

УДК 539.3

## ВПЛИВ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК НА ЇХ ДИНАМІЧНУ СТІЙКІСТЬ

О.М. Палій,  
старший викладач

О.О. Лук'янченко,  
канд. техн. наук

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; e-mail: [paliy.oxana@gmail.com](mailto:paliy.oxana@gmail.com)*

Досліджено вплив геометричних характеристик конічних оболонок на стійкість усталених коливань при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Задача стійкості нелінійних вимушених коливань оболонок сформована на основі модифікованого кінцево-різницевого методу криволінійних сіток, який дозволив здійснити перехід від векторних звичайних диференціальних співвідношень до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь. Розв'язок системи побудовано за допомогою методу продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму виконано аналіз значення визначників матриці лінеаризованих рівнянь, що відповідають симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати динамічної стійкості конічних оболонок полягав у зміні знаку відповідного визначника або зміни кількості додатних та від'ємних діагональних елементів матриці лінеаризованих рівнянь. Критичне значення динамічного навантаження характеризувало рівень його інтенсивності при втраті стійкості оболонок.

Виявлено особливості коливального руху та форм втрати стійкості конічних оболонок. Визначено критичні значення повздовжніх навантажень. Досліджена залежність критичних значень інтенсивності навантаження від частоти усталених коливань при варіюванні геометричних параметрів конічних оболонок.

**Ключові слова:** власні частоти, вимушені коливання, динамічна стійкість, конічна оболонка, метод криволінійних сіток, метод продовження розв'язку по параметру, метод Ньютона-Канторовича.

### Вступ

Особливу увагу в дослідженні динамічної стійкості конструкцій привертають випадки, коли частота вимушених коливань наближається до однієї з власних частот коливань конструкції [1-3]. Це призводить до різкого збільшення її амплітуди коливань, що є неприйнятним з експлуатаційної точки зору. В той же час і при фіксованій частоті коливань збільшення амплітуди періодичного навантаження може привести до різкого збільшення амплітуди коливань конструкції або змінити її форми коливань.

Мета даної роботи полягає у дослідженні впливу геометричних характеристик конічних оболонок на стійкість їх усталених коливань при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Коливання оболонки відбувається при фіксованій частоті, яка відповідає частоті періодичного навантаження. Відомо, що при дії періодичного навантаження невеликої інтенсивності коливання оболонок

відбуваються по симетричним відносно осі формам коливань. Збільшення інтенсивності силового збурювання при фіксованій частоті може переводити симетричні форми коливань в циклічно симетричні. За певних умов, залишаючись симетричними, коливання оболонки можуть різко збільшити амплітуду і змінити симетричну форму коливань. Перераховані явища характеризують втрату стійкості усталеного руху оболонки [4-6].

### 1. Чисельна методика

Вимушені коливання оболонки описується системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + \vec{F}(\vec{U}) + \lambda \vec{q} = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{U} = \{U_1, U_2, U_3\} = \{U, V, W\}$  – вектор переміщення;  $\vec{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$  – нелінійна вектор-функція, яка характеризує жорсткісні властивості оболонки;  $\vec{q} = \{q^1, q^2, q^3\}$  – вектор зовнішнього навантаження;  $\lambda$  – параметр інтенсивності навантаження.

Для розв'язання задачі стійкості вимушених нелінійних коливань оболонки диференціальні рівняння (1) дискретизуються в напрямку твірної оболонки за допомогою модифікованого кінцево-різницевого метода криволінійних сіток. Цей метод дозволяє здійснювати перехід від векторних звичайних диференціальних співвідношень до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь. В круговому напрямку компоненти вектора переміщень елемента серединної поверхні оболонки апроксимуються тригонометричними рядами [4, 5]. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона-Канторовича [3]. Ці методи дозволяють розв'язок нелінійної крайової задачі звести до розв'язку послідовності лінеаризованих крайових задач. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму аналізуються значення визначників матриці лінеаризованих рівнянь, що відповідають симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати стійкості коливань оболонки полягає у зміні знаку відповідного визначника, а рівень інтенсивності навантаження, що відповідає цьому стану, характеризує критичне динамічне навантаження [3-5].

### 2. Розрахункова модель конічної оболонки

Розглянута конічна оболонка, яка виготовлена зі сталі з відповідними механічними характеристиками: коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ ; модуль пружності  $E = 2,06 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>; щільність  $\gamma = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Товщина оболонки  $h$  набувала значення 0,001 м та 0,002 м. Розглядалися варіанти зі сталими радіусами  $R = 0,20$  м;  $r = 0,15$  м та різною висотою оболонки  $L$ , яка набувала значення 0,48 м та 0,72 м. Граничні умови приймалися такими: на одному кінці оболонка жорстко закріплена, а на іншому – задано ковзне кріплення вздовж твірної. Твірну конічної оболонки розбито на 44 частини, вздовж кола – на 40 частин. На оболонку діє періодичне за часом рівномірно

розподілене повздовжнє навантаження  $q=q_1 \cos \omega t$  з інтенсивністю  $q_1$  (кН/м) та круговою частотою  $\omega$  (рад/с).

### 3. Вплив геометричних параметрів конічної оболонки на стійкість її усталених коливань

Стійкість усталених коливань досліджувалась для конічної оболонки зі сталими геометричними параметрами:  $h=0,002$  м;  $R=0,2$  м;  $r=0,15$  м, та висотою, яка приймала значення  $L=0,48$  м та  $L=0,72$  м. В табл. 1 наведені критичні значення амплітуд навантаження  $q_1^*$  при відповідних частотах коливань  $\omega$  конічної оболонки, а також номери гармонік  $n$ , які характеризують циклічно симетричні форми втрати стійкості.

Таблиця 1

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b><math>h=0,002</math> м <math>R=0,2</math> м <math>r=0,15</math> м <math>L=0,48</math> м</b>								
0	9	3650,045	3100	5	2385,045	<b>3545</b>	<b>4</b>	<b>0,045</b>
500	9	3650,045	3200	5	2025,045	3600	6	3375,045
700	9	3645,045	3400	5	855,045	3650	6	3300,045
1000	8,9	3645,045	3410	5	720,045	3800	6	2925,045
1400	8,9	3645,045	<b>3438</b>	<b>5</b>	<b>0,045</b>	4000	6	1800,045
1700	9	3600,045	3450	4	1350,045	4080	6	810,045
2300	9	3555,045	3500	4	945,045	4090	6	540,045
2500	8,9	3555,045	3510	4	810,045	<b>4099</b>	<b>6</b>	<b>0,045</b>
3000	5	2700,045	3520	4	675,045			
<b><math>h=0,002</math> м <math>R=0,2</math> м <math>r=0,15</math> м <math>L=0,72</math> м</b>								
0	10-14	2300,025	2000	4	1700,025	2650	3	600,025
100	10-14	2300,025	2200	4	925,025	<b>2667</b>	<b>3</b>	<b>0,025</b>
300	9	2300,025	2250	4	525,025	2670	5	1375,025
500	9-14	2300,025	<b>2274</b>	<b>4</b>	<b>0,025</b>	2680	5	1300,025
700	9-14	2300,025	2300	9-15	2275,025	2700	5	1125,025
1000	9-14	2300,025	2400	3	2250,025	2750	5	525,025
1400	10-15	2300,025	2500	3	1825,025	2760	5	250,025
1700	12-13	2275,025	2600	3	1175,025	<b>2763</b>	<b>5</b>	<b>0,025</b>

В табл. 2 наведені результати обчислень критичних значень амплітуд навантаження  $q_1^*$  та номери гармонік  $n$  для конічних оболонок зі сталими геометричними параметрами:  $R=0,2$  м;  $r=0,15$  м;  $L=0,48$  м при відповідних значеннях кругової частоти. При цьому товщина оболонки  $h$  приймала різні значення  $0,001$  м та  $0,002$  м.

Таблиця 2

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b><math>h=0,001</math> м <math>R=0,2</math> м <math>r=0,15</math> м <math>L=0,48</math> м</b>								
0	12	880,01	2300	6	570,01	2580	7	800,01
100	12	880,01	2500	6	50,01	2600	7	780,01
300	12	880,01	2501	6	0,01	2700	7	630,01
500	12	880,01	2510	5	290,01	2750	7	530,01
700	12	880,01	2520	5	250,01	2800	7	400,01
1000	12	880,01	2540	5	170,01	2840	7	230,01
1400	8,9	880,01	2550	5	100,01	2850	7	160,01

1700	9	880,01	2555	5	0,01	2858	7	0,01
2000	6	840,01	2570	7	810,01			
<b><math>h=0,002</math> м <math>R=0,2</math> м <math>r=0,15</math> м <math>L=0,72</math> м</b>								
0	9	3650,045	3100	5	2385,045	<b>3545</b>	<b>4</b>	<b>0,045</b>
500	9	3650,045	3200	5	2025,045	3600	6	3375,045
700	9	3645,045	3400	5	855,045	3650	6	3300,045
1000	8,9	3645,045	3410	5	720,045	3800	6	2925,045
1400	8,9	3645,045	<b>3438</b>	<b>5</b>	<b>0,045</b>	4000	6	1800,045
1700	9	3600,045	3450	4	1350,045	4080	6	810,045
2300	9	3555,045	3500	4	945,045	4090	6	540,045
2500	8,9	3555,045	3510	4	810,045	<b>4099</b>	<b>6</b>	<b>0,045</b>
3000	5	2700,045	3520	4	675,045			

З таблиць 1 і 2 бачимо, що існують частоти коливань конічної оболонки, при яких критичні значення амплітуд навантаження  $q_1^*$  наближаються до нуля. У випадку, коли товщина оболонки збільшується вдвічі, при однакових значеннях висоти та радіусів конічної оболонки, значення нижчих власних частот та критичне навантаження зростає, а кількість гармонік в коловому напрямку зменшується. При збільшенні висоти оболонки вдвічі та однакових значеннях товщини та радіусів значення критичного навантаження та нижчих власних частот знижується, а кількість гармонік в коловому напрямку зменшується.

Залежності критичних значень амплітуд навантаження та відповідні частоти коливань оболонки подано у вигляді кривих на рис. 1, 2. Для конічних оболонок зі сталими геометричними параметрами:  $h=0,002$  м;  $R=0,2$  м;  $r=0,15$  м та різними значеннями висоти  $L$ , яка набуває значень  $L=0,48$  м (а);  $L=0,72$  м (б) ці залежності відображені на рис. 1.

На рис. 2 відображені залежності критичних значень амплітуд навантаження  $q_1^*$ , що періодично змінюється з часом, від частоти коливань конічних оболонок зі сталими геометричними параметра-

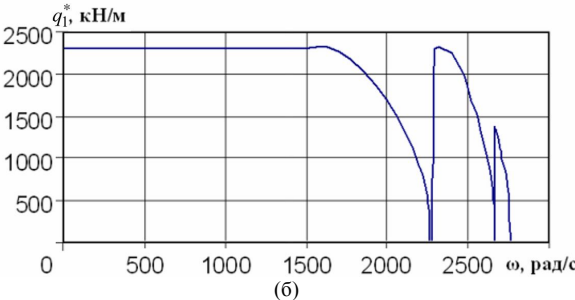
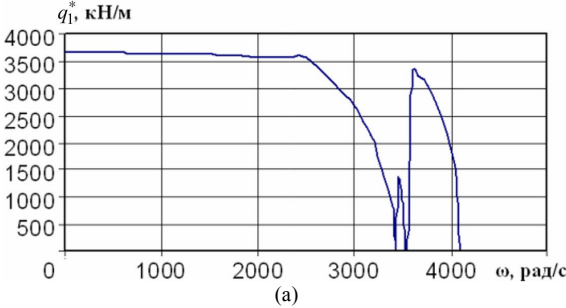


Рис. 1. Залежність критичного значення амплітуди навантаження  $q_1^*$  від частоти: (а)  $h=0,002$ м;  $R=0,20$  м;  $r=0,15$  м;  $L=0,48$  м; (б)  $h=0,002$  м;  $R=0,20$  м;  $r=0,15$  м;  $L=0,72$ м

ми:  $R=0,20$  м;  $r=0,15$  м;  $L=0,48$  м. При цьому  $h$  набуває значень:  $h=0,001$  м (а),  $h=0,002$  м (б).

Видно, що існують частоти зовнішнього навантаження, при яких представлені криві перетинають вісь частот (рис. 1, 2). Значення таких частот відповідають власним частотам вільних коливань і характеризують втрату стійкості усталених вимушених коливань конічної оболонки.

Також бачимо, що при сталих значеннях товщини і радіусів оболонки

(табл. 1, рис. 1) збільшення її висоти приводить до пониження амплітуди критичного навантаження та власних частот коливань оболонки. В цьому випадку втрата стійкості розглянутих оболонок відбувається по циклічно симетричним формам. При фіксованих значеннях радіусів та висоти конічної оболонки збільшення її товщини приводить до підвищення значення нижчих власних частот та критичних навантажень (табл. 2, рис. 2) і також втрата стійкості реалізується по циклічно симетричним формам.

**Висновок.** Представлена чисельна методика дозволила дослідити стійкість усталених коливань конічних оболонок при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Виявлена залежність форм втрати стійкості конічних оболонок та критичного значення амплітуди навантаження від геометричних параметрів оболонок, інтенсивності зовнішнього впливу та частоти усталених коливань.

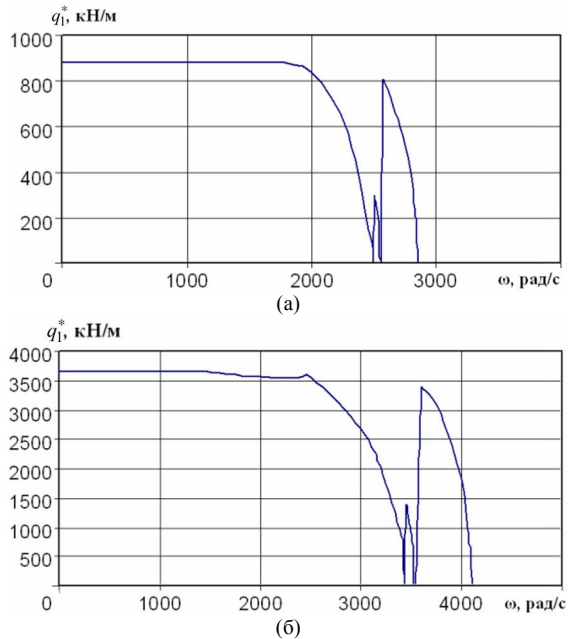


Рис. 2. Залежність критичного значення амплітуди навантаження  $q_1^*$  від частоти: (а)  $h=0,001$  м,  $R=0,20$  м,  $r=0,15$  м,  $L=0,48$  м; (б)  $h=0,002$  м,  $R=0,20$  м,  $r=0,15$  м,  $L=0,48$  м

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 359с.
3. Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Киричук А.А. Устойчивость нелинейных колебаний оболочек вращения // Прикладная механика. – Киев, 1982. – Т. 18, №6. – С. 50- 56.
4. О.А. Киричук, О.М. Палій. Математична модель параметричних нелінійних коливань тонких оболонок // Вісник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вип. 2(31). – С. 230-234.
5. Киричук А.А., Палій О.Н. Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций // Математические модели в образовании, науке и

промышленности: Сборник научных трудов. – Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003. – С. 55-58.

6. Палій О.М., Лук'яненко О.О. Частотний аналіз відгуку однополого гіперболоїда на періодичне повздовжнє навантаження. Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 199-206.

#### REFERENCES

1. Volmir A.S. Ustoychivost deformiruemykh sistem [Stability of deformable systems]. – М.: Nauka, 1967. – 984 s.(rus).
2. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. Ustoychivost obolochek [Shell stability]. – М.: Nauka, 1978. – 359 s.(rus).
3. Gotsulyak E.A., Gulyaev V.I., Dehtyaryuk E.S., Kirichuk A.A. Ustoychivost nelineynykh kolebaniy obolochek vrascheniya [Stability of nonlinear vibrations of revolution shells]// Prikladnaya mehanika. – Kiev, 1982. – Т. 18, #6. – С. 50- 56. (rus).
4. Kirichuk A.A., Paliy O.N. Chislennno-analiticheskiy metod issledovaniya ustanovivshisya kolebaniy obolochechnykh konstruksiy [A numerical-analytical method for studying the steady-state vibrations of shell structures]// Matematicheskie modeli v obrazovanii, nauke i promyshlennosti: Sbornik nauchnykh trudov. – Sankt-Peterburgskoe otdelenie MAN VSH, 2003. – С. 55-58. (rus).
5. Kyrychuk O.A., Paliy O.M. Matematychna model parametrychnykh nelineynykh kolyvan tonkykh obolonok [Mathematical model of parametric nonlinear oscillations of thin shells] // Vistnyk KhNTU. – Kherson: KhNTU, 2008. – Вyp. 2(31). – С. 230-234.(ukr)
6. Paliy O.M., Lukianchenko O.O. Chastotnyi analiz vidhuku odnopoloho hiperboloida na periodychnne povzdovzhnie navantazhennia [Frequency analysis of response of same-sex hyperboloid to periodic longitudinal loading]// Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekhn. zbim. – К.: КНУБА, 2019. – Вyp. 102. – С. 199-206.

Стаття надійшла 09.09.2019 р.

Палій О.Н., Лукьяненко О.А.

#### **ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ИХ ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ.**

Исследовано влияние геометрических характеристик на устойчивость установившихся колебаний конических оболочек при действии периодических по времени равномерно распределенных продольных нагрузок. Задача устойчивости нелинейных вынужденных колебаний оболочек сформулирована на основе модифицированного конечно-разностного метода криволинейных сеток, который позволил осуществить переход от векторных обыкновенных дифференциальных соотношений к нелинейной системе уравнений. Решение системы построено с помощью метода продолжения решения по параметру в сочетании с методом Ньютона-Канторовича. На каждом шагу реализации вычислительного алгоритма выполнен анализ значения определителей матрицы линеаризованных уравнений, соответствующие симметричным или циклично симметричным формам колебаний оболочек. Критерий потери динамической устойчивости конических оболочек заключался в изменении знака соответствующего определителя или изменения количества положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы линеаризованных уравнений. Критическое значение динамической нагрузки характеризовало уровень его интенсивности при потере устойчивости оболочек.

Выявлены особенности колебательного движения и форм потери устойчивости конических оболочек. Определены критические значения продольных периодических нагрузок. Исследована зависимость критических значений интенсивности нагрузок от частоты установившихся колебаний при варьировании геометрических параметров конической оболочки.

**Ключевые слова:** собственные частоты, вынужденные колебания, динамическая устойчивость, коническая оболочка, метод криволинейных сеток, метод продолжения решения по параметру, метод Ньютона-Канторовича.

*Palii O.M., Lukianchenko O.O.*

### **INFLUENCE OF CONIC SHELLS GEOMETRIC CHARACTERISTICS ON THEIR DYNAMIC STABILITY**

The influence of geometrical characteristics on the stability of established oscillations conical shells under the action of uniformly distributed longitudinal loads periodic in time is studied. The stability problem of nonlinear forced vibrations shells is formed on the basis of a modified finite-difference method of curvilinear grids, which allowed the transition from vector ordinary differential relations to a nonlinear system of equations. The solution of the system is constructed using the method of continuation the solution by parameter in combination with the Newton-Kantorovich method. At each step the implementation of the computational algorithm, the values of the determinants the matrix of linearized equations corresponding to symmetric or cyclically symmetric vibration modes are analyzed. The criterion for the conical shells loss of the dynamic stability was a change in the sign of the corresponding determinant or a change in the number of positive and negative diagonal elements of the matrix of linearized equations. The critical value of the dynamic load characterized the level of its intensity with the loss of stability of the shells.

The features of the oscillatory motion and loss forms of conical shells stability are revealed. The critical values of the longitudinal loads are determined. The dependence of the critical values of the load intensity on the frequency of steady oscillations with varying geometric parameters of the conical shell is investigated.

**Keywords:** natural frequencies, forced oscillations, dynamic stability, conical shell, curvilinear grids method, parameter continuation method, Newton-Kantorovich method.

УДК 539.3

*Палій О.М., Лук'яненко О.О.* **Вплив геометричних характеристик кінцевих оболонок на їх динамічну стійкість** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 235-242.

*Досліджено вплив геометричних характеристик кінцевих оболонок на стійкість усталених коливань при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень. Задача динамічної стійкості оболонок сформована на основі методу криволінійних сіток і розв'язана за допомогою методу продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона –Канторовича.*

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. 6 назв.

UDC 539.3

*Palii O.M., Lukianchenko O.O.* **Influence of conical shells geometric characteristics on their dynamic stability** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – Issue. 103. – P. 235-242.

*The influence of conical shells geometric characteristics on steady oscillations stability under periodically distributed longitudinally distributed loads is studied. The problem of shells dynamic stability on the basis of the method of curvilinear grids is formed and is solved by the method of parameter continuation in combination with the Newton-Kantorovich method.*

Tab. 2. Fig. 2. References 6 items.

УДК 539.3

*Палій О.Н., Лук'яненко О.А.* **Влияние геометрических характеристик конических оболочек на их динамическую устойчивость** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вип. 103. – С. 235-242. – Укр.

*Исследовано влияние геометрических характеристик конических оболочек на устойчивость установившихся колебаний при действии периодических равномерно распределенных продольных нагрузок. Задача динамической устойчивости оболочек сформирована на основе метода криволінійных сеток и решена методом продолжения решения по параметру в сочетании с методом Ньютона-Канторовича.*

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. 6 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** старший викладач кафедри теоретичної механіки КНУБА, ПАПІЙ Оксана Миколаївна.

**Адреса:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПАПІЙ Оксані Миколаївні.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-72.

**Мобільний тел.:** +38(067) 236-39-85.

**Імейл:** [paly.oxana@gmail.com](mailto:paly.oxana@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-5958-1862>.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-40-20.

**Мобільний тел.:** +38(095) 727-18-25.

**Імейл:** [lukianchenko.oo@knuba.edu.ua](mailto:lukianchenko.oo@knuba.edu.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-1794-6030>