

УДК 539.3

**МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ПРЯМИХ ВСТАТИЧНИХ ЗАДАЧ ВІ  
СЕСИМЕТРИЧНИХ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН****О.П. Кошевий,**

канд. техн. наук, доц.

**Д.В. Левківський,**

канд. техн. наук, доц.

**А.Г. Чубарев****М.О. Янсонс***Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2022.109.342-358

Проведено аналіз альтернативних чисельних методів і показані можливості комбінованих чисельно-аналітичних методів, що можуть давати більш точні та об'єктивні результати. Приведені вихідні рівняння для вирішення вісесиметричної задачі та розглянуті граничні умови на торцевих і бічних поверхнях розрахункового елемента. В результаті чого отримуємо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, що розв'язується чисельно-аналітичним (модифікованим) методом прямих.

**Ключові слова:** редуковані граничні умови, редуковані рівняння рівноваги в частинах, система диференціальних рівнянь, система редукованих диференціальних рівнянь у формі Коші, метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

**Вступ.** Однією з важливих конструктивних форм об'єктів будівництва, елементів машин і механізмів є вісесиметричні тіла (фундаменти кільцевих споруд, тунелі, колодязі, димові труби, шестерні, колеса тощо). В результаті динамічних впливів у цих об'єктах виникає складний просторовий напружено-деформований стан, який призводить до ускладнень стану матеріалів. Проектування таких конструкцій вимагає об'єктивного дослідження напружено-деформований стан. Навіть використання сучасних програмних комплексів оснований на МСЕ, не завжди точно визначає напружено-деформований стан таких складних об'єктів. Альтернативою універсальним чисельним методам є комбіновані чисельно-аналітичні методи, що можуть дати більш точні та об'єктивні результати. Одним із класичних комбінованих методів будівельної механіки є метод прямих, який в статичних задачах надає об'єктивний і точний результат [1, 2]. Однак до задач динаміки цей метод не застосовувався. У роботах [3, 4] запропоновано узагальнення методу прямих, який можна застосовувати не тільки до статичних задач, але й динамічних. Дана робота поширює згаданий метод на динамічні задачі для вісесиметричних тіл і є продовженням роботи [6, 7, 11, 12].

**Вихідні рівняння.** Напружено-деформований стан нетонких кільцевих пластин (рис. 1) при дії силових і кінематичних впливів є просторовим і

тому описується рівняннями просторової задачі теорії пружності у циліндричній системі координат [9].

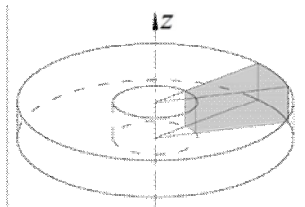


Рис. 1. Нетонка кільцева пластина

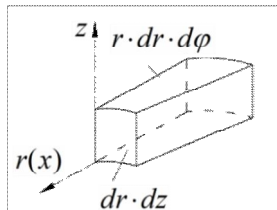


Рис. 2. Обрана розрахункова область

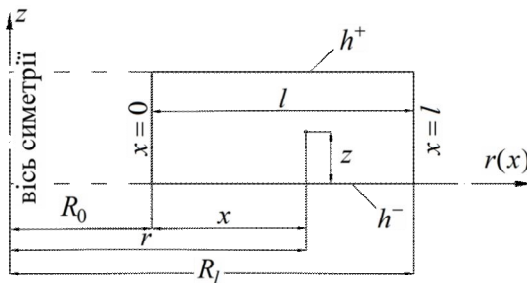


Рис. 3. Осьовий переріз кільцевої пластини

У частинному випадку вісесиметричної задачі розрахункова область показана на рис. 2, а осьовий переріз пластини показан на рис. 3. Тоді розрахунковими рівняннями є:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + X_r = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + X_z = 0.$$

**Граничні умови.** Запишемо рівняння рівноваги відносно осей для торцевих поверхонь (рис. 4):

$$\sum r = 0; \quad -\sigma_{zr}^N + q_r^+(x) + k_{zr}^+ (\Delta_{zr}^+(x) - u_r^N(x)) = 0;$$

$$\begin{aligned} \Sigma z = 0; & -\sigma_{zz}^N(x) + q_z^+(x) + k_{zz}^+(\Delta_{zz}^+(x) - u_z^N(x)) = 0. \\ \Sigma r = 0; & \sigma_{zr}^1(x) + q_r^-(x) + k_{zr}^-(\Delta_{zr}^- - u_r^1(x)) = 0; \\ \Sigma z = 0; & \sigma_{zz}^1(x) + q_z^-(x) + k_{zz}^-(\Delta_{zz}^-(x) - u_z^1(x)) = 0. \end{aligned}$$

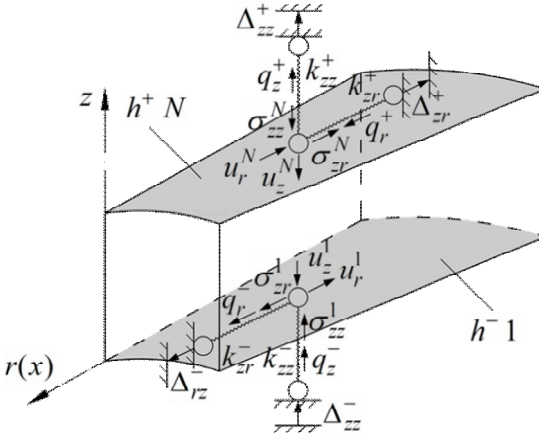


Рис. 4. Граничні умови на торцевих поверхнях

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^1(x) &= k_{rz}^- u_r^1(x) - k_{rz}^- \Delta_{rz}^-(x) - q_r^-(x); \\ \sigma_{zz}^1(x) &= k_{zz}^- u_z^1(x) - k_{zz}^- \Delta_{zz}^-(x) - q_z^-(x); \\ \sigma_{rz}^N(x) &= -k_{rz}^+ u_r^N(x) + k_{rz}^+ \Delta_{rz}^+(x) + q_r^+(x); \\ \sigma_{zz}^N(x) &= -k_{zz}^+ u_z^N(x) + k_{zz}^+ \Delta_{zz}^+(x) + q_z^+(x). \end{aligned}$$

Запишемо рівняння рівноваги відносно осей для бічних поверхонь (рис. 5):

$$\begin{aligned} \Sigma r = 0; & \sigma_{rr}^0(z) + q_r^0 + k_{rr}^0(\Delta_{rr}^0 - u_r^0(z)) = 0; \\ \Sigma z = 0; & \sigma_{zr}^0(z) + q_z^0 + k_{zr}^0(\Delta_{zr}^0 - u_z^0(z)) = 0. \\ \Sigma r = 0; & -\sigma_{rr}^l(z) + q_r^l + k_{rr}^l(\Delta_{rr}^l - u_r^l(z)) = 0; \\ \Sigma z = 0; & -\sigma_{zr}^l(z) + q_z^l + k_{zr}^l(\Delta_{zr}^l - u_z^l(z)) = 0. \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0(z) &= -q_r^0 - k_{rr}^0(\Delta_{rr}^0 - u_r^0(z)) = 0; \\ \sigma_{zr}^0(z) &= -q_z^0 - k_{zr}^0(\Delta_{zr}^0 - u_z^0(z)) = 0; \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr}^l(z) = q_r^l + k_{rr}^l (\Delta_{rr}^l - u_r^l(z)) = 0;$$

$$\sigma_{zr}^l(z) = q_z^l + k_{zr}^l (\Delta_{zr}^l - u_z^l(z)) = 0.$$

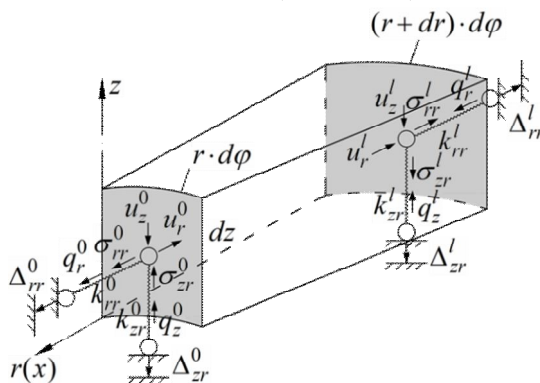


Рис. 5. Граничні умови на бічних поверхнях

Вихідні рівняння є системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, які передбачається розв'язувати чисельно-аналітичним методом прямих. Класичний варіант методу прямих використовує чисельний метод скінчених різниць для зниження вимірності вихідних рівнянь по одній з просторових змінних (як правило поперечній  $z$ ) та подальшому розрахунку одновимірної граничної задачі (це головна особливість методу прямих) аналітичними або наближеними методами.

У роботах [1, 2] було відзначено, що класичний варіант методу прямих призводить до редукованих рівнянь, які погано пристосовані до розв'язування найбільш розповсюдженими чисельними методами. У цих роботах було запропоновано для зниження вимірності вихідних рівнянь використовувати проєкційний метод Бубнова–Галеркіна–Петрова [3] з використанням базисних локально зосереджених функцій («функції-кришки»)[5]. Було зазначено, що з точки зору евклідового простору зі

скалярним добутком  $(f(z), g(z)) = \int_{h^-}^{h^+} f(z) \cdot g(z) dz$  система базисних

функцій є косокутною, в зв'язку з чим алгебраїчні перетворення рівнянь аналогічні перетворенням тензорної алгебри, тому подальші викладки у модифікованому методі прямих використовують позначення та алгебраїчні дії тензорної алгебри [4].

Для побудови редукованих статичних рівнянь вихідні рівняння перепишемо у вигляді:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial x} &= -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\mu} \sigma_{rz}; \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} &= -\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} - X_r; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial x} &= -\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rz}}{R_0 + x} - X_z. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{R_0 + x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

У цих та подальших рівняннях зручно перейти від просторової змінної  $r$  до змінної  $x$ , враховуючи, що відповідні вихідні співпадають – при  $r = R_0 + x$ ,  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}$ .

Оскільки невідомій функції  $f(x, z)$  у випадку косокутного базису  $\{\varphi_i(z)\}$  ( $i = \overline{1, N}$ ) можна поставити у відповідність два тип величин –  $f^i(x)$  – контрваріантні індексні величини, або коефіцієнти в розкладі по основному базису  $\{\varphi_i(z)\}$  або коваріантні величини  $f_i(x)$  – скалярні добутки – моменти відносно елементів основного базису. В той же час елементи  $f_i(x)$  можна розглядати як коефіцієнти розкладу по елементах взаємного базису  $\{\varphi^i(z)\}$ , або вони є моментами відносно елементів основного базису.

Далі також використовуються метричні тензори другого рангу  $g_{ij} = (\varphi_i(z), \varphi_j(z))$ ,  $g^{ij} = (\varphi^i(z), \varphi^j(z))$ ,  $\delta_i^j = (\varphi_i(z), \varphi^j(z))$ ,  $\delta^i_j = (\varphi^i(z), \varphi_j(z))$ , а також співвідношення між матрицями двічі коваріантного та двічі контрваріантного тензора  $\{g_{ij}\}^{-1} = \{g^{ij}\}$ . У публікаціях [1,2] редуковані рівняння будувалися в моментах відносно основного базису. Подальші дослідження виявили, що зручніше для подальшого застосування чисельних методів є редуковані рівняння, отримані в коефіцієнтах відносно основного базису [6,7]. Для цього необхідно вихідні рівняння проектувати на елементи взаємного базису.

Редукуємо перше рівняння системи (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial x} &= \left( -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr} \right), \varphi^i(z) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{du_r^i}{dx} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i}{R_0 + x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} \varphi^i(z) dz + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{du_r^i(x)}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0+x} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) + \frac{1}{\lambda+2\mu} \sigma_{rr}^i.$$

Тут виконано перетворення

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} \varphi^i(z) dz &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial(u_z^\alpha \varphi_\alpha(z))}{\partial z} g^{ij} \varphi_j(z) dz = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} u_z^\alpha \cdot \varphi_\alpha'(z) \cdot \varphi_j(z) dz = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha. \end{aligned}$$

По індексах, що повторюються, передбачається підсумовування (узгодження Ейнштейна).

Аналогічно редукується друге рівняння системи (2) та рівняння (3). За допомогою редукованого рівняння (4) з редукованих рівнянь для  $\sigma_{\theta\theta}^i$  та

$\sigma_{zz}^i$  виключається похідна  $\frac{du_z^i}{dx}$ :

$$\begin{aligned} \frac{du_z^i}{dx} &= -g^{ij} b_{j\alpha} u_r^\alpha(x) + \frac{1}{\mu} \sigma_{rz}^i(x); \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \lambda \frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x} + \frac{\lambda+2\mu}{R_0+x} u_r^i(x) + \lambda g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) = \\ &= \lambda \left[ -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0+x} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda+2\mu} \sigma_{rr}^i \right] + \frac{\lambda+2\mu}{R_0+x} u_r^i(x) + \lambda g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) = \\ &= \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0+x} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \sigma_{rr}^i; \\ &\left( \sigma_{zz} = \lambda \frac{u_r}{\partial x} + \lambda \frac{u_r}{R_0+x} + (\lambda+2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varphi^i(z) \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \sigma_{zz}^i = \lambda \frac{du_r^i}{dx} + \lambda \frac{u_r^i}{R_0+x} + (\lambda+2\mu) g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) = \\ &= \lambda \left[ -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0+x} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) + \frac{1}{\lambda+2\mu} \sigma_{rr}^i \right] + \\ &\quad + \lambda \frac{u_r^i}{R_0+x} + (\lambda+2\mu) g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x); \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0+x} + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \sigma_{rr}^i(x). \end{aligned}$$

Остаточно система редукованих рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{du_z^i}{dx} &= -g^{ij}b_{j\alpha}u_r^\alpha(x) + \frac{1}{\mu}\sigma_{rz}^i(x); \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} g^{ij}b_{j\alpha}u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{rr}^i(x).\end{aligned}\quad (4)$$

**Редукування рівнянь рівноваги частин.** Рівняння рівноваги мають особливість зниження вимірності. При обчисленні інтегралу, під знаком якого стоїть похідна по змінній  $z$  від компоненти тензору напружень, необхідно «пом'якшувати» інтегрування по відповідній змінній [3], перетворюючи інтеграл по частинах. При цьому граничні умови на бокових поверхнях, які з'являються при інтегруванні частинами, враховують силові та кінематичні впливи, потрапляють до редукованих рівнянь рівноваги [10, 11, 12]

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + X_r &= 0; \\ \left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial x} = -\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} - \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} - X_r\right), \varphi^i(z) &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} = -\int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} \varphi^i(z) dz - \sigma_{rr}^i + \sigma_{\theta\theta}^i - X_r^i; \\ -\int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} g^{ij} \varphi_j(z) dz = -g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} \varphi_j(z) dz = \\ = -g^{ij} \left[ (\sigma_{rz} \cdot \varphi_j) \Big|_{h^-}^{h^+} - \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{rz} \cdot \varphi_j'(z) dz \right] = \\ = -g^{ij} [\sigma_{rz}^N \cdot \delta_j^N - \sigma_{rz}^1 \cdot \delta_j^1 - \int_{h^-}^{h^+} \sigma_{rz}^\alpha \cdot \varphi_\alpha(z) \varphi_j'(z) dz] = \\ = -g^{ij} [\sigma_{zz}^N \cdot \delta_j^N - \sigma_{rz}^1 \cdot \delta_j^1 - \sigma_{rz}^\alpha b_{\alpha j}]; \\ \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} &= -g^{ij} \sigma_{rz}^N \delta_j^N + g^{ij} \sigma_{rz}^1 \delta_j^1 + g^{ij} b_{\alpha j} \sigma_{rz}^\alpha - \sigma_{rr}^i + \sigma_{\theta\theta}^i - X_r^i; \\ \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} &= -g^{iN} \sigma_{rz}^N + g^{i1} \sigma_{rz}^1 + g^{ij} b_{\alpha j} \sigma_{rz}^\alpha - \sigma_{rr}^i + \sigma_{\theta\theta}^i - X_r^i; \\ \frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} &= -g^{iN} \left[ -k_{rz}^+ u_r^N(x) + k_{rz}^+ \Delta_{rz}^+(x) + q_r^+(x) \right] + \\ &+ g^{i1} \left[ k_{rz}^- u_r^1(x) - k_{rz}^- \Delta_{rz}^-(x) - q_r^-(x) \right] +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g^{ij}b_{\alpha j}\sigma_{rz}^{\alpha}-\sigma_{rr}^i+\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{u_r^i(x)}{R_0+x}+\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}g^{ij}b_{j\alpha}u_z^{\alpha}(x)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr}^i-X_r^i; \\
& \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}+X_z=0; \\
& \left(\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}-\frac{1}{r}\sigma_{rz}-X_z\right),\varphi^i(z)\rightarrow \\
& \rightarrow\frac{d\sigma_{rz}^i}{dx}=-\int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\varphi^i(z)dz-\frac{1}{R_0+x}\sigma_{rz}^i-X_z^i\rightarrow \\
& \rightarrow-\int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\varphi^i(z)dz=-\int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}g^{ij}\varphi_j(z)dz=-g^{ij}\int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\varphi_j(z)dz= \\
& =-g^{ij}\cdot\sigma_{zz}\cdot\varphi_j(z)\Big|_{h^-}^{h^+}-\int_{h^-}^{h^+}\sigma_{zz}\varphi_j'(z)dz=-g^{ij}[\sigma_{zz}^N\delta_j^N-\sigma_{zz}^1\delta_j^1-\int_{h^-}^{h^+}\sigma_{zz}^{\alpha}\varphi_{\alpha}'dz]= \\
& =-g^{iN}\sigma_{zz}^N+g^{i1}\sigma_{zz}^1+g^{ij}b_{\alpha j}\sigma_{zz}^{\alpha}.
\end{aligned}$$

$\sigma_{zz}^N$ ,  $\sigma_{zz}^1$  – підставимо з граничних умов,  $\sigma_{zz}^{\alpha}$  – виключимо через рівняння:

$$\sigma_{zz}^{\alpha}=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{u_r^{\alpha}(x)}{R_0+x}+\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}g^{\alpha j}b_{j\gamma}u_z^{\gamma}(x)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr}^{\alpha}(x).$$

Аналогічно редукуються граничні умови на торцях. Оскільки при виборі системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, то усі граничні умови є алгебраїчними співвідношеннями, тому редукування алгебраїчних співвідношень формально зводиться до заміни невідомих функцій їх коефіцієнтами. Відповідно редуковані граничні умови на торцевих поверхнях мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(x) &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x}+\frac{\lambda}{r}u_r^i(x)+\lambda g^{ij}b_{j\alpha}u_z^{\alpha}(x); \\
\sigma_{\theta\theta}^i(x) &= \lambda\frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x}+\frac{(\lambda+2\mu)}{r}u_r^i(x)+\lambda g^{ij}b_{j\alpha}u_z^{\alpha}(x); \\
\sigma_{zz}^i(x) &= \lambda\frac{\partial u_r^i(x)}{\partial x}+\frac{\lambda}{r}u_r^i(x)+(\lambda+2\mu)g^{ij}b_{j\alpha}u_z^{\alpha}(x); \\
\sigma_{rz}^i(x) &= \mu\frac{\partial u_z^i(x)}{\partial x}+\mu g^{ij}b_{j\alpha}u_r^{\alpha}(x).
\end{aligned} \tag{5}$$

Кінцева система редукованих рівнянь:

$$\frac{du_r^i}{dx}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{u_r^i(x)}{R_0+x}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}g^{ij}\cdot b_{j\alpha}\cdot u_z^{\alpha}(x)+\frac{1}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr}^i;$$



$$\begin{aligned}
\frac{du_z^i}{dx} &= -g^{ij} \cdot b_{j\alpha} \cdot u_r^\alpha(x) + \frac{1}{\mu} \sigma_{rz}^i(x); \\
\frac{d\sigma_{rr}^i}{dx} &= -g^{iN} [-k_{rz}^+ \cdot u_r^N(x) + k_{rz}^+ \cdot \Delta_{rz}^+(x) + q_r^+(x)] + \\
&+ g^{i1} [k_{rz}^- \cdot u_r^1(x) - k_{rz}^- \cdot \Delta_{rz}^-(x) - q_r^-(x)] + g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot \sigma_{rz}^\alpha - \sigma_{rr}^i + \\
&+ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{u_r^i(x)}{R_0 + x} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} g^{ij} \cdot b_{j\alpha} \cdot u_z^\alpha(x) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{rr}^i - X_r^i; \\
\frac{d\sigma_{zr}^i}{dx} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{R_0 + x} g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot u_r^\alpha(x) + g^{iN} \cdot k_{zz}^N(x) \cdot u_z^N(x) + \\
&+ g^{i1} \cdot k_{zz}^- \cdot u_z^1(x) + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot g^{\alpha j} \cdot b_{j\gamma} \cdot u_z^\gamma(x) + \\
&+ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} \cdot b_{\alpha j} \cdot \sigma_{rr}^\alpha(x) - \frac{1}{R_0 + x} \sigma_{rz}^i(x) - X_z^i. \quad (6)
\end{aligned}$$

Остаточно отримуємо граничну задачу для системи редукованих диференціальних рівнянь в звичайних похідних, записану у формі Коші з граничними умовами загального вигляду [6, 7]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{Y}}{dx} &= A\bar{Y} + \bar{F}; \\
\text{при } x &= 0 \\
C_0(\bar{Y}_{(0)} - \bar{\Phi}_0) &= 0; \\
\text{при } x &= l \\
C_l(\bar{Y}_{(l)} - \bar{\Phi}_l) &= 0.
\end{aligned}$$

**Програмна реалізація чисельно-аналітичної методики та відповідного алгоритму модифікованого методу прямих.** Розроблену методику реалізовано у вигляді програмного комплексу, що дає можливість досліджувати напружено-деформований стан вісесиметричних тіл за допомогою модифікованого методу прямих при різних видах навантажень, а також при всіх можливих комбінаціях цих навантажень. Робота програмного комплексу розділена на три етапи. На першому етапі формуються вихідні дані у вигляді розрахункової моделі вісесиметричного тіла модифікованим методом прямих і вирішуються задачі по визначенню навантажень (температурних, силових, кінематичних, електричних тощо), на основі яких формується схема навантажень на розрахункову модель конструкції, що сформована раніше. На другому етапі досліджується напружено-деформований стан вісесиметричного тіла модифікованим методом прямих від комплексної дії на нього статичних та динамічних навантажень при різних умовах закріплення моделі, та використовує ВІМ технології для прийняття оптимальних рішень при проектуванні та конструюванні елементів конструкцій чи машин.

Результати розрахунків візуалізуються за допомогою програмних модулів MSEXEL у вигляді діаграм, графіків, ізоліній, які будуються на основі розрахунків, проведених на перших двох етапах.

**Достовірність результатів методики та її програмної реалізації.** Для перевірки достовірності отриманої методики та розробленого програмного комплексу розглянуто розв'язок задачі теплопровідності циліндричної стінки.

Вихідні дані:  $r_1 = 10\text{мм}$ ,  $r_2 = 40\text{мм}$ , температура на внутрішній поверхні стінки  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 400^\circ\text{C}$ . Дискретна модель наведена на рис. 6.

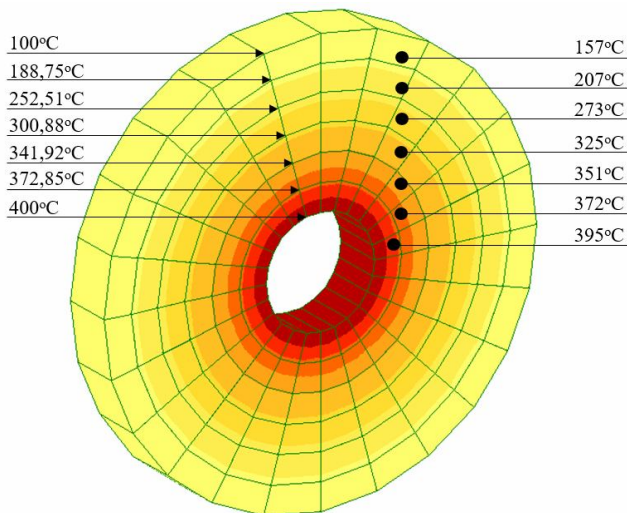


Рис. 6. Дискретна модель з наведеними значеннями температури

В таблиці 1 приведено результати розрахунків аналітично та за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів в роботі [8]. В результаті різниця в розрахунках складає менше 1%, що підтверджує достовірність розробленої методики.

Таблиця 1

$\rho$ , мм	Температура $T$ , $^\circ\text{C}$			Похибка, %	
	Аналітично	Модифікований метод прямих	НМСЕ	Модифікований метод прямих	НМСЕ
10	100	100	100	0	0
15	187,74	188,75	186,68	0,53	0,56
20	250	252,51	247,93	1,00	0,83
25	298,27	300,88	296,15	0,87	0,71
30	337,74	341,92	336,65	1,23	0,32
35	371,10	372,85	370,33	0,47	0,20
40	400	400	400	0	0

**Моделювання напружено-деформованого стану циліндричного елемента конструкції від температурного та силового впливу.** За розробленою методикою було проведено комп'ютерне моделювання конструкції трубопроводу великого тиску, для роботи в парових турбінах, при внутрішньому тиску в ньому до 15 МПа та температурі  $T_B = 550^\circ\text{C}$ . Зовнішня поверхня трубопроводу термоізольована  $T_3 = 60^\circ\text{C}$ . Внутрішній діаметр труби 20 мм, зовнішній діаметр – 80 мм, довжина відрізка труби, що заземлення по торцям складає 2000 мм. На першому етапі проведено моделювання температурних полів та визначені переміщення, що виникають в поперечних перерізах конструкції за рахунок вирішення задачі термопружності модифікованим методом прямих. На рис. 7 показані ізолінії температурних полів, що виникають в поперечних перерізах.

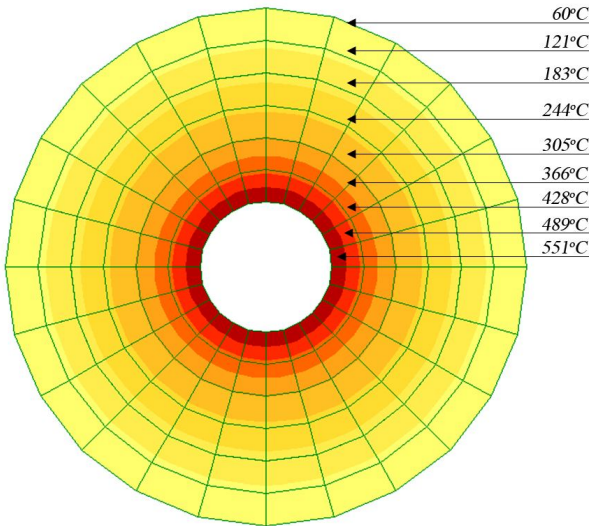


Рис. 7. Ізолінії температурних полів

На другому етапі формується комп'ютерна модель конструкції з урахуванням температурних навантажень, власної ваги конструкції та внутрішнього тиску пари. В результаті розрахунку напружено-деформованого стану конструкції отримані поля нормальних і дотичних напружень у всіх поперечних перерізах. На рисунках 8 і 9 показані ізополя цих напружень в середньому та опорному перерізах конструкції. На рис. 10 надана деформована схема конструкції при дії на неї комплексного навантаження.

**Висновок.** Метод прямих є комбінованим методом розв'язування задач математичної фізики, який використовує, зведення вихідних рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь, що розв'язувалися аналітичними методами. Класичний варіант методу прямих не є вільним від значних ускладнень. По-перше, виникають проблеми з побудовою

граничних умов для редукованих рівнянь, які отримані методом скінченних різниць, особливо, коли вихідні граничні умови природні. По-друге, побудувати загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь майже неможливо.

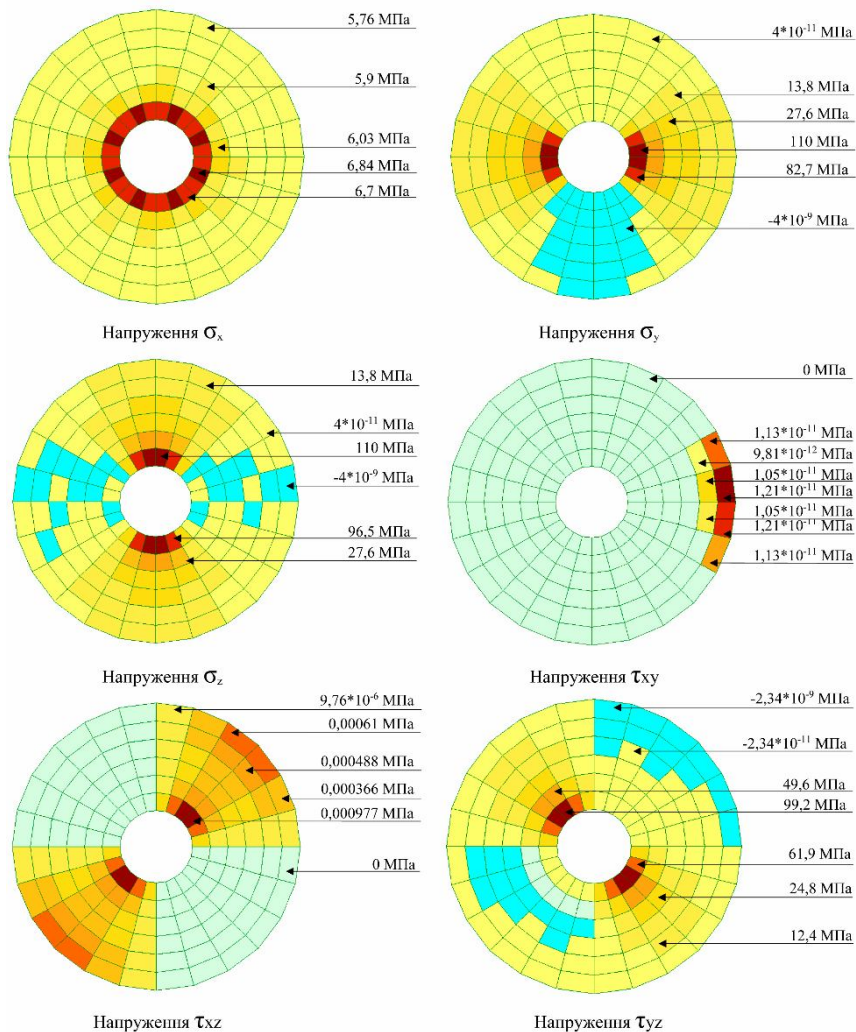


Рис. 8. Ізополя напружень від комплексного навантаження в середньому перерізі конструкції

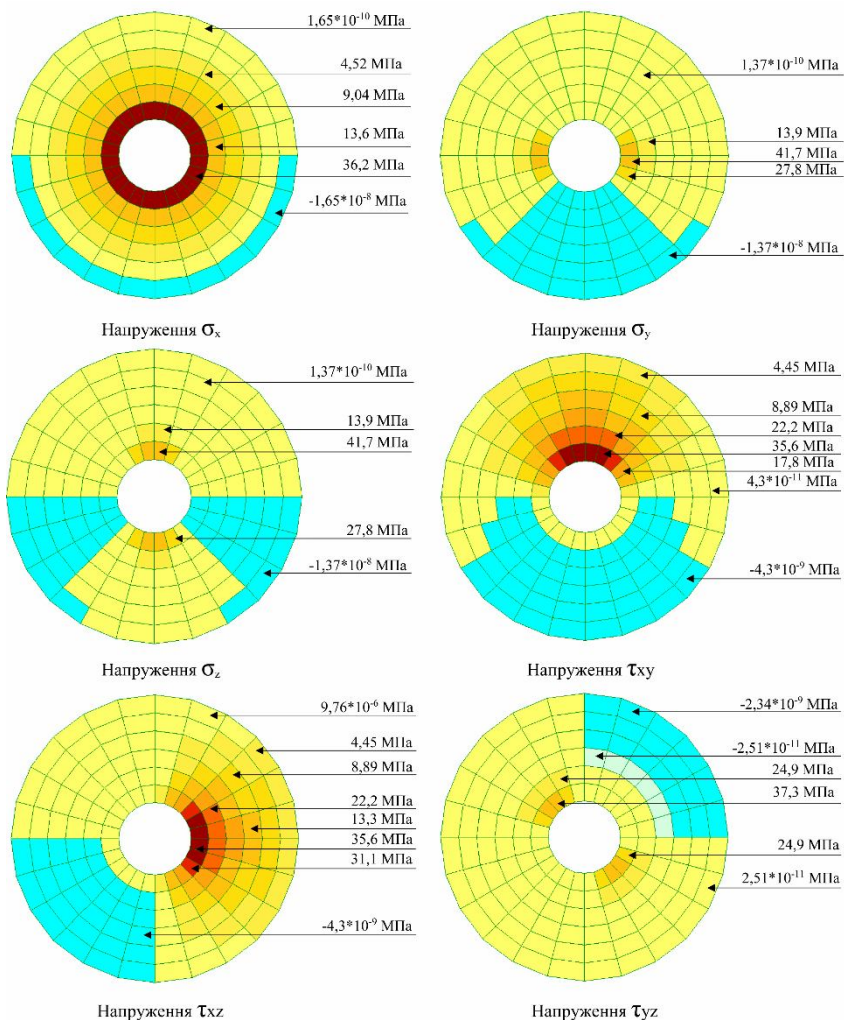


Рис. 9. Ізополі напружень від комплексного навантаження в опорному перерізі конструкції

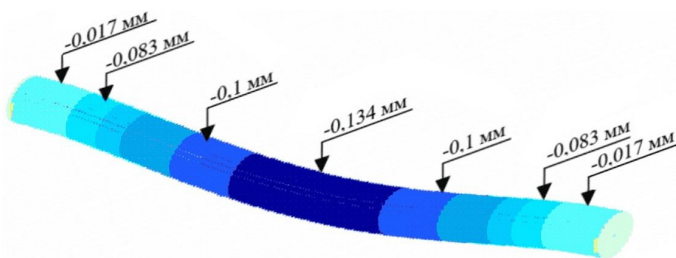


Рис. 10 Деформована схема конструкції при дії комплексного навантаження

Модифікований метод прямих, використовує для зниження вимірності проєкційний метод, а вихідні граничні умови обираються природними і потім частково потрапляють до редукованих рівнянь.

Важливим позитивом також є побудова редукованих граничних задач, ідеально пристосованих до застосування найбільш ефективного методу розв'язування одновимірних граничних задач – методу дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Вирішення тестової задачі підтверджує достовірність розробленої методики та її ефективність для вирішення складних інженерних задач.

Моделювання НДС циліндричного елемента конструкції надає можливість аналізу та прийняття важливих інженерних рішень в проєктуванні трубопроводів з урахуванням комплексного навантаження при різних умовах закріплення, на основі чого визначаються найкращі оптимальні рішення.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Винокуров Л.П.* Приближенный метод решения плоских задач теории упругости. - Тр. Харьковск. инж.-стр. ин-та, вып. 2, 47—123, 1949.
2. *Шкелев Л.Т., Морсков Ю.А., Романова Т.А., Станкевич А.Н.* /Метод прямих и его использование при определении напряженного и деформированного состояния пластин и оболочек./ – К.: КНУСА, 2002. – 177с.
3. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В.* / До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36. – Київ, КНУБА, 2010. – С. 413-423.
4. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В.* /Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46. – Київ, КНУБА, 2012. – С. 613-624.
5. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* /Введение в проекционно-сеточные методы./-М. 1981 - с.416
6. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснесва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсон М.О., Сович Ю.В.* Модифікований метод прямих, алгоритм його застосування, можливості та перспективи. // Н. т. збірник «Містобудування та територіальне планування», в. 70, К.:КНУБА, 2019р. – с.595-616.
7. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснесва А.О., Пошивач Д.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсон М.О., Сович Ю.В.* Чисельна реалізація модифікованого методу прямих. // Н. т. збірник «Містобудування та територіальне планування», в. 74, К.:КНУБА, 2020р. – с.341-359.
8. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П., Шкриль О.О.* Розв'язання просторової задачі нестационарної теплопровідності на основі напіваналітичного методу скінченних елементів. // Н.-т. збірник Технологічний аудит та резерви виробництва №3/2(23) м. Харків, 2015р – с.61-67
9. *Vazhenov V.A., Gaidachuk V.V., Koshevoi A.P.* Stability of multiply connected ribbed shells and plates in a magnetic field // Journal of Soviet Mathematics t 66 #6 p.2631-2636.
10. *Кошевой А.* Устойчивость пластин и оболочек сложной формы в магнитном поле. // Спротивление материалов и теория сооружений, вып. 59, 65-71, 1991.
11. *Чубарев А.Г.* Про застосування модифікованого методу прямих в задачах термопружності нетонких пластин // Н. т. збірник «Містобудування та територіальне планування», в. 80, К.:КНУБА, 2022р. – с.486-498.
12. *Янсон М.О.* Застосування узагальненого методу прямих для дослідження динамічного напружено-деформованого стану кільцевих нетонких пластин // Н.-т. збірник «Математичні проблеми технічної механіки – 2021» Міжнародна наукова конференція м. Дніпро, Кам'янське 2021р.

## REFERENCES

1. *Vynokurov L.P.* /Pryblyzhennyi metod resheniya ploskykh zadach teoryi uprugosti (Approximate method for solving plane problems of elasticity theory)/Tr. Kharkovsk. ynzh.-str. yn-ta, vyp. 2, 47—123, 1949.
2. *Shkelev L.T., Morskov Yu.A., Romanova T.A., Stankevych A.N.* /Metod priamykh i eho yspolzovanye pry opredelenyy napriazhennoho i deformyrovanooho sostoyaniya plastyn i obolochek (The Method of Lines and Its Use in Determining the Stressed and Deformed States of Plates and Shells).— K.: KNUSA, 2002. — 177p.
3. *Stankevych A.M., Chybiriakov V.K., Shkelov L.T., Levkivskiy D.V.* / Do znyzhennia vymirnosti hranychnykh zadach teorii pruzhnosti za metodom priamykh. (To reduce the dimensionality of boundary value problems of the theory of elasticity by the method of straight lines.) // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekh. Zbirnyk. — Vyp. 36. — Kyiv, KNUBA, 2010. — p. 413-423.
4. *Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Levkivskiy D.V.* /Osoblyvosti znyzhennia vymirnosti rivnians teorii pruzhnosti uzahalnenym metodom priamykh. (Peculiarities of reducing the dimensionality of the equations of the theory of elasticity by the generalized method of straight lines.)// Mistobuduvannia ta terytorialneplanuvannia: Nauk.-tekh. Zbirnyk. — Vyp. 46. — Kyiv, KNUBA, 2012. — p. 613-624.
5. *Marchuk H.Y., Ahoshkov V.Y.* /Vvedenye v proektsyonno-setochniymetody. (Introduction to projection-grid methods)/— M. 1981 - p.416
6. *Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskiy D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O., Sovych Yu.V.* Modyfikovanyi metod priamykh, alhorytmy eho zastosuvannia, mozhyvosti ta perspektyvy. (The modified straight line method, its application algorithm, possibilities and prospects.)// N. t. zbirnyk «Mistobuduvannia ta terytorialneplanuvannia», v. 70, K.:KNUBA, 2019 — p.595-616.
7. *Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskiy D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O., Sovych Yu.V.* Chyselna realizatsiia modyfikovanoho metodu priamykh (Numerical implementation of the modified method of straight lines) // N. t. zbirnyk «Mistobuduvannia ta terytorialneplanuvannia», v. 74, K.:KNUBA, 2020— p.341-359.
8. *Huliar O.I., Pyskunov S.O., Andriiievskiy V.P., Shkryl O.O.* Rozviazannia prostorovoyi zadachi nestatsionarnoi teploprovodnosti na osnovi napivanalitichnooho metodu skinchenykh elementiv. (Solving the spatial problem of non-stationary thermal conductivity based on the semi-analytical method of finite elements.) // N. t. zbirnykTekhnolohichnyiaudyt ta rezervyvyrobnytstva №3/2(23) m. Kharkiv, 2015r — s.61-67
9. *Bazhenov V.A., Gaidaichuk V.V., Koshevoi A.P.* Stability of multiply connected ribbed shells and plates in a magnetic field // Journal of Soviet Mathematicsv 66 №6 p.2631-2636.
10. *Koshevoi A.* Ustoichyvost plastyn y obolochekslozhnoiformy v mahnytnom pole. (Stability of plates and shells of complex shape in a magnetic field)// Soprotivlenyematerialov y teoryiasooruzheniy, vyp. 59, 65-71, 1991
11. *Chubarev A.H.* Pro zastosuvannia modyfikovanoho metoda priamykh v zadachakh termopruzhnosti netonkykh plastyn (On the application of the modified method of straight lines in problems of thermoelasticity of thin plates)// N. t. zbirnyk «Mistobuduvannia ta terytorialneplanuvannia», v. 80, K.:KNUBA, 2022 — p.486-498.
12. *Yansons M.O.* Zastosuvannia uzahalnenoho metodu priamykh dlia doslidzhennia dynamichnoho napruzhenno-deformovanoho stanu kiltsevykh netonkykh plastyn (Application of the generalized method of straight lines to study the dynamic stress-strain state of annular thin plates)// N.t. zbirnyk «Matematychni problem tekhnichnoimekhaniky — 2021» Mizhnarodnanaukovakonferentsiia m. Dnipro, Kamianske 2021.

*Кошевий О.П., Левківський Д.В., Чубарев А.Г., Янсонс М.О.*

### **МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ПРЯМИХ В СТАТИЧНИХ ЗАДАЧАХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН**

Приведені вихідні рівняння для вирішення вісесиметричної задачі та розглянуті граничні умови на торцевих поверхнях і середньому перерізі розрахункового елемента. В результаті чого отримуємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, що розв'язується чисельно-аналітичним (модифікованим) методом прямих. Показано перетворення редукованих рівнянь рівноваги в частинах, а також редуковані моделі граничних умов торцевих поверхонь і середнього перерізу. В результаті отримано граничну задачу для системи редукованих диференціальних рівнянь в звичайних похідних, записані в формі Коші з граничними умовами загального вигляду.

Проведено розрахунок теплопровідності циліндричної стінки, результати порівнювалися з аналітичними розрахунками та результатами інших авторів, чим підтверджується достовірність розробленої методики.

Проведено комп'ютерне моделювання НДС циліндричного елемента конструкції від комплексної дії температурного, силового та кінематичного впливів.

Зроблені важливі висновки для використання модифікованого методу прямих, який позбавлений ускладнень, що виникають при використанні класичного методу прямих.

**Ключові слова:** редуковані граничні умови, редуковані рівняння рівноваги в частинах, система диференціальних рівнянь, система редукованих диференціальних рівнянь у формі Коші, метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

*Koshevyi O.P., Levkivskiy D.V., Chubarev A.H., Yansons M.O.*

### **MODIFIED DIRECT METHOD IN STATIC PROBLEMS OF AXI-SYMMETRIC NON-THIN PLATES**

The initial equations for solving the axisymmetric problem are given and considered boundary conditions on the end surfaces and average section of the design element. As a result, we get a system of partial differential equations that can be solved by the numerical-analytical (modified) method of straight lines. The transformation of the reduced equations of equilibrium in parts, as well as the reduced models of the boundary conditions of the end surfaces and the average section, are shown. As a result, a boundary value problem for the system of reduced differential equations in ordinary derivatives written in the Cauchy form with boundary conditions of the general form is obtained.

The thermal conductivity of the cylindrical wall was calculated, the results were compared with analytical calculations and results of other authors, which confirms the reliability of the developed methodology.

A computer simulation of the stress-strain state of a cylindrical structural element due to the complex action of temperature, force and kinematic effects was carried out.

Important conclusions have been made for the use of the modified method of straight lines, which is free from the complications that arise when using the classical method of straight lines.

**Keywords:** reduced boundary conditions, reduced equilibrium equations in parts, system of differential equations, system of reduced differential equations in the Cauchy form, Godunov method of discrete orthogonalization.

УДК 539.3

*Кошевий О.П., Левківський Д.В., Чубарев А.Г., Янсонс М.О.* **Модифікований метод прямих в статичних задачах вісесиметричних нетонких пластин** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.:КНУБА, 2022. – Вип. 109. – С. 342-358.

Табл. 1. Іл. 10. Бібліогр. 12 назв.

UDK 539.3

*Koshevyi O.P., Levkivskiy D.V., Chubarev A.H., Yansons M.O.* **Modified direct method in static problems of axi-symmetric non-thin plates** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 109. – P. 342-358.

Tabl. 1. Fig. 10. Ref. 12.



**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри опору матеріалів КНУБА КОШЕВИЙ Олександр Петрович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, КОШЕВИЙ Олександр Петрович.

**Роб.тел.:** +38(044)-241-54-21

**Моб.тел.:** +38(050) 441-52-30

**E-mail:** koshevyi.op@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-7796-0443>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри опору матеріалів КНУБА ЛЕВКІВСЬКИЙ Дмитро Володимирович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, ЛЕВКІВСЬКОМУ Дмитру Володимировичу.

**Роб.тел.:** +38(044)-241-54-21

**Моб.тел.:** +38(096) 756-21-33

**E-mail:** levkivskyi.dv@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-2964-1605>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** завідувач лабораторії кафедри опору матеріалів КНУБА ЧУБАРЕВ Антон Глібович.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, Чубареву Антону Глібовичу.

**Роб.тел.:** +38(044)-241-54-21

**Моб.тел.:** +38(096) 453-33-38

**E-mail:** chubarev\_ah@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-6620-639X>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** асистент кафедри опору матеріалів КНУБА ЯНСОНС Марина Оскарівна.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА, кафедра опору матеріалів, ЯНСОНС Марині Оскарівні.

**Роб.тел.:** +38(044)-241-54-21

**Моб.тел.:** +38(098) 550-81-87

**E-mail:** iansons.mo@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-6174-0403>