УДК 534.11

АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ КІНЦЕВОМІРНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ВІБРОДЖЕРЕЛ З УЩІЛЬНЮВАНИМ ЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ.

Ю.В. Човнюк[1],
канд. техн. наук, доцент

В.Т. Кравчук[2],
канд. техн. наук, доцент

О.В. Приймаченко[2],
канд. техн. наук, доцент

П.П. Чередніченко[2],
доцент

[1]*Національний авіаційний університет*

[2]*Київський національний університет будівництва і архітектури*

DOI: 10.32347/2410-2547.2022.109.369-386

Розвинуто підхід до розв'язку задач про збудження джерелами коливань/вібрацій хвиль у лінійно-в'язкопружних середовищах, моделюючих ущільнювані бетонні/будівельні суміші зі змінними по глибині механічними характеристиками. Проведений аналіз контактних напружень і зусиль, виникаючих під осцилюючим штампом, типів хвиль, які генеруються у середовищі і на його поверхні, енергії, яка переноситься кожним типом хвиль для різних вібраційних джерел.

Ключові слова: динаміка, взаємодія, кінцевомірні поверхневі віброджерела, ущільнення, лінійно-в'язкопружне середовище, бетонна/будівельна суміш, резонанси.

Постановка проблеми

При розрахунку поведінки споруд та будівель, які знаходяться під впливом динамічних навантажень (наприклад, сейсмічних), при визначенні коливань масивних вібруючих об'єктів: турбін, верстатів, залізниць – на споруди, котрі розміщені поблизу, при вивченні процесів ущільнення та формування вібраційним полем бетонних/будівельних сумішей, при дослідженні взаємодії пружних, в'язкопружних хвиль з поверхневими об'єктами (вібромайданчиками), виникає необхідність розв'язку динамічних контактних задач з довільною у плані областю контакту. До цих же задач зводиться оптимізація поверхневих вібросейсмодатчиків, синтез спрямованих сейсмічних антен для глибинного просвічування Землі, створення спрямованого випромінювання у дефектоскопії і т.п.

Із наведених прикладів зрозуміло, наскільки важливе всебічне вивчення особливостей коливань системи «штамп - пружне/в'язкопружне середовище, однак виникаючі тут інтегральні рівняння є серйозною перепоною на шляху досліджень. Спроби обійти ці труднощі породжують низку наближених, «інженерних» підходів, у межах котрих реакції середовища моделюються пружними і демпфуючими зв'язками з деякою "приєднаною масою».

Характеристики пружних елементів й величина приєднаної маси підбираються зазвичай за експериментальними даними. Коливання кінцевомірної системи, яка у результаті такого підходу утворюється, визначаються звичайними методами теоретичної механіки. Особливо широко такий підхід застосовується у будівельних розрахунках, оскільки він з достатньою точністю дозволяє визначати статичні осади споруд, дає задовільні результати на певній, фіксованій частоті. При аналізі коливань у широкому діапазоні частот в'язкопружне середовище (модель ущільнюваної вібраційним полем бетонної/будівельної суміші) є суттєво нескінченно вимірною системою з власними резонансами й складними дисперсійними властивостями і тому не апроксимується скінченим набором пружин.

Наступним кроком до більш повного врахування властивостей в'язкопружного середовища є підхід, за якого деформація його поверхні визначається шляхом розв'язку відповідної першої крайової задачі теорії пружності, однак розподіл навантаження у зоні контакту (віброманданчика з ущільнюваною сумішшю) не визначається через розв'язок відповідних інтегральних рівнянь, а задається у деякому виді, наприклад, рівномірному чи параболічному [1-3]. Такий спосіб можна трактувати як варіаційно-різницевий метод з використанням у якості базису одного елементу – навантаження заданої форми. Наскільки правильно при цьому описуються якісні та кількісні характеристики розв'язку, можна встановити тільки після порівняння з результатами, отриманими шляхом розв'язку інтегральних рівнянь.

З метою виявлення характерних особливостей динаміки масивних штампів на в'язкопружній основі наведені обчислення у даному дослідженні, де використані методи розв'язку інтегральних рівнянь, викладені у роботах [4-8]. Аналізу чисельних результатів та обговоренню виявлених тут якісних ефектів і присвячена дана робота.

Аналіз публікацій по темі дослідження

Крім контактних задач, розглянутих і розв'язаних у роботах [1-8], інтегральні рівняння виникають також при вивченні розповсюдження та дифракції електромагнітних хвиль, у задачах акустики, гідро-аеромеханіки, теорії тріщин, теплообміну та багатьох інших. Мабуть, справедливим є твердження: будь-яка крайова задача математичної фізики зі змішаними граничними умовами може бути зведена до розв'язку інтегральних рівнянь.

Звідси зрозуміла важливість обґрунтування та розробки методів їх розв'язку. По інтегральним рівнянням накопичена доволі велика література, гарні огляди її присутні у монографіях [9-11], а також у роботах [12-25].

Результати цитованих вище робіт будуть частково використані у даному дослідженні динамічної взаємодії кінцевомірних поверхневих віброджерел з ущільнюваним лінійно-в'язкопружнимсередовищем. Аналіз наявних наукових публікацій дозволяє стверджувати авторам даної роботи, що такий підхід для вказаних вище задач реалізований вперше.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні методу розв'язку задач про збудження джерелами вібрації/коливань хвиль у в'язкопружному середовищі, яке моделює ущільнювану вібраційним полем бетонну/будівельну суміш, задля подальшого всебічного аналізу типів хвиль, які виникають у вказаному вище середовищі й на його поверхні, енергії, що переноситься кожним типом хвиль для різних кінцевомірних віброджерел, явищ резонансу у глибинних прошарках суміші великої товщини, контактних напружень та зусиль, виникаючих під осцилюючим штампом, а також переміщень таких штампів. При цьому враховані змінні за глибиною суміші її механічні характеристики (стратифіковане середовище), а крайові задачі динамічної теорії в'язкопружності оброблюваного вібраційним полем об'єму розв'язані чисельно-аналітичними методами за допомогою інтегральних рівнянь.

Виклад основного змісту дослідження

Системи інтегральних рівнянь для поверхневих віброджерел
1. Постановка задачі зі змішаними граничними умовами та її розв'язок для стратифікованогонапівпростору

Розглянемо задачу зі змішаними граничними умовами. Нехай на поверхні стратифікованого простору/об'ємубетонної/будівельноїсуміші у області Ω задані переміщення:

$$\vec{u}(x,y,0)=\vec{f}(x,y),\ (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

а напруження $\vec{q}(x,y)$ невідомі. Поза Ω вважаємо, що напруження відсутні:

$$\vec{\tau}\big|_{z=0}=0,\ (x,y)\notin\Omega. \tag{2}$$

Для того, щоб побудувати розв'язок даної задачі за допомогою матриці Гріна [8] у вигляді:

$$\vec{u}(x,y,z)=\iint\limits_{\Omega}\vec{k}(x-\xi,y-\eta,z)\cdot\vec{q}(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{3}$$

де $\vec{k}$ - матриця Гріна пружного/в'язкопружного прошарку, необхідно попередньо знайти невідомі поверхневі напруження $\vec{q}$, відносно котрих умови (1) й подання (3) дають систему інтегральних рівнянь першого роду типу згортки:

$$\vec{K}\vec{q}\equiv\iint\limits_{\Omega}\vec{k}(x-\xi,y-\eta,0)\cdot\vec{q}(\xi,\eta)d\xi d\eta=\vec{f}(x,y),\ (x,y)\in\Omega. \tag{4}$$

Задачі зі змішаними граничними умовами виникають, зокрема, при вивченні взаємодії в'язкопружнихтіл. Зміна типу граничних умов відбувається тут у області контакту, звідси й походить, до речі, назва таких задач - **контактні задачі.** Недеформовані тіла (власне вібромайданчик), які контактують з в'язкопружним середовищем (бетонною/будівельною сумішшю), прийнято називати **штампами.**

Нехай на поверхні $z=0$ розміщено N штампів з плоскою основою, які займають області Ω_k, $(k=1,...,N)$ або $k=\overline{(1,N)}$; $\Omega=\bigcup\limits_k\Omega_k$. Усталені коливання штампів викликані осцилюючими навантаженнями, прикладеними до них, чи хвилями, що надходять від поверхневих віброджерел, виду:

$$\vec{\tau}\big|_{z=0} = \vec{g}(x,y),\ \ (x,y)\in S. \tag{5}$$

Припустимо, що штампи зчеплені з середовищем, тобто:

$$\vec{u}(x,y,0) = \vec{u}_k(x,y),\ \ (x,y)\in \Omega_k,\ \ k=\overline{(1,N)}, \tag{6}$$

$\vec{u}_k$ – вектор переміщення основи k-го штампу. (Якщо розглядають прошарок скінченої товщини h, тоді слід задати на поверхні $z=h$ аналогічні до (1), (2), (5), (6) умови з відповідною заміною $z=0 \Rightarrow z=h$, $\vec{f}(x,y) \Rightarrow \vec{f}_h(x,y)$, $\vec{g}(x,y) \Rightarrow \vec{g}_h(x,y)$, $\vec{u}_k(x,y) \Rightarrow \vec{u}_{kh}(x,y)$).

Вібрація штампів описується рівняннями руху твердого тіла [26]:

$$\begin{cases} \vec{u}_k = \vec{u}_k^c + \vec{\varphi}_k \times \vec{R}_k,\ \ -\omega^2 \cdot m_k \cdot \vec{u}_k^c = \vec{P}_k, \\ -\omega^2 \cdot J_{kl} \cdot \varphi_{kl} = M_{kl},\ \ l=\overline{(1,3)},\ \ k=\overline{(1,N)}. \end{cases} \tag{7}$$

Тут $\vec{u}_k^c$ - вектор переміщення центру маси $O_k(x_k, y_k, z_k)$ k-го штампу; $\vec{R}_k = \{x-x_k, y-y_k, z-z_k\}$; $\vec{\varphi}_k = \{\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \varphi_{k3}\}$ - вектор кутів повороту штампа навколо осей $O_k\xi_k$, $O_k\eta_k$, $O_k\varsigma_k$, які проходять через центр маси штампу O_k й паралельних осям координат Ox, Oy, Oz; m_k – маса; J_{k1}, J_{k2}, J_{k3} – моменти інерції k-го штампу відносно осей $O_k\xi_k, O_k\eta_k, O_k\varsigma_k$; $\vec{P}_k$ - головний вектор; $\vec{M}_k = \{M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}\}$ - головний момент сил, діючих на штампи. У (7) враховано, що для гармонічних коливань (вібромайданчиків) $\partial^2\vec{u}/\partial t^2 = -\omega^2 \cdot \vec{u}$, де ω – кругова частота коливань штампів.

$\vec{q}(x,y)$ – вектор поверхневих напружень, тобто вектор навантажень, прикладених до оброблюваного середовища/суміші. Відповідно $-\vec{q}(x,y)$, $(x,y)\in\Omega_k$ - реакція середовища на діючий на нього штамп. Звідси:

$$\vec{P}_k = \vec{F}_k - \iint_{\Omega_k} \vec{q}\,dxdy,\ \ \vec{M}_k = \vec{N}_k - \iint_{\Omega_k} (\vec{R}_k \times \vec{q})\,dxdy, \tag{8}$$

$\vec{F}_k, \vec{N}_k$ – задані головний вектор і головний момент сил, прикладених до k-го штампу.

Невідомі $\vec{u}_k$ можуть бути визначені з (7), якщо відомі контактні напруження $\vec{q}$, що входять у $\vec{P}_k, \vec{M}_k$. Останні визначаються з систем інтегральних рівнянь (4), правою частиною котрих у відповідності з (1) повинні бути $\vec{u}_k$. Таким чином, для визначення $\vec{u}_k$ треба знати $\vec{q}$, а для знаходження $\vec{q}$ необхідно знати $\vec{u}$ виникає замкнене коло. Розірвати його дозволяє обмеженість числа степенів вільності руху, які враховуються у задачах динаміки твердого тіла та лінійність усіх співвідношень (теорія лінійної в'язкопружності).

Переміщення центру маси штампів $\vec{u}_k^c$ й вектор кутів повороту $\vec{\varphi}_k$ розкладаємо за одиничними ортами $\vec{e}_m$:

$$\vec{u}_k^c = \sum_{m=1}^{3} u_{k,m}^c \cdot \vec{e}_m, \;\; \vec{\varphi}_k = \sum_{m=1}^{3} \varphi_{k,m} \cdot \vec{e}_m. \tag{9}$$

Враховуючи перше зі співвідношень (7), для переміщень *k*-го штампу $\vec{u}_k$ маємо:

$$\vec{u}_k = \sum_{m=1}^{3} \left(u_{k,m}^c \cdot \vec{e}_m + \varphi_{k,m} \cdot (\vec{e}_m \times \vec{R}_k) \right). \tag{10}$$

Введемо характеристичну функцію:

$$\chi_k(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \Omega_k, \\ 0, & (x,y) \notin \Omega_k. \end{cases} \tag{11}$$

З використанням χ_k переміщення основ усіх штампів, а у силу граничних умов (6) – й поверхні середовища під ними, можна подати у вигляді суми $(6N+1)$ складових:

$$\vec{u}(x,y,0) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{3} \left(u_{k,m}^c \cdot \vec{e}_m + \varphi_{k,m} \cdot (\vec{e}_m \times \vec{R}_k) \right) - \vec{u}_н, \;\; (x,y) \in \Omega, \tag{12}$$

$\vec{u}_н = \iint\limits_S \vec{k}(x-\xi, y-\eta, 0) \cdot \vec{g}(\xi,\eta) d\xi d\eta$ - переміщення поверхні суміші заданим навантаженням (5). Сума (12) є правою частиною системи інтегральних рівнянь (4), й, у силу лінійності, її розв'язок також подамо у вигляді суми $(6N+1)$ складових:

$$\vec{q}(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{3} \left(u_{k,m}^c \cdot \vec{q}_{k,m} + \varphi_{k,m} \cdot \vec{q}_{k,m+3} \right) - \vec{q}_н. \tag{13}$$

Тут $\vec{q}_{k,m}, \vec{q}_н$ задовольняють наступним системам інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \vec{K} \cdot \vec{q}_{k,m} = \chi_k \cdot \vec{e}_m, \\ \vec{K} \cdot \vec{q}_{k,m+3} = \chi_k \cdot (\vec{e}_m \times \vec{R}_k), \;\; m = \overline{(1,3)}, \\ \vec{K} \cdot \vec{q}_н = \vec{u}_н, \;\; k = \overline{(1,N)}. \end{cases} \tag{14}$$

Характеристики переміщень штампів $\vec{u}_k^c, \vec{\varphi}_k$ визначаються з систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають після підстановки (13) у (7):

$$\vec{E}_k \cdot \vec{s}_k + \sum_{j=1}^{N} \vec{R}_{kj} \cdot \vec{s}_j = \vec{T}_k, \;\; k = \overline{(1,N)}, \tag{15}$$

де

$$\vec{s}_k = (u_{k,1}^c, u_{k,2}^c, u_{k,3}^c, \varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, \varphi_{k,3}),$$

$$\vec{E}_k = -\omega^2 diag(m_k, m_k, m_k, J_{k1}, J_{k2}, J_{k3})$$

діагональна матриця $\dim(6\times 6)$, $\vec{R}_{kj} = \begin{pmatrix} \vec{A}_{1,kj}, \vec{A}_{2,kj}, ..., \vec{A}_{6,kj} \\ \vec{B}_{1,kj}, \vec{B}_{2,kj}, ..., \vec{B}_{6,kj} \end{pmatrix}$ - матриця

$\dim(6\times 6)$, $\vec{A}_{m,kj} = \iint\limits_{\Omega_k} \vec{q}_{j,m} dxdy$,

$$\vec{B}_{m,kj} = \iint\limits_{\Omega_k} \left(\vec{R}_k \times \vec{q}_{j,m}\right) dxdy, \quad m = \overline{(1,6)}, \quad \vec{T}_k = \begin{pmatrix} \vec{F}_k + \iint\limits_{\Omega_k} \vec{q}_н dxdy \\ \vec{N}_k + \iint\limits_{\Omega_k} \left(\vec{R}_k \times \vec{q}_н\right) dxdy \end{pmatrix}.$$

Отже, для розрахунку коливань масивних штампів на поверхні в’язкопружного середовища необхідно попередньо розв’язати системи інтегральних рівнянь (14) виду (4). Виведення систем (14), (15) зроблене для найбільш загального випадку контакту – контакту зі зчепленням; для інших видів контакту їх розмірність буде меншою. Так, для контакту без тертя, коли на всій поверхні суміші задана відсутність дотичних напружень: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, при $-\infty \le x, y \le \infty$, а у області контакту – рівність тільки вертикальних переміщень (саме цей випадок найбільш досліджений у теорії віброущільнення в’язкопружних бетонних/будівельних сумішей): $u^{(3)}(x,y,0) = u_k{}^{(3)}(x,y)$, $(x,y)\in\Omega_k$, $k = \overline{(1,N)}$, замість систем виду (4) маємо одне інтегральне рівняння:

$$K_{33}\cdot q = \iint\limits_{\Omega} k_{33}(x-\xi, y-\eta, 0)\cdot q^{(3)}(\xi,\eta) d\xi d\eta = f_3(x,y), \ (x,y)\in\Omega. \quad (16)$$

Алгебраїчні системи відносно: $\vec{s}_k = (u^c_{k,3}, \varphi_{k,1}, \varphi_{k,2})$ $(u^c_{k,1} = u^c_{k,2} = \varphi_{k,3} = =0)$ можна отримати з (15) використанням нульових рядків та стовпчиків.

Викладений вище спосіб можна застосувати до аналізу не тільки вібрації масивних штампів (на поверхні бетонної/будівельної суміші), але й для довільних поверхневих об’єктів (т.з. поверхневе віброущільнення бетонних сумішей). Єдина умова: їх рух повинен описуватись скінченою системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь. При цьому змінюються лише системи (14); вид інтегральних рівнянь (4), які характеризують реакцію суміші, залишається в усіх випадках одним і тим самим.

2. Фундаментальний розв’язок системи диференціальних рівнянь динаміки в’язко пружного середовища, яке описується моделлю Максвелла

При використанні технологій глибинного формування (ущільнення) бетонних/будівельних сумішей, яке здійснюють за допомогою циліндричних вібраторів, виникає необхідність дослідження термонапруженого стану подібних віброджерел, занурених у оброблюване середовище.

Нижче розглянута плоска задача про розрахунок термічних в’язкопружних напружень у нескінченному циліндричному однородному ізотропному тілі (модель глибинного вібратора для ущільнення суміші). За допомогою перетворень Лапласа та Фур'є побудований фундаментальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у переміщеннях. У загальному нестаціонарному випадку розглянутий лише малий інтервал часу $t << \tau_0$, де τ_0 – час релаксації середовища (оброблюваної суміші). У квазістатичному наближенні фундаментальний розв'язок отриманий для будь-яких значень t (час).

Розглянемо наступну плоску задачу. Циліндричне тіло нескінченної довжини (модель глибинного вібратора) при $t \geq 0$ знаходиться під впливом температурного поля $T = T(x_1, x_2, t)$, котре вважається заданим, причому $T(x_1, x_2, 0) = 0.$ необхідно розрахувати виникаючі у тілі вібратора напруження і деформації. У початковий момент $t = 0$ по усьому об'єму тіла вібратора переміщення та швидкості вважаємо рівними нулю (питання про крайові умови буде обговорюватись нижче). Тіло вібратора вважаємо утвореним із однорідного ізотропного в'язкопружного матеріалу, властивості котрого можуть бути описані моделлю Максвелла. Як відомо [27], середовище Максвелла задається системою рівнянь:

$$\varepsilon = \frac{(1-2\mu)}{2G \cdot (1+\mu)} \cdot \sigma + \alpha \cdot T, \tag{17}$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial t} + \frac{s_{ij}}{\tau_0} = 2G \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial t}, \tag{18}$$

де G та μ – відповідно модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона; τ_0 – час релаксації середовища; $\sigma = (1/3) \cdot \sum_i \sigma_{ii}$; $\varepsilon = (1/3) \cdot \sum_i \varepsilon_{ii}$, s_{ij} та l_{ij} – девіатори напружень та деформацій відповідно; T – температура тіла (абсолютна, по шкалі Кельвіна); α – температурний коефіцієнт деформації матеріалу вібратора. Зі співвідношень (17) та (18) знаходимо рівняння, котрим повинні задовольняти компоненти тензора σ_{ij} (тензора напружень) у розглядуваному в'язкопружному середовищі (тіла глибинного вібратора):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\sigma_{ij}}{\tau_0} = 2G \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \left(2G_\alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{3\mu}{1+\mu} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\sigma}{\tau_0} \right) \delta_{ij}. \tag{19}$$

Тут G_α – температурний модуль зсуву матеріалу вібратора, δ_{ij} – тензор (символ) Кронекера.

Використовуючи рівняння руху середовища:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{20}$$

де ρ – щільність матеріалу вібратора, а також враховуючи, що $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ (тобто геометрична нелінійність матеріалу вібратора не враховується), після виключення з рівнянь (17), (19) та (20) величин σ_{ij} та σ прийдемо до рівняння відносно вектора переміщення $\vec{u}(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\vec{u}\right)+\frac{1}{(1-2\mu)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\cdot\frac{(1+\mu)}{3\tau_0}\right)grad\left(div\vec{u}\right)-\frac{\rho}{G}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)\cdot\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=$$

$$=2\cdot\frac{(1+\mu)}{(1-2\mu)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)grad\left(\alpha\cdot T\right), \quad (21)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Вводячи оператор:

$$L\equiv\frac{\partial}{\partial t}\Delta+\frac{1}{(1-2\mu)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2\cdot(1+\mu)}{3\tau_0}\right)grad\,div-\frac{\rho}{G}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

рівняння (21) можна подати у вигляді:

$$L\left[\vec{u}(x,t)\right]=\vec{f}_0(\vec{x},t), \quad (22)$$

де $\vec{f}_0(\vec{x},t)=2\cdot\frac{(1+\mu)}{(1-2\mu)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)grad(\alpha\cdot T)$ – відома функція. Частинний розв'язок рівняння (22) можна подати у наступному вигляді:

$$\vec{u}(\vec{x},t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{ik}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)\cdot f_{k0}(\vec{y},\tau)dy_1dy_2, \quad (23)$$

де $f_{k0}(\vec{y},\tau)=2\cdot\frac{(1+\mu)}{(1-2\mu)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)\left\{grad(\alpha\cdot T)\right\}_k$, (H_{ik}) – матриця Гріна (фундаментальний розв'язок) рівняння (20). Компоненти H_{ik} задовольняють системі рівнянь:

$$L\left[H_{ik}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau\right]=\delta_{ik}\cdot\delta(\vec{x}-\vec{y})\cdot\delta(t-\tau),\ \ i,k=1,2, \quad (24)$$

де δ – символ функції П. Дірака.

Застосовуючи до рівнянь (24) перетворення Лапласа по t й Фур'є по одній з координат, прийдемо до системи звичайних диференціальних рівнянь, з котрої неважко отримати диференціальні рівняння 4-го порядку для Фур'є-Лаплас – образів кожної з компонент H_{ik}. Далі знаходимо частинний розв'язок кожного з цих рівнянь [28], регулярний на нескінченності. У загальному випадку знаходження точних виразів оригіналів H_{ik} доволі складне [29]. Обмежуючись випадком малих інтервалів часу $t<<\tau_0$, для компонент H_{ik} фундаментального розв'язку рівняння (21) отримаємо вирази, подані нижче.

$$H_{11}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)\approx\frac{G}{4\rho}\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}}\frac{\partial}{\partial|\xi_2|}\left\{\frac{|\xi_2|}{r^2}\int_b^{t-\tau}\sqrt{s_1}I_{1/2}\left(\frac{s_1}{2\tau_0}\right)\exp\left(-\frac{\eta}{2\tau_0}\right)d\eta\right\}\times$$

$$\times\theta(t-\tau-b)-\frac{G}{4\rho\sqrt{2\pi}}(\kappa-C\cdot\kappa)^{-1/4}\exp\{-C(t-\tau)\}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial|\xi_2|}\left\{\frac{|\xi_2|}{r^2}\int\limits_{\beta}^{t-\tau}\sqrt{s_2}I_{1/2}(\gamma\cdot s_2)\exp[-(\kappa-C)\cdot\eta]d\eta\theta(t-\tau-\beta)-\right.$$

$$-\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)}(\kappa+C\cdot\kappa)^{1/4}\times$$

$$\times\int\limits_{\beta}^{t-\tau}\frac{1}{\sqrt{s_2}}I_{-1/2}(\gamma\cdot s_2)\exp[-(\kappa-C)\cdot\eta]d\eta\theta(t-\tau-\beta), \tag{25}$$

$$H_{12}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)\approx\frac{\xi_1\cdot\xi_2}{4\sqrt{\pi}\cdot r^2}\exp[-C(t-\tau)]\theta(t-\tau-\beta)\times$$

$$\times\left\{\frac{(1-2\mu)}{2\sqrt{2}\cdot(1-\mu)}(\kappa+C\cdot\kappa)^{1/4}\cdot\int\limits_{\beta}^{t-\tau}\frac{1}{\sqrt{s_2}}I_{-1/2}(\gamma\cdot s_2)\times\right.$$

$$\times\exp[-(\kappa-C)\cdot\eta]d\eta+\frac{\sqrt{2}G}{\rho\cdot r^2}(\kappa+C\cdot\kappa)^{-1/4}\times$$

$$\left.\times\int\limits_{\beta}^{t-\tau}\sqrt{s_2}I_{1/2}(\gamma s_2)\exp[-(\kappa-C)\eta]d\eta\right\}-$$

$$-\frac{\xi_1\cdot\xi_2}{4r^2\cdot\sqrt{\pi\cdot\tau_0}}\cdot\theta(t-\tau-b)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{b}^{t-\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}I_{-1/2}\left(\frac{s_1}{2\tau_0}\right)\exp\left[\frac{-\eta}{2\tau_0}\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{2G\tau_0}{\rho r^2}\int\limits_{b}^{t-\tau}\sqrt{s_1}\cdot I_{1/2}\left(\frac{s_1}{2\tau_0}\right)\exp\left\{-\frac{\eta}{2\tau_0}\right\}d\eta\right), \tag{26}$$

$$H_{21}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)\approx\frac{\xi_1\cdot\xi_2}{4\sqrt{\pi}r^2}\sqrt{\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}}\cdot\theta(t-\tau-\beta)\times$$

$$\times\left\{\sqrt{\frac{1-2\mu}{4(1-\mu)}}(\kappa+C\cdot\kappa)^{1/4}\cdot\exp[-C(t-\tau)]\times\right.$$

$$\times\int\limits_{\beta}^{t-\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{s_2}}I_{-1/2}(\gamma s_2)\exp[-(\kappa-C)\eta]d\eta+\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\frac{2G}{\rho r^2}}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\exp[-C(t-\tau)]}{(\kappa+C\cdot\kappa)^{1/4}}\int\limits_{\beta}^{t-\tau}\sqrt{s_2}I_{1/2}(\gamma s_2)\cdot\exp[-(\kappa+C)\eta]d\eta\right)\right\}-$$

$$-\frac{\xi_1\cdot\xi_2}{4r^2\sqrt{\pi\tau_0}}\cdot\theta(t-\tau-b)\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{b}^{t-\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}\exp\left(-\frac{\eta}{2\tau_0}\right)I_{-1/2}\left(\frac{s_1}{2\tau_0}\right)d\eta+\right.$$

$$+\frac{2G\tau_0}{\rho r^2}\int_b^{t-\tau}\sqrt{s_1}\cdot\exp\left[-\frac{\eta}{2\tau_0}\right]\cdot I_{1/2}\left(\frac{s_1}{2\tau_0}\right)d\eta\Bigg), \tag{27}$$

$$H_{22}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)\approx\frac{\theta(t-\tau-\beta)}{4\sqrt{2\pi}\cdot(\kappa+C\kappa)^{1/4}}\frac{G}{\rho}\exp\left[-C(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial|\xi_2|}\left\{\frac{|\xi_2|}{r^2}\cdot\int_\beta^{t-\tau}\sqrt{s_2}\cdot I_{1/2}(\gamma s_2)\exp\left[-(\kappa+C)\cdot\eta\right]d\eta\right\}-$$

$$-\frac{G}{4\rho}\cdot\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}}\cdot\theta(t-\tau-b)\cdot\frac{\partial}{\partial|\xi_2|}\left\{\frac{|\xi_2|}{r^2}\cdot\int_\beta^{t-\tau}\sqrt{s_1}\cdot I_{1/2}\left(\frac{s_1}{2\tau_0}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\eta}{2\tau_0}\right)d\eta\right\}-$$

$$-\frac{\theta(t-\tau-b)}{8\sqrt{\pi\tau_0}}\cdot\int_b^{t-\tau}\frac{1}{\sqrt{s_1}}\exp\left(-\frac{\eta}{2\tau_0}\right)\cdot I_{-1/2}\left(\frac{s_1}{2\tau_0}\right)d\eta. \tag{28}$$

Тут $I_\nu(y)$ - модифікована функція Бесселя ν-го порядку; $\theta(y)$ - функція Хевісайда; $\xi_i = x_i - y_i$, $i=(1,2)$; $s_1 = s_1(\eta)=\sqrt{\eta^2-b^2}$; $b = r\cdot\sqrt{\frac{\rho}{G}}$; $s_2 = s_2(\eta)=\sqrt{\eta^2-\beta^2}$; $\beta=\sqrt{\frac{\rho(1-2\mu)}{2G\cdot(1-\mu)}}$; $r^2={\xi_1}^2+{\xi_2}^2$; $C=\frac{(1+\mu)}{3\tau_0\cdot(1-\mu)}$; $2\gamma=\frac{1}{\tau_0}+C$; $2\kappa=\frac{1}{\tau_0}+C.$

У переважній більшості задач практики інерційні ефекти не відіграють значної ролі [27]. Це означає, що у рівнянні (21) можна знехтувати членами, які мають у своєму складі другу та третю похідні по часу, тобто у квазістатичному наближенні замість рівняння (21) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\vec{u})+\frac{1}{(1-2\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\cdot\frac{1+\mu}{3\tau_0}\right)grad\,div\vec{u}=2\cdot\frac{(1+\mu)}{(1-2\mu)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_0}\right)\cdot grad(\alpha\cdot T). \tag{21*}$$

Згідно викладеної вище методики, для фундаментального розв’язку у цьомувипадку знаходимо (при всіх $t>0$) наступні вирази:

$$H_{11}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=\frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\frac{{\xi_2}^2}{r^2}\cdot\left[1-\frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)}\cdot\exp\left[-C\cdot(t-\tau)\right]\right]+\right.$$

$$\left.+\left[1+\frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)}\cdot\exp\left[-C(t-\tau)\right]\right]\cdot\ln r\right\}, \tag{29}$$

$$H_{12}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=H_{21}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=-\frac{\xi_1\cdot\xi_2}{4\pi r^2}\cdot\left\{1-\frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)}\cdot\exp\left[-C(t-\tau)\right]\right\}, \tag{30}$$

$$H_{22}(\vec{x}-\vec{y};t-\tau)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{{\xi_2}^2}{r^2}\left[\frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)}\cdot\exp\left[-C(t-\tau)\right]-1\right]+\right.$$

$$+\left[1+\frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)}\cdot\exp\left[-C(t-\tau)\right]\right]\cdot\ln r\Bigg\}. \qquad (31)$$

У практично цікавих випадках є доцільним розгляд двох основних типів крайових умов:

А. На границі плоскої області задаються значення вектора переміщення $\vec{u}(\vec{x},t)$.

Б. На границі області задані значення компонент тензору напружень. Це рівносильне тому, що на границі заданою функцією є деяка лінійна комбінація похідних вектору $\vec{u}(\vec{x},t)$.

Для рівняння (21) можна отримати співвідношення, котре є узагальненням відомої формули Гріна для рівняння Лапласа. Саме це дозволяє подати значення $\vec{u}(\vec{x},t)$ у довільній точці $\vec{x}$ області у вигляді комбінації інтегралів, до складу яких входить отриманий вище фундаментальний розв'язок і значення функції $\vec{u}(\vec{x},t)$ та її похідних на границі. Таким чином, задачу, яка розглядається, можна звести до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду відносно деякої функції $\vec{\mu}(\vec{x},t)$, котра аналогічна щільності потенціалу подвійного прошарку (при умовах А) й потенціалу простого прошарку (при умовах Б).

3. Моделювання процесу вібраційного об'ємного ущільнення бетонної/будівельної суміші у межах дискретної системи подання оброблюваного середовища

Нехай вібраційне джерело (вібромайданчик з привантаженням) моделюється плитою з масою m_1, яка лежить без тертя на поверхні в'язкопружногосередовища (вібромайданчик з сумішшю у формі) і зв'язаною з масою m_2 (привантаження) пружним і демпфуючим зв'язками (рис. 1). На обидві маси синхронно діє навантаження $F\cdot\exp(-i\omega t)$, де: $i^2=-1$, ω - кругова частота коливань віброджерела, F - амплітуда силового навантаження. Вважаємо товщину прошарку, що ущільнюється, малою і розв'язуємо задачу у межах моделі в'язкопружної бетонної/будівельної суміші як системи із зосередженими параметрами. Вібраційна система «вібромайданчик – суміш – привантаження» знаходиться на фундаменті/основі, яка характеризується коефіцієнтами Ламе ($\bar{\lambda}$ та $\bar{\mu}$), і має щільність $\bar{\rho}$.

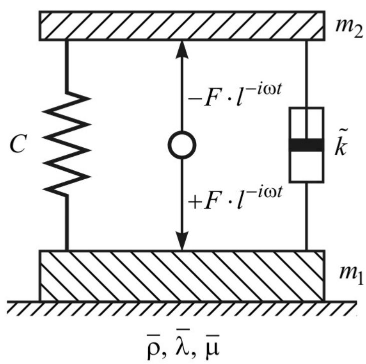

Рис. 1. Геометрія задачі об'ємного ущільнення бетонної/будівельної суміші

Вертикальні коливання плити

w_1 (масою m_1) та з'єднаної з нею плити привантаження w_2 (масою m_2) описуються рівняннями:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{w}_1 - \tilde{k} \cdot (\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - \tilde{c} \cdot (w_2 - w_1) = F - Q, \\ m_2 \cdot \ddot{w}_2 + \tilde{k} \cdot (\dot{w}_2 - \dot{w}_1) + \tilde{c} \cdot (w_2 - w_1) = -F, \end{cases} \tag{32}$$

де $\dot{w}_{1,2} \equiv \dfrac{dw_{1,2}}{dt}$; $\ddot{w}_{1,2} \equiv \dfrac{d^2 w_{1,2}}{dt^2}$; $\tilde{c}$ - жорсткість пружного зв'язку (бетонної/будівельної суміші), $\tilde{c} = \dfrac{E^* \cdot S^*}{h}$, де E^* - модуль пружності суміші, h - її товщина, S^* - площа поверхні плит масами m_1 і m_2, кожної окремо; $\tilde{k}$ - коефіцієнт тертя демпфуючого зв'язку; F - амплітуда сили, прикладеної до кожної з плит; $-Q = -\iint\limits_{\Omega} q_3 dxdy$ - реакція в'язкопружного середовища (суміші) на занурення у нього (неї) плити масою m_1.

Припустимо, що вібратор працює в усталеному гармонічному режимі з круговою частотою ω. У подальшому під w_1, w_2, F, Q будемо розуміти комплексні амплітуди відповідних величин.

Нехай q_1 - тиск, який викликає одиничне переміщення поверхні під плитою, тобто q_1 - розв'язок інтегрального рівняння і $K_{33} \cdot q_1 = 1$, $(x, y) \in \Omega$. При $(x, y) \in \Omega$ переміщення поверхні дорівнює переміщенню плити w_1, звідси:

$$q = w_1 \cdot q_1, \;\; Q = w_1 \cdot Q_1, \;\; Q_1 = \iint\limits_{\Omega} q_1 \cdot dxdy. \tag{33}$$

Враховуючи (33) й відповідність $\partial^n / \partial t^n \Rightarrow (-i\omega)^n$, відносно w_1, w_2 маємо алгебраїчну систему – аналог системи (15):

$$\begin{cases} (-\omega^2 \cdot m_1 - i\omega\tilde{k} + \tilde{c} + Q_1) \cdot w_1 + (i\omega\tilde{k} + \tilde{c}) \cdot w_2 = F, \\ (i\omega\tilde{k} - \tilde{c}) \cdot w_1 + (-\omega^2 \cdot m_2 - i\omega\tilde{k} + \tilde{c}) \cdot w_2 = -F. \end{cases} \tag{34}$$

Звідси:

$$\begin{cases} w_1 = -\dfrac{\omega^2 \cdot m_2}{\Delta(\omega)} \cdot F, \;\; w_2 = -\dfrac{(Q_1 - \omega^2 \cdot m_1)}{\Delta(\omega)} \cdot F, \\ \Delta(\omega) = \omega^2 \cdot m_2 \cdot (i\omega\tilde{k} - \tilde{c}) + (Q_1 - \omega^2 \cdot m_1) \cdot (\omega^2 \cdot m_2 - i\omega\tilde{k} + \tilde{c}). \end{cases} \tag{35}$$

Зазначимо, що при суто поверхневому (необ'ємному) ущільненні бетонної/будівельної суміші ($w_1 \equiv 0$, $w_2 = 2F / (2i\omega\tilde{k} + \omega^2 \cdot m_2)$).

Зрозуміло, виходячи з (35), що $\Delta(\omega) = 0$ є умовою резонансу системи. Якби відсутньою була реакція суміші Q_1, тоді поліном $\Delta(\omega)$, як поліном четвертої степені відносно ω, мав би чотири корені. При наявності

$Q_1(\omega)$ питання про кількість резонансів при ущільненні суміші таким (об'ємним) способом та їх розміщення у комплексній площині ω вимагає спеціальних аналітичних та чисельних досліджень. Особливий інтерес тут представляють дійсні корені, котрим відповідають незатухаючі коливання системи з даною частотою. У подальшому чисельно будуть вивчені резонанси такої системи: «штамп – в'язкопружнийпрошарокбетонної/будівельноїсуміші – (можливе при вантаження у верхній частині)».

Висновки

1. Отже, при вивченні взаємодії поверхневих вібраційних джерел з в'язкопружним середовищем (бетонною/будівельною сумішшю) при поверхневому/об'ємному віброущільненні (віброформуванні) останнього ключову роль відіграє визначення його (середовища) реакції ($\vec{R}_{kj}$ у (15), Q_1 у (35)), тобто побудова розв'язку відповідних інтегральних рівнянь.

2. Справедливим є наступне твердження: будь-яка крайова задача математичної фізики зі змішаними граничними умовами може бути зведена до розв'язкуінтегральнихрівнянь.

3. Особливо значні труднощі виникають у випадку некласичних областей контакту, неоднорідних (стратифікованих) ущільнюваних сумішей та їх динаміки, оскільки:

1) при відмінності області контакту від круга чи смуги інтегральні рівняння не зводяться до одновимірних, і до них не можна застосувати добре відпрацьовані аналітичні та чисельні методи їх розв'язку;

2) для неоднорідних (стратифікованих) в'язкопружнихсередовищ саме ядро інтегрального рівняння може бути побудоване лише чисельно [9-11];

3) динаміка у порівняннізі статикою призводить до суттєвої (сильної) осциляції ядра. Остання обставина обумовлює сильний взаємний вплив усіх точок поверхні (поверхневі хвилі) і робить неефективним застосування методів, які чудово працюють у задачах статики або у задачах динаміки в'язких середовищ із затуханням.

4. Зрозуміло, що тут не можна застосовувати суто аналітичні методи, оскільки вже постановка задачі й виведення інтегральних рівнянь вимагають залучення потужної обчислювальної техніки та спеціальних алгоритмів і програм. З іншої сторони, прямі чисельні методи (наприклад, метод коллокації) без попереднього аналізу і врахування властивостей інтегральних операторів не призведуть до успіху завдяки наявності особливостей та осциляції у розв'язку та ядра (як і у задачах аналізутермов'язкопружного стану середовища).

5. Найбільш перспективним є шлях, котрий передбачає машинну реалізацію всіх етапів розв'язку, виконану на основі ретельного попереднього аналітичного вивчення його властивостей і виділення усіх складових, котрі несуть особливості та осциляції розв'язку, таким чином, щоб чисельно необхідно було знаходити значення тільки гладких, плавно змінних функцій, які є розв'язками коректних задач.

6. У наступних частинах дослідження будуть розглянуті крайові задачі динамічної теорії в'язкопружності для стратифікованих середовищ, властивості інтегральних операторів динамічних контактних задач, методи розв'язку інтегральних рівнянь динамічних змішаних задач, вібрації масивних штампів на в'язкопружній основі, проведений аналіз хвильових полів, які збуджуються гармонічними поверхневими джерелами у в'язкопружному стратифікованому напівпросторі, нестаціонарні хвилі, енергія в'язкопружних хвиль, що збуджуються у стратифікованому напівпросторі (та у прошарку скінченної товщини) поверхневими й внутрішніми (всередині оброблюваного середовища/ суміші) віброджерелами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ильичёв В.А.* К построению импульсной переходной функции системы штамп-полупространство. Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1973. №2.
2. *Муравский Г.Б.* Гармонические колебания штампа на полупространстве при действии силы, приложенной к поверхности полупространства. Известия АН ССР. Механика твёрдого тела. 1969. №6.
3. *Шехтер О.Я.* О взаимном влиянии колебаний двух жёстких круглых штампов на упругом полупространстве при вертикальных, осесимметричных гармонических воздействиях. Основания, фундаменты и подземные сооружения. Сб. трудов НИИ оснований и подземных сооружений. – М.: Стройиздат, 1973. №62.
4. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* К проблеме динамических контактных задач в произвольных областях. Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1978. №3.
5. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Зинченко Ж.Ф.* Установившиеся колебания массивных объектов на поверхности упругой среды. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1981. Деп. в ВИНИТИ 22.01.82, №290-82.
6. *Глушков Е.В.* Вибрация системы массивных штампов на линейно-деформируемом основании. Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. №1.
7. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Плоская задача о колебании штампа на слое. Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. 1979. №1.
8. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М.: Наука, 1989. 344с.
9. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977.
10. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976.
11. *Сеймов В.М.* Динамические контактные задачи. – К.: Наукова думка, 1976.
12. *Бабешко В.А.* К теории динамических контактных задач. Доклады АН СССР. 1971. Т. 201. №3.
13. *Бабешко В.А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Доклады АН СССР. 1974. Т. 217. №4.
14. *Бабешко В.А.* Новый метод в теории пространственных динамических контактных задач. Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. №1.
15. *Бабешко В.А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. – М.: Наука, 1984.
16. *Бабешко В.А., Зинченко Ж.Ф., Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Об одном новом методе решения нестационарных контактных задач теории упругости. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1982. Деп. в ВИНИТИ 22.01.82, №291-82.
17. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974.
18. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979.
19. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости – М.: Гостехиздат, 1953.

20. *Гольдштейн Р.В., Клейн И.С., Эскин Г.И.* Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трёхмерных задач теории упругости. Институт проблем механики АН СССР. Препринт №33. – М.: 1973.
21. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981.
22. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наукова думка, 1972.
23. *Крейн М.Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Доклады АН СССР. 1978. т. 100. №3.
24. *Рвачёв В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – К.: Наукова думка, 1977.
25. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Об одном методе в теории динамических контактных задач для круглых штампов. Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1981. №2.
26. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч.2. – М.: Наука, 1969.
27. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. 252с.
28. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. 576с.
29. *Бейтмен, Эрдейи.* Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. 344с.

REFERENCES

1. *Ylychev V.A.* K postroeniiu impulsnoi perekhodnoi funktsii sistemy shtamp-poluprostranstvo (To the construction of the pulse transient function of the stamp-half-space system). - Izvestiia AN SSSR. Mekhanika tverdoho tela. 1973. №2.
2. *Muravskii H.B.* Harmonicheskie kolebaniia shtampa na poluprostranstve pri deistvii sily, prilozhennoi k poverkhnosti poluprostranstva (Harmonic vibrations of a stamp on a half-space under the action of a force applied to the surface of a half-space). Izvestiia AN SSR. Mekhanika tverdoho tela. 1969. №6.
3. *Shekhter O.Ia.* O vzaimnom vliianii kolebanii dvukh zhestkikh kruhlikh shtampov na upruhom poluprostranstve pri vertikalnykh, osesimmetrichnykh harmonicheskikh vozdeistviiakh. Osnovaniia, fundamenty, podzemnye sooruzhenia (About mutual influence of vibrations of two rigid round dies on an elastic base under vertical, axisymmetric harmonic effects). - Sb. trudov NYY osnovanyi y podzemnikh sooruzhenyi. – M.: Stroiyzdat, 1973. №62.
4. *Babeshko V.A., Hlushkov E.V., Hlushkova N.V.* K probleme dinamicheskikh kontaktnykh zadach v proizvolnykh oblastiakh (To the problem of dynamic contact problems in arbitrary areas). - Izvestiia AN SSSR. Mekhanika tverdoho tela. 1978. №3.
5. *Babeshko V.A., Hlushkov E.V., Hlushkova N.V., Zinchenko Zh.F.* Ustanovivshyesia kolebaniia massivnykh obyektov na poverkhnosti upruhoi sredi (Steady vibrations of massive objects on the surface of an elastic medium). – Rostov-na-Donu: Rostovskii hos. un-t, 1981. Dep. v VINITI 22.01.82, №290-82.
6. *Hlushkov E.V.* Vibratsiia sistemi massivnikh shtampov na lineino-deformiruemom osnovanii (Vibration of a system of massive dies on a linearly deformable base). Prykladnaia matematyka y mekhanyka. 1985. T. 49. №1.
7. *Hlushkov E.V., Hlushkova N.V.* Ploskaia zadacha o kolebanii shtampa na sloe (The plane problem about vibration of a stamp on a layer). Izvestiia Severo-Kavkazskoho nauchnoho tsentra visshei shkoli. 1979. №1.
8. *Babeshko V.A., Hlushkov E.V., Zinchenko Zh.F.* Dinamika neodnorodnykh lineino-upruhikh sred(Dynamics of inhomogeneous linear elastic media). – M.: Nauka, 1989. 344s.
9. *Parton V.Z., Perlin P.Y.* Intehralnye uravneniia teorii upruhosti (The integral equations of the elasticity theory). – M.: Nauka, 1977.
10. Razvitie teorii kontaktnikh zadach v SSSR (Development of contact tasks in the USSR). – M.: Nauka, 1976.
11. *Seimov V.M.* Dinamicheskie kontaktnye zadachi (The dynamic contact tasks). – K.: Naukova dumka, 1976.
12. *Babeshko V.A.* K teorii dinamicheskikh kontaktnykh zadach (To the theory of dynamic contact tasks). Doklady AN SSSR. 1971. T. 201. №3.

13. *Babeshko V.A.* Novii effektyvnii metod reshenia dinamicheskikh kontaktnykh zadach (A new efficient method for solving contact problems). Doklady AN SSSR. 1974. T. 217. №4.
14. *Babeshko V.A.* Novii metod v teorii prostranstvennykh dinamicheskikh kontaktnykh zadach (A new method in the theory of the spatial dynamic contact problems). Dokladi AN SSSR. 1978. T. 242. №1.
15. *Babeshko V.A.* Obobshchennyi metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii upruhosti (Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory). – M.: Nauka, 1984.
16. *Babeshko V.A., Zynchenko Zh.F., Priakhyna O.D., Smyrnova A.V.* Ob odnom novom metode reshenia nestatsionarnykh kontaktnykh zadach teorii upruhosti (About one new method for solving non-stationary contact problems of elasticity theory). – Rostov-na-Donu: Rostovskyi hos. un-t, 1982. Dep. v VYNYTY 22.01.82, №291-82.
17. *Vorovych Y.Y., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii upruhosti (The non-classical mixed problems of elasticity theory). – M.: Nauka, 1974.
18. *Vorovych Y.Y., Babeshko V.A.* Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii upruhosti dlia neklassicheskikh oblastei (The dynamic mixed tasks of elasticity theory for a non-classical areas). – M.: Nauka, 1979.
19. *Halyn L.A.* Kontaktnye zadachi teorii upruhosti (The contact tasks of elasticity theory). – M.: Hostekhyzdat, 1953.
20. *Holdshtein R.V., Klein Y.S., Eskyn H.Y.* Variatsyonno-raznostniy metod reshenia nekotorykh intehralnykh i intehrodifferentsyalnykh uravneniy trekhmernykh zadach teorii upruhosti (The variational-difference method for solving some integral and integro-differentional problems of the theory of elasticity). Ynstytut problem mekhanyky AN SSSR. Preprynt №33. – M.: 1973.
21. *Hrynchenko V.T., Meleshko V.V.* Harmonicheskie kolebania i volny v upruhikh telakh (Harmonic vibrations and waves in the elastic bodies). – K.: Naukova dumka, 1981.
22. *Huz A.N., Holovchan V.T.* Dyfraktsyia upruhikh voln v mnohosviaznykh telakh (The diffraction of elastic waves in multiply connected bodies). – K.: Naukova dumka, 1972.
23. *Krein M.H.* Ob odnom novom metode reshenia lyneinikh intehralnikh uravneniy pervoho i vtoroho roda (About one new method of resolving linear integral equations of the first and second kind). Doklady AN SSSR. 1978. t. 100. №3.
24. *Rvachov V.L., Protsenko V.S.* Kontaktnye zadachi teorii upruhosti dlia neklassycheskykh oblastei (The contact problems of elasticity theory for a non-classical areas). – K.: Naukova dumka, 1977.
25. *Babeshko V.A., Priakhyna O.D.* Ob odnom metode v teorii dinamicheskikh kontaktnykh zadach dlia kruhlykh shtampov (About one method in the theory of dynamic contact tasks for a round stamps). Yzvestyia AN SSSR. Mekhanyka tvërdoho tela. 1981. №2.
26. *Bukhholts N.N.* Osnovnoi kurs teoretycheskoi mekhaniki Ch.2. (The basic course in theoretical mechanics. P.2).– M.: Nauka, 1969.
27. *Parkus H.* Neustanovivshiesia temperaturnye napriazhenia (The transient thermal stresses). – M.: Fyzmathyz, 1963. 252s.
28. *Kamke E.* Spravochnik po obyknovennym dyfferentsyalnym uravneniiam (Reference book on ordinary differential equations). – M.: Nauka, 1976. 576s.
29. *Beitmen, Erdeiy*. Tablitsi intehralnykh preobrazovaniy (The tables of the integral transformations). – M.: Nauka, 1969. 344s.

Стаття надійшла 12.08.2022

Човнюк Ю.В., Кравчук В.Т., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П.

АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ КІНЦЕВОМІРНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ВІБРОДЖЕРЕЛ З УЩІЛЬНЮВАНИМ ЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

У представленій статті розвинутий підхід до розв'язку задач про збудження джерелами коливань/вібрацій хвиль у лінійно-в'язкопружних середовищах, моделюючих ущільнювані бетонні/будівельні суміші зі змінними по глибині механічними характеристиками. Проведений аналіз контактних напружень і зусиль, виникаючих під осцилюючим штампом, типів хвиль, які генеруються у середовищі і на його поверхні, енергії, яка переноситься кожним типом хвиль для різних вібраційних джерел. Описані, раніше не зазначені для

подібного класу задач, явища резонансу у глибинних прошарках середовища великої товщини та власне переміщення самих віброштампів. Наведена техніка зведення задачі про динамічну взаємодію кінцевомірних поверхневих віброджерел з ущільнюваним лінійно-в'язкопружним середовищем до інтегральних рівнянь типу згортки. Обговорюються можливі шляхи її розв'язку. Важливо всебічно дослідити особливості коливань системи «штамп-пружне/лінійно-в'язкопружне середовище», але виникаючі тут інтегральні рівняння є серйозною перешкодою на шляху досліджень. Спроби обійти ці труднощі породжують низку наближених, «інженерних» підходів, у межах котрих реакція середовища (ущільнюваної вібраційним полем бетонної/будівельної суміші) моделюється пружними і в'язкопружними (демпфуючими) зв'язками з деякою «приєднаною масою». Характеристики пружних елементів й величина приєднаної маси підбираються, як правило, за експериментальними даними. Коливання кінцевомірної системи, що виникають у результаті такого підходу, визначаються звичайними методами теоретичної механіки. Особливо широко такий підхід застосовується у будівельних розрахунках, він дозволяє з достатньою точністю визначати статичні осади споруд, дає задовільні результати на певній, фіксованій частоті. При аналізі коливань у широкому діапазоні частот лінійне-в'язкопружне середовище є суттєво нескінченно вимірною системою із власними резонансами й складними дисперсійними властивостями й тому не апроксимується скінченим набором пружин. З метою вияву характерних особливостей динаміки масивних штампів на лінійній в'язкопружній основі у даній роботі проведені: обчислення з використанням методів розв'язку інтегральних рівнянь; аналіз чисельних результатів та виявлених тут якісних ефектів.

Ключові слова: динаміка, взаємодія, кінцевомірні поверхневі віброджерела, ущільнення, лінійно-в'язкопружне середовище, бетонна/будівельна суміш, резонанси.

Chovnyuk Yu.V., Kravchyuk V.T., Pryimachenko O.V., Cherednichenko P.P.

ANALYSIS OF THE INTERACTION OF FINITE-DIMENSIONAL SURFACEVIBRATORS WITH A COMPACTED LINEAR-VISCOUS-ELASTIC MEDIUM

This paper develops an approach to solving problems about the excitation of vibrations/vibrations by sources of waves in linear-viscous-elastic media modeling compacted concrete/building mixtures with depth-variable mechanical characteristics. An analysis of contact stresses and forces occurring under the oscillating stamp, the types of waves generated in the medium and on its surface, and the energy carried by each type of wave for different vibration sources are discussed. The previously described but unspecified for such problems, phenomena of resonance in deep layers of the medium of great thickness and the eigenmovement of the vibration stamps themselves are proposed. We present the technique of reducing the problem of dynamic interaction of finite-dimensional surface vibrosources with compacted linear-viscous-elastic medium to the possible ways of its solution. It is important to comprehensively investigate the peculiarities of vibrations of the stamp-elastic/linear-viscous-elastic medium system, but the integral equations arising here are a serious obstacle to research. Attempts to circumvent these difficulties give rise to a number of approximate, "engineering" approaches, within which the response of the medium (compacted by the vibrating field of the concrete/concrete mixture) is modeled by elastic and viscoelastic (damping) links with some "attached mass". The characteristics of elastic elements and the value of the attached mass are selected, as a rule, from experimental data. The oscillations of the finite-dimensional system resulting from this approach are determined by the usual theoretical methods of mechanics. Such an approach is especially widely used in construction calculations. It gives the possibility to determine the static settlement of structures with a sufficient accuracy and provides satisfactory results at a certain, fixed frequency. When analyzing vibrations in a wide range of frequencies, the linear-viscous-elastic medium is substantially infinitely measurable system with its own resonances and complex dispersion properties, and therefore cannot be approximated by a finite set of springs. In order to identify the characteristic features of the dynamics of massive stamps on a linear viscoelastic basis in this paper we carried out: calculations using methods of solving integral equations; analysis of numerical results and identified qualitative effects.

Keywords: dynamics, interaction, finite-dimensional surface vibration sources, compaction, linear viscoelastic medium, concrete/concrete mixture, resonances.

УДК 534.11
Човнюк Ю.В., Кравчук В.Т., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П. **Аналіз взаємодії кінцевомірних поверхневих віброджерел з ущільнюваним лінійно-в'язкопружним середовищем** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 109. – С. 369-386.
Розвинуто підхід до розв'язку задач про збудження джерелами коливань/вібрацій хвиль у лінійно-в'язкопружних середовищах, моделюючих ущільнювані бетонні/будівельні суміші зі змінними по глибині механічними характеристиками. Проведений аналіз контактних напружень і зусиль, виникаючих під осцилюючим штампом, типів хвиль, які генеруються у середовищі і на його поверхні, енергії, яка переноситься кожним типом хвиль для різних вібраційних джерел.
Табл. 0. Іл. 1. Бібліогр. 29 назв.

UDC 534.11
Chovnyuk Yu.V., Kravchuk V.T., Priymachenko O.V., Cherednichenko P.P. **Analysis of the interaction of finite-dimensional surfacevibrators with a compacted linear-viscous-elastic medium** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA. 2022. – Issue 109. – P. 369-386. – Ukr.
The approach to solving the problems of excitation by sourcesoscillation/vibration wave excitation in linear-viscous-elastic media modeling compacted concrete/building mixtures with depth-variable mechanical characteristics. The analysis of contact stresses and forces occurring under the oscillating stamp, the types of waves generated in the medium and on its surface, the energy carried by each type of wave for different vibration sources has been carried out.
Tabl. 0. Fig. 1. Ref. 29.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри організації авіаційних робіт і послуг Човнюк Юрій Васильович
Адреса робоча: 03058Україна, м. Київ, вул. Мирослава Гузара, 1/2, Національний авіаційний університет
Робочий тел.: +38(044) 406-78-41
мобільний тел.: +38(096) 570-45-65
E-mail: ychovnyuk@ukr.net
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0608-0203

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри охорони праці та навколишнього середовища Кравчук Володимир Тимофійович
Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, Повітофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури
Робочий тел.: +38(044) 241-55-98
мобільний тел.: +38(067) 942-56-60
E-mail: vtk1@ukr.net
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-5213-3644

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри міського будівництва Приймаченко Олексій Віталійович
Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, Повітофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури
Робочий тел.: +38(044) 245-42-04
мобільний тел.: +38(067) 266-81-97
E-mail: pryimachenko.ov@knuba.edu.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5125-8472

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доцент, доцент кафедри міськогобудівництва Чередніченко Петро Петрович
Адреса робоча: 03037 Україна, м. Київ, Повітофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури
Робочий тел.: +38(044) 245-42-04
мобільний тел.: +38(067) 442-13-36
E-mail: petro_che@ukr.net
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-7161-661X