visas of the total number of unknowns M , received by HMCE in the center of the plate (upper, middle and lower surfaces), as well as their errors relative to the solutions given in the paper [1].

Conclusion. The obtained data indicate a high rate of convergence of the developed approach in the analysis of structures with arbitrary kinematic boundary conditions.

REFERENCES

1. Bazhenov V. A. Semi-analytical method of finite elements in problems of continuous destruction of spatial bodies: Monograph / [Bazhenov V. A., Gulyar O. I., Piskunov S. O., Sakharov O. S.] – Kyiv: Karavela, 2014.– 235 p.
2. Batoz, Dutt. Further exploration of two simple shell elements. – Rocketry and astronautics, 1972, № 2, p.172-173.
3. Vabishchevich M.O. Solution of nonlinear contact problems of deformation of nodal connections of steel structures /Vabishchevich M.O., Storchak D.A // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 108. – p 178-188.
4. Zuev B.I. et al. Comparison of some models of finite elements in the analysis of thin-walled spatial structures.– In: Finite Element Method in Structural Mechanics. Gorky: GSU Publ., 1975, p. 149-163.
5. Bazhenov V. A. Finite element method in problems of deformation and destruction of bodies of rotation under thermoforce load / [Bazhenov V.A., Piskunov S.O., Maksymyuk Yu.V.] – Kyiv : Karavela Publishing House, 2018.– 316 p.
6. Bazhenov V. A. Semi-analytical method of finite elements in spatial problems of deformation, destruction and shape change of bodies of complex structure / [Bazhenov V.A., Maksym'yuk Yu.V., Martynyuk I.Yu., Maksym'yuk O.V.] - Kyiv: "Caravela" publishing house, 2021. - 280 p.
7. Solodey I.I. Analysis of algorithms for solving geometrically nonlinear problems of mechanics in the scheme of the semi-analytical method of finite elements/ Solodey I.I., Kozub Yu.G., Strygun R.L., Shovkivska V.V. // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 109. – p. 109-119.
8. Stasenko I.V., Kulikov Yu. A. Comparative analysis of finite elements for a circular cylindrical shell.– Izv. Universities. Mashinostroenie Publ., 1974, no. 8, p. 162-164.
9. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plastinki i obolochki [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ.,1966.– 456 p.
10. Bennes G., Dhatt G., Gironn I.M. and Rohichad. Curved triangular elements for the analysis of shell. – Proc. and conf on Matrik Methods in structural Mechanics, Ohio, 1968, p.617-640.
11. Clough R.W., Tohnson C.P. Afinite element approximation for the analysis of this shelss. – Inst. T. Solids struct., 1968, v.4, № 1, p.43-60.
12. Cowper G.R., Lindberg G.M., Olson M.D. A shallow shell finite element of triangular shape. – Inst. T. Solids struct., 1970, № 8, p.1133-1156.
13. Dupuis G.A., Hibbitt H.D., Mc Namara S.F., Marcal P.V. Nonlinear material and geometric behavior of shell structures. – Comput. and struct., 1972, № 1, p.117-121.
14. Pyskunov S.O., Shkryl O.O., Maksymyuk Yu.V. Determination of crack resistance of a tank with elliptical crack // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 106. – P. 14-21.
15. Sabir F.B., Look A.G. A curved cylindrical shell-finite element. Int. – I. Mech. Sci., 1972, v.14, № 2, p.47-58.
16. Schultchen E., Ulonka H., Wurmnest W. Statische Berechnung von Rototionskqrpern unter Beliebiger nichtrotations-symmetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS – Rot. – Techn. Mitt. Krupp. Forsch., 1977, № 2, p.113-126.

Стаття надійшла 07.09.2023

Максим'юк Ю.В., Андрієвський В.П., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В.

РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ З ДОВІЛЬНИМИ КІНЕМАТИЧНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ НАПІВАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Успішне застосування МСЕ до розрахунку конструкцій в значній мірі обумовлено ефективністю використання сучасних програмних комплексів, в зв'язку з чим підвищується роль систем програм, що реалізують процес розв'язання. Правильна організація обчислювального комплексу, вибір оптимальних алгоритмів розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь в значній мірі визначають можливості методу щодо структурної складності розглянутих об'єктів, точності одержуваних результатів і складності постановки нелінійних задач. Тому спостерігається підвищений інтерес до розробки досить універсальних обчислювальних комплексів на основі МСЕ. Одним з ефективних програмних комплексів є система «Міцність», призначена для проведення всебічних досліджень в області механіки твердого тіла, що деформується, основні принципи побудови якої використані в даній роботі при реалізації напіваналітичного варіанту МСЕ.

В даній роботі отримані розв'язки значної кількості контрольних задач деформування масивних і тонкостінних призматичних тіл при різних граничних умовах і навантаженнях. У процесі розв'язання нових задач оцінка збіжності результатів проводилася на основі послідовного збільшення скінчених елементів і утримуваних членів розкладання, підвищення точності систем лінійних і нелінійних рівнянь, а також перевірялася точність задоволення природним граничним умовам. Розроблена ефективна методика розв'язання нових складних завдань деформування призматичних тіл реалізована у вигляді комплексних програм і може бути використана в проектно-конструктивній практиці в будівництві, машинобудуванні та інших галузях техніки.

Ключові слова: метод скінчених елементів (МСЕ), напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ), напружено-деформований стан, пружне деформування, вигин шарнірно закріпленої квадратної пластини, циліндрична панель, пружна рівновага призматичного бруса, затиснена по контуру товста квадратна плита.

Maksymyuk Yu. V., Andriievskiy V. P., Martyniuk I. Yu., Maksymyuk O. V.

ANALYSIS OF STRUCTURES WITH ARBITRARY KINEMATIC BOUNDARY CONDITIONS BY THE SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD

The successful application of FEM to the analysis of structures is largely due to the efficiency of the use of modern software packages, in connection with which the role of program systems that implement the solution process increases. The correct organization of the computing complex, the choice of optimal algorithms for solving systems of linear and nonlinear equations largely determine the possibilities of the method in terms of the structural complexity of the objects under consideration, the accuracy of the results obtained, and the complexity of setting nonlinear problems. Therefore, there is an increased interest in the development of fairly universal computing complexes based on FEM. One of the effective software complexes is the "Strength" system, designed to conduct comprehensive research in the field of mechanics of a deformable solid, the basic principles of construction of which are used in this work in the implementation of a semi-analytical version of the FEM.

In this work, solutions of a significant number of control problems of deformation of massive and thin-walled prismatic bodies under different boundary conditions and loads are obtained. In the process of solving new problems, the estimation of the convergence of results was carried out on the basis of a sequential increase in finite elements and contained terms of decomposition, an increase in the accuracy of systems of linear and nonlinear equations, and the accuracy of satisfaction with natural boundary conditions was checked. The developed effective method for solving new complex problems of deformation of prismatic bodies is implemented in the form of complex programs and can be used in design and construction practice in construction, mechanical engineering and other fields of technology.

Keywords: finite element method (FEM), semi-analytical finite element method (SAMSE), stress-strain state, elastic deformation, bending of hinged square plate, cylindrical panel, elastic equilibrium of prismatic beam, thick square plate clamped along the contour.

УДК 539.375

Максим'юк Ю.В., Андрієвський В.П., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. **Розрахунок конструкцій з довільними кінематичними граничними умовами напіваналітичним методом скінчених елементів** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – Київ: КНУБА, 2023. – Вип. 111. – С. 140-146.

В даній роботі отримані розв'язки значної кількості контрольних задач деформування масивних і тонкостінних призматичних тіл при різних граничних умовах і навантаженнях. У процесі розв'язання нових задач оцінка збіжності результатів проводилася на основі послідовного збільшення скінчених елементів і утримуваних членів розкладання, підвищення точності систем лінійних і нелінійних рівнянь, а також перевірялася точність задоволення природним граничним умовам. Розроблена ефективна методика розв'язання нових складних завдань деформування призматичних тіл реалізована у вигляді комплексних програм і може бути використана в проектно-конструктивній практиці в будівництві, машинобудуванні та інших галузях техніки.

Табл. 3. Іл. 5. Бібліогр. 16 назв.

UDC 539.375

Maksymyuk Yu.V., Andriievskiy V.P., Martyniuk I.Yu., Maksymyuk O.V. Analysis of structures with arbitrary kinematic boundary conditions by the semi-analytical finite element method // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 111. – P. 140-146.

In this work, solutions of a significant number of control problems of deformation of massive and thin-walled prismatic bodies under different boundary conditions and loads are obtained. In the process of solving new problems, the estimation of the convergence of results was carried out on the basis of a sequential increase in finite elements and contained terms of decomposition, an increase in the accuracy of systems of linear and nonlinear equations, and the accuracy of satisfaction with natural boundary conditions was checked. The developed effective method for solving new complex problems of deformation of prismatic bodies is implemented in the form of complex programs and can be used in design and construction practice in construction, mechanical engineering and other fields of technology.

Tabl. 3. Fig. 5. Ref. 16

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): професор, доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Максим'юк Юрій Всеволодович.

Author (degree, academic rank, position): Associate Professor, Doctor of Science (Engineering), Professor at the KNUCA Department of Structural Mechanics Maksymyuk Yurii Vsevolodovych.

Адреса: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-38.

Мобільний тел.: +38(067) 230-94-72.

E-mail: maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА Андрієвський Віктор Петрович

Author (degree, academic rank, position): candidate of technical sciences, Associate Professor, Associate Professor at the KNUCA Department of Structural Mechanics Andriievskiy Viktor Petrovich

Адреса: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-38.

Мобільний тел.: +38(098) 106-25-20

E-mail: vandriievskiy@hotmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6172-8797>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки КНУБА Мартинюк Іван Юрійович.

Author (academic degree, academic rank, position): candidate of technical sciences, doctoral student of the KNUCA department of structural mechanics Martyniuk Ivan Yuriyovych.

Адреса: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

Мобільний тел.: +38(096) 068-00-29

E-mail: ivan.martinyuk@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): аспірант Київського національного університету будівництва і архітектури Максим'юк Олександр Всеволодович.

Author (Academic Degree, Academic Title, Position): Maksymyuk Oleksandr Vsevolodovych, graduate student of Kyiv National University of Construction and Architecture.

Адреса: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

Мобільний тел.: +38(067) 306-17-81

E-mail: sashamaksymiuk@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2367-3086>