

UDC 539.375

RELIABILITY OF RESULTS OBTAINED BY SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD FOR PRISMATIC BODIES WITH VARIABLE PHYSICAL AND GEOMETRIC PARAMETERS**Yu.V. Vorona,**

Candidate of Technical Sciences

Yu.V Maksimyuk,

Doctor of Engineering

I.Yu. Martyniuk,

Candidate of Technical Sciences

O.V. Maksimyuk*Kyiv National University of Construction and Architecture,
Povitroflotsky Av., 31, Kyiv, 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2021.107.184-192

To confirm the reliability of the results obtained on the basis of the semi-analytical finite element method using the approaches suggested in [1-2, 4-6], a wide range of test problems is considered. Within the framework of the elastic approach, the spatial problem of an unevenly loaded shell, the middle surface of which has the shape of an elliptical paraboloid, is considered. The substantiation of the reliability of solutions obtained on the basis of the semi-analytical finite element method for physically nonlinear problems was carried out using the example of elastic-plastic calculation of an unevenly heated cube, the physical and mechanical characteristics of the material of which depend on temperature. To substantiate the reliability of the results obtained when solving problems of large plastic deformations, the elastic-plastic deformation of a parallelepiped between plane-parallel plates in the absence of contact friction is considered.

Comparison of the results obtained by the semi-analytical finite element method for problems in an elastic, elastic-plastic formulation and taking into account large plastic deformations with the results of other authors shows the reliability of the proposed method.

Keywords: semi-analytical finite element method, stress-strain state, elastic and elastic-plastic deformation, physical and geometric nonlinearity, shape change, curvilinear prismatic bodies.

Introduction. The efficiency of applying the semi-analytical finite element method to solving spatial problems depends on the correct choice of the algorithm for solving systems of linear and nonlinear equations. Analysis of the main indicators, such as ensuring the accuracy of the solution and computational costs, shows that the most effective are combined algorithms based on a combination of stepwise and iterative methods. For matrices of systems of resolving equations of the semi-analytical finite element method, a block structure is characteristic. To solve systems with such a matrix, it is most natural to use the block iteration method. When considering physically and geometrically nonlinear problems, the solution was carried out by the step method of integration over a parameter in combination with the method of block iterations.

The reliability of the application of the created numerical approach to the study of prismatic spatial objects with variable physical and geometric

parameters was confirmed by solving control problems in an elastic, elastic-plastic formulation and taking into account large plastic deformations.

The spatial problem of an unevenly loaded shell. Within the framework of the elastic approach, the spatial problem of a non-uniformly loaded shell is considered, the middle surface of which has the shape of an elliptical paraboloid (Fig. 1):

$$Z^{1'} = \left[1 - \frac{(2Z^{3'} - a)^2}{2a^2} - \frac{(2Z^{2'} - b)^2}{2b^2} \right]. \quad (1)$$

For this task, the following values of the constants are accepted: $a=10$, $b=12$. Shell thickness $h=2$. Elastic modulus of material $E=1$. Poisson's ratio ($\nu=0.3$).

The boundary conditions at the ends are specified for the middle layer as:

$$\begin{aligned} \text{at } Z^{3'} = 0, Z^{3'} = a, \sigma^{3'3'} = U^{1'} = U^{2'} = 0, \\ \text{at } Z^{2'} = 0, Z^{2'} = b, \sigma^{2'2'} = U^{1'} = U^{3'} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Table 1

m_3	$Z^{1'} = 0$		$Z^{1'} = 0.4$		$Z^{1'} = 0.8$		$Z^{1'} = 1.2$		$Z^{1'} = 1.6$		$Z^{1'} = 2$	
	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%
3	0.794	8.6	0.808	8.5	0.814	8.4	0.874	8.3	0.808	8.2	0.796	7.7
5	0.839	3.3	0.850	3.7	0.858	3.5	0.859	3.3	0.852	3.2	0.844	2.4
9	0.841	3.2	0.853	3.4	0.862	3.0	0.861	3.0	0.857	2.6	0.849	1.8
[3]	0.850	–	0.883	–	0.889	–	0.888	–	0.880	–	0.885	–

Due to symmetry, one fourth of the shell is considered.

Loading is carried out along the outer surface of the body with a distributed load, the intensity of which is determined by the formula:

$$q^{1'}(Z^{2'}, Z^{3'}) = -\frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi Z^{3'}}{a} \sin \frac{\pi Z^{2'}}{b}. \quad (3)$$

A solution to a similar problem was carried out in [3].

In the cross-sectional plane, finite element discretization was carried out with the same number of nodes in the $Z^{1'}$ and $Z^{2'}$ directions equal to 9. In the $Z^{3'}$ direction, the displacements were approximated by a series expansion to polynomials.

To determine the required number of retained members of the series when solving the problem from an external load changing in the third direction according to the sine law, a convergence study was carried out (Tab. 1). The accuracy of calculating the displacements in the $Z^{1'}$ direction was determined as a percentage in relation to the result given in [3].

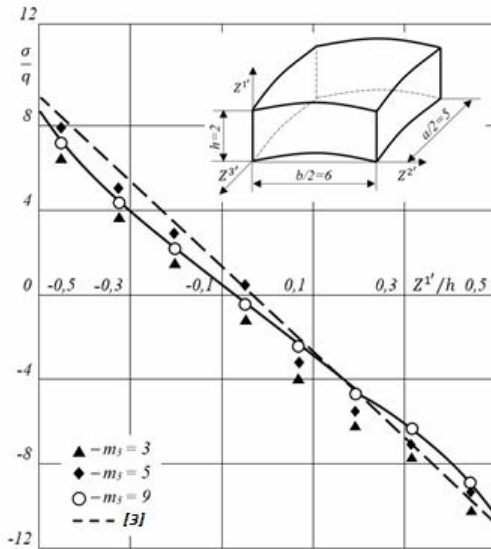


Fig. 1. Unevenly loaded shell, the middle surface of which has the shape of an elliptical paraboloid

It can be seen from the table that the solution obtained by keeping 5 terms of the expansion ($m_3=5$) is slightly inferior in accuracy to the solution at $m_3=9$, at U^1 , calculated by this method, it agrees well with the results of the authors [3], there is a discrepancy in the region 3%.

When comparing other characteristics of the stress-strain state of a thick-walled shell, in particular, stresses $\sigma^{3'3'}$, which are maximum for this problem (Fig. 1), similar results were also obtained.

Elastic-plastic calculation of an unevenly heated cube.

The validation of the reliability of solutions obtained on the basis of the semi-analytical finite element method for physically nonlinear problems is carried out using the example of elastic-plastic calculation of an unevenly heated cube, the physical and mechanical characteristics of the material of which depend on temperature. The cube, the side length of which is $2a=1$, is made of steel (Fig. 2). The thermomechanical characteristics of the material are given in the work [8].

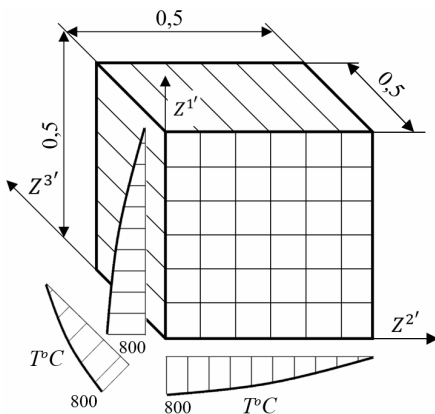


Fig. 2. Calculation diagram of a cube and temperature distribution diagrams

The object is exposed to an

inhomogeneous temperature field, the law of temperature change is adopted in the form:

$$T = 800 \cos(\pi Z^{1'}) \cos(\pi Z^{2'}) \cos(\pi Z^{3'}). \quad (4)$$

The results of solving this problem are compared with the previously obtained traditional FEM in work [7].

In fig. 2 shows the design diagram of the object and the temperature distribution diagrams. Convergence studies have shown that a uniform mesh with a total number of elements equal to 16 should be used in the cross-sectional plane, and along the decomposition coordinate by a factor of 2 leads to a change in the result by less than 2%.

The results of solving the problem are presented in the form of diagrams of maximum stresses for elastic and elastic-plastic variants of calculation and curves depicting the boundary of the zone of plastic deformations (Fig. 3). The stress distribution $\sigma^{3'3'}$ is shown near the vertical axis of symmetry of the cube ($Z^{2'} = Z^{3'} = 0.06$).

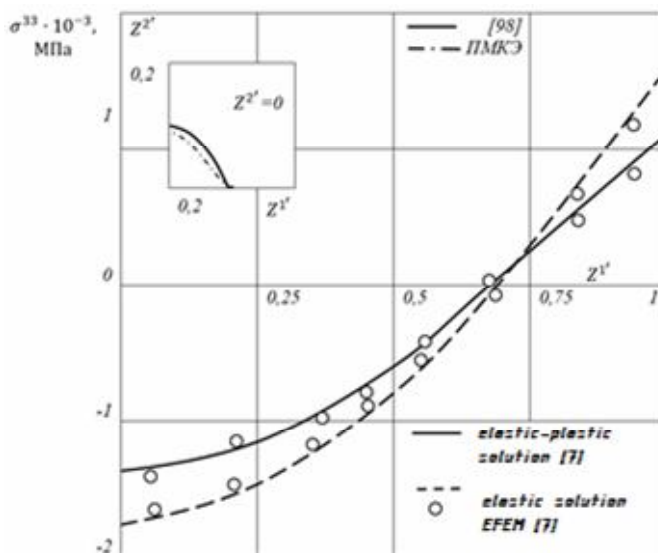


Fig. 3. Results of solving the problem of calculating an unevenly heated cube

The solid line corresponds to the elastic-plastic solution, the dotted line to the elastic solution given in [7]. The circles show the values of $\sigma^{3'3'}$, obtained by the semi-analytic finite element method.

As we can see, it is observed that there is a good agreement between the results when considering a non-uniformly heated cube both in the elastic and in the elastic-plastic formulation. The maximum calculation error for $\sigma^{3'3'}$ does not exceed 2%.

In the plane $Z^{2'} = 0$ the boundary of the zone of development of plastic deformations is indicated. The curves constructed on the basis of the semi-analytical finite element method and in the article [7] practically coincide.

Elastic-plastic deformation of a parallelepiped between plane-parallel plates in the absence of contact friction. To substantiate the reliability of the results obtained on the basis of the developed approach in solving problems of large plastic deformations, the elastic-plastic deformation of a parallelepiped between plane-parallel plates in the absence of contact friction is considered.

The initial height of the parallelepiped was $2H_0=40\text{mm}$, the initial dimensions of the section were $2L_0=37\text{mm}$, $2B=43\text{mm}$. The upsetting process was carried out up to a height of $2H_1=28\text{mm}$, i.e. the degree of deformation in height was 30%.

$$\varepsilon_1 = \frac{H - H_1}{H} \cdot 100\% . \quad (5)$$

The calculated and experimental data presented in [9] were used as a standard.

The design scheme of the object is shown in Fig. 4. To approximate the body shape, a set of prismatic finite elements with variable physical and geometric parameters was used. The settlement process was modeled by setting the forced displacements ΔU^I of the $ACDE$ plane.

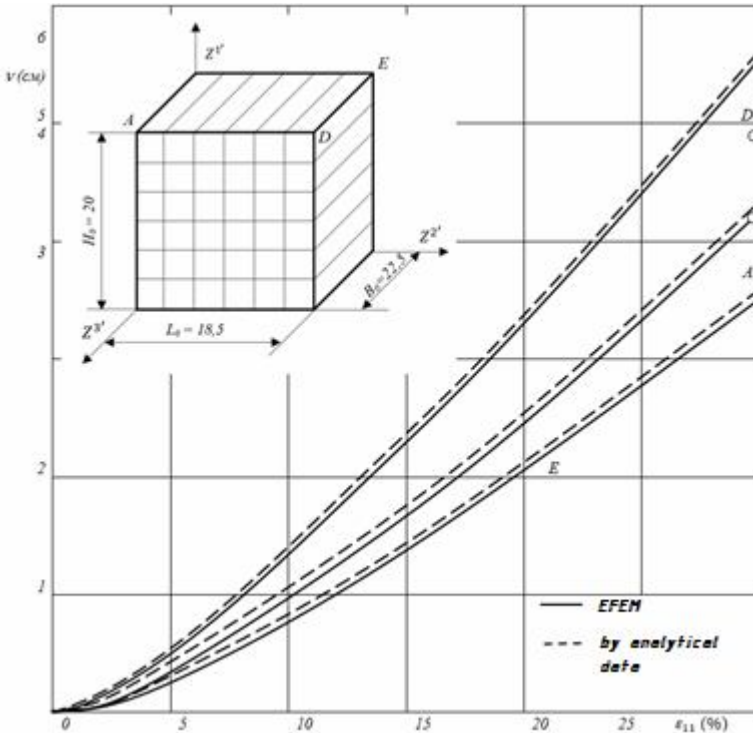


Fig. 4. Design scheme of the object, results of solving the problem

Investigations of the convergence of the results are carried out depending on the accuracy of the convergence of the solutions obtained for a system of nonlinear equations. For $\varepsilon = 10^{-5}$ this convergence of the obtained solutions was achieved, a further decrease in the parameter ε does not lead to any significant change in the result. Thus, the error in calculating the maximum displacements at $\varepsilon = 10^{-5}$ was less than 1% compared to those obtained at $\varepsilon = 10^{-6}$.

The calculation results are shown in Fig. 4 in the form of the trajectories of points A , D , E displacements. Solid lines show the trajectories constructed using the results of solving the problem with semi-analytical data. There is a good coincidence of the curves obtained by the semi-analytical finite element method with the reference one.

Conclusion. On this basis, the effectiveness of the application of the semi-analytical finite element method to the calculation of curvilinear inhomogeneous prismatic objects is shown. The solution of the control problems of the theory of elasticity, thermoelasticity and thermoplasticity, as well as the problems of shape change, makes it possible to draw a conclusion about the reliability of the results of the study of the selected class of objects on the basis of the developed methodology and the applied software package that implements it.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters / V.A. Bazhenov, M.V. Horbach, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymiuk // *Opir materialiv i teoriia sporud*– 2021. – Vyp. 106. – S. 92-104.
2. *Bazhenov V.A.* Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv u pruzhniy ta pruzhno-plastychniy postanovtsi dlia kryvoliniinykh pryzmatychnykh ob'ektiv (Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curvilinear prismatic objects) / V.A. Bazhenov, A.A. Shkriil', Yu.V. Maksymiuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymiuk// *Opir materialiv i teoriia sporud*– 2020. – Vyp. 105. – S. 24-32.
3. *Grigorenko Ya.M.* Statika anizotropnykh tolstotennykh obolochek (Statics of anisotropic thick-walled shells) / Ya.M. Grigorenko, A.G. Vasilenko, N.D. Pankratova // *Kiyev: Vyshcha shkola* – 1985, 190s.
4. *Huliar O.I.* Universalnyi pryzmatychniy skincheniy element zahalnoho typu dlia fizychno i heometrychno neliniinykh zadach deformuvannya pryzmatychnykh til (Universal prismatic finite element of general type for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies) / O.I. Huliar, Yu.V. Maksymiuk, A.A. Kozak, O.V. Maksymiuk // *Budivelni konstruktzii teoriia i praktyka* – 2020. – Vyp. 6. – S. 72–84.
5. *Maksymiuk Yu.V.* Alhorytm rozv'iazannya systemy liniinykh ta neliniinykh rivnian napivanalitichnym metodom skinchenykh elementiv dlia kryvoliniinykh neodnorodnykh pryzmatychnykh til (Algorithm for solving system of linear and nonlinear equations by the semivanalytic finite element method for curvilinear inhomogeneous prismatic bodies) / Yu.V. Maksymiuk, M.V. Honcharenko, I.Iu. Martyniuk, O.V. Maksymiuk // *Budivelni konstruktzii, teoriia i praktyka* – 2020. – Vyp. 7. – S. 101–108.
6. *Maksymiuk Yu.V.* Osnovni spivvidnoshennia dlia fizychno i heometrychno neliniinykh zadach deformuvannya pryzmatychnykh til (Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies) / Yu.V. Maksymiuk, S.O. Pyskunov, A.A. Shkriil, O.V. Maksymiuk// *Opir materialiv i teoriia sporud*– 2020. – Vyp. 104. – S. 255–264.

7. *Pavlychko V.M.* Resheniye trekhmerynykh zadach termoplastichnosti pri prostykh protsesakh nagruzheniya (Solution of three-dimensional problems of thermoplasticity in simple loading processes) / V.M. Pavlychko // Problemy prochnosti.- 1986. № 1.- s. 77-81.
8. *Shevchenko Yu.N.* Prostranstvennyye zadachi termoplastichnosti (Spatial problems of thermoplasticity) / Yu.N. Shevchenko, M.Ye. Babeshko, V.V. Piskun, V.G. Savchenko// Kiyev: Nauk.dumka, 1980. - 262 s.
9. *Tarnovskiy I.Ya.* Formoizmeneniya pri plasticheskoy obrabotke metallov davleniyem (Form changes during plastic processing of metals by pressure) / I.Ya. Tarnovskiy // M.: Metallurgizdat, 1954. -534 s.

Стаття надійшла до редакції 18.09.2021

Vorona Yu.V., Maksim'yuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksim'yuk O.V.

ДОСТОВІРНІСТЬ РЕЗУЛЬТАТІВ ОТРИМАНИХ НАПІВНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З ПЕРЕМІННИМИ ФІЗИЧНИМИ І ГЕОМЕТРИЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для підтвердження достовірності отриманих результатів на основі напіваналітичного методу скінчених елементів з використанням підходів, наведених в роботах [1-2, 4-6], розглянуто широке коло тестових завдань. У рамках пружного підходу розглядається просторова задача про рівномірно навантажену оболонку, середня поверхня якої має форму еліптичного параболоїда. Обґрунтування достовірності рішень, одержуваних на базі напіваналітичного методу скінчених елементів для фізично нелінійних задач, проведено на прикладі пружнопластичного розрахунку нерівномірно нагрітого куба, фізико-механічні характеристики матеріалу якого залежать від температури. Для обґрунтування достовірності результатів, одержуваних при вирішенні задач про великі пластичні деформації, розглянуто пружнопластичне деформування паралелепіпеда, затисненого між плоскопаралельними плитами при відсутності контактної тертя.

Показана ефективність застосування напіваналітичного методу скінчених елементів до розрахунку криволінійних неоднорідних призматичних об'єктів. Розв'язання контрольних задач теорії пружності, термопружності та термопластичності, а також задач зміни форми дає змогу зробити висновок про достовірність результатів дослідження вибраного класу об'єктів, отриманих з використанням розробленої методології та прикладного програмного комплексу, що реалізує її.

Ключові слова: напіваналітичний метод скінчених елементів, напружено-деформований стан, пружне та пружно-пластичне деформування, фізична і геометрична нелінійність, формозміння, криволінійні призматичні тіла.

Vorona Yu.V., Maksimyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V.

RELIABILITY OF RESULTS OBTAINED BY SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD FOR PRISMATIC BODIES WITH VARIABLE PHYSICAL AND GEOMETRIC PARAMETERS

To confirm the reliability of the results obtained on the basis of the semi-analytical finite element method using the approaches suggested in [1-2, 4-6], a wide range of test problems is considered. Within the framework of the elastic approach, the spatial problem of an unevenly loaded shell, the middle surface of which has the shape of an elliptical paraboloid, is considered. The validation of the reliability of solutions obtained on the basis of the semi-analytical finite element method for physically nonlinear problems is carried out using the example of elastic-plastic calculation of an unevenly heated cube, the physical and mechanical characteristics of the material of which depend on temperature. To substantiate the reliability of the results obtained when solving problems of large plastic deformations, the elastic-plastic deformation of a parallelepiped between plane-parallel plates in the absence of contact friction is considered.

The efficiency of application of the semi-analytical finite element method to the calculation of curvilinear inhomogeneous prismatic objects is shown. The solution of the control problems of the theory of elasticity, thermoelasticity and thermoplasticity, as well as the problems of shape change, makes it possible to draw a conclusion about the reliability of the results of the study of the selected class of objects on the basis of the developed methodology and the applied software package that implements it.

Keywords: semi-analytical finite element method, stress-strain state, elastic and elastic-plastic deformation, physical and geometric nonlinearity, shape change, curvilinear prismatic bodies.

Ворона Ю.В., Максимюк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максимюк О.В.

ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛУЧЕННЫХ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для подтверждения достоверности получаемых результатов на основе полуаналитического метода конечных элементов с использованием подходов наведенных в работах [1-2, 4-6], рассмотрен широкий круг тестовых задач. В рамках упругого подхода рассмотрена пространственная задача о неравномерно нагруженной оболочке, срединная поверхность которой имеет форму эллиптического параболоида.

Показана эффективность применения полуаналитического метода конечных элементов для расчета криволинейных неоднородных призматических объектов. Решение контрольных задач теории упругости, термоупругости и термопластичности, а также задач формоизменения дает возможность сделать вывод о достоверности результатов исследования выделенного класса объектов на базе разработанной методики и реализующего ее пакета прикладных программ.

Ключевые слова: полуаналитического метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, упругое и упруго-пластическое деформирование, физическая и геометрическая нелинейность, формоизменения, криволинейные призматические тела.

УДК539.375

Ворона Ю.В., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. **Достовірність результатів, отриманих напіваналітичним методом скінчених елементів для призматичних тіл з перемінними фізичними і геометричними параметрами**// Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – Київ: КНУБА, 2021. – Вип. 107. – С. 184-192.

Показано ефективність напіваналітичного методу скінчених елементів до розрахунку криволінійних неоднорідних призматичних об'єктів. Результати розв'язання контрольних задач дозволяють зробити висновок про надійність розробленої методики.

Табл. 1. Рис. 4. Бібліогр. 9 назв.

UDC539.375

Vorona Y.V., Maksymyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksymyuk O.V. **Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters** // Strength of Materials and Theory of Structures: scientific-technical. team – Kyiv: KNUBA, 2021. - Issue. 107. – S. 184-192.

The efficiency of the semi-analytical finite element method for calculating curvilinear inhomogeneous prismatic objects is shown. The results of solving control problems allow us to conclude about the reliability of the developed technique.

Tabl. 1. Fig. 4. Ref. 9

УДК 539.375

Ворона Ю.В., Максимюк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максимюк О.В. **Достовірність результатів, отриманих полуаналитическим методом конечных элементов для призматических тел с переменными физическими и геометрическими параметрами**// Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. – К.: КНУСА, 2021. – Вып. 107. – С. 184-192.

Показана ефективність полуаналитического метода конечных элементов для расчета криволинейных неоднородных призматических объектов. Результаты решения контрольных задач позволяют сделать вывод о надежности разработанной методики.

Табл. 1. Ил. 4. Библиогр. 9 назв.

Автор: кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки КНУБА
Ворона Юрій Володимирович

Адреса: 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний
університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки

Мобільний тел.: +38(068) 381-38-25

E-mail: vorona.iuv@knuba.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

Автор: професор, доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки КНУБА
Максим'юк Юрій Всеволодович

Адреса: 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний
університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки

Робочий тел.: +38(044) 241-55-38

Мобільний тел.: +38(067) 230-94-72

E-mail: maximyuk@ukr.net

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

Автор: кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки КНУБА
Мартинюк Іван Юрійович

Адреса: 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний
університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки КНУБА

Мобільний тел.: +38(096) 068-00-29

E-mail: ivan.martinyuk@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

Автор: аспірант Київського національного університету будівництва і архітектури
Максим'юк Олександр Всеволодович

Адреса: 03037, Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний
університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки

Мобільний тел.: +38(067) 306-17-81.

E-mail: sashamaksymiuk@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-2367-3086>