УДК 624.046.012.45: 539.376

ДЕФОРМАЦІЙНИЙ РОЗРАХУНОК ПРОСТОРОВИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ РАМ МСЕ З УРАХУВАННЯМ ВІБРОПОВЗУЧОСТІ БЕТОНУ

С.О. Слободянюк,
д-р техн. наук, професор

А.П. Буратинський,
канд. техн. наук

ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», м. Дніпро

Розглядається задача розрахунку просторової залізобетонної рами методом скінченних елементів (МСЕ) з урахуванням деформованої схеми та тривалих процесів – усадки, повзучості та віброповзучості бетону. Розрахунок з урахуванням деформованої схеми або деформацій поздовжнього згину називають ще деформаційним розрахунком. Отримано матриці жорсткості трьох типів скінченного елемента в місцевій системі координат, матрицю жорсткості всієї системи, розв'язок вирішуючого рівняння і алгоритм МСЕ. Наведено пропозиції по формулам автоматизованого розрахунку, а також приклад розрахунку просторової рами**.**

Ключові слова: просторова рама, матриця жорсткості, метод скінченних елементів, алгоритм, усадка, повзучість, віброповзучість бетону.

Вступ. Ефективність просторових рам або стержневих залізобенних систем, які знайшли широке застосування як в цивільному так і в промисловому будівництві, в значній мірі залежить від правильно розрахованої конструктивної схеми. Якщо конструктивна схема (рама) виконана з залізобетону, то при різноманітних тривалих статичних і динамічних навантаженнях в рамах проявляється таке характерне явище як повзучість і віброповзучість бетону. Крім цього в просторових рамах необхідно врахувати деформації поздовжнього згину. Розрахунок з урахуванням деформацій поздовжнього згину або деформованої схеми більш коротко називають ще деформаційним розрахунком. Тому для деформаційного розрахунку стержневих залізобетонних систем з урахуванням повзучості і віброповзучості потрібна розробка методу, що дозволяє врахувати ці явища і автоматизувати процес розрахунку. Розробка будь-якого методу з повним урахуванням як зовнішніх навантажень, так і внутрішніх особливостей роботи матеріалу є завжди актуальною і проблемною. Нами для вирішення цієї проблеми був обраний основний метод будівельної механіки - метод скінченних елементів (МСЕ) з реалізацією в математичному пакеті (МП) «MathCad».

1. Постановка задачі. Аналіз публікацій. Розробити алгоритм розрахунку n-раз кінематично невизначених просторових залізобетонних рам з урахуванням деформацій поздовжнього згину, повзучості і віброповзучості на основі МСЕ та рекурентних формул, які дозволяють спростити й автоматизувати розрахунок стержневих систем на тривалі процеси - усадку, повзучість і віброповзучість бетону.

Розрахунку просторових стержневих систем в пружній постановці присвячено досить багато робіт. Тут згадаємо тільки деякі з них. Ступінь статичної невизначеності просторових рам настільки висока, що розрахунок їх звичайними методами вельми складний, а в багатьох випадках практично нездійсненний. У книзі Д.В. Вайнберга і В.Г. Чудновского [1] на основі аналізу особливостей, що випливають з геометричної конфігурації рами і відповідного перетворення навантаження, викладаються розрахунки рам на міцність, стійкість і коливання методом переміщень. Розглянуто прямокутні і косокутні, а також циклічно симетричні просторові рами. Розроблені аналогії, дозволили встановити зв'язок між задачами стійкості, динаміки і статики стержневих систем і об'єднати ці задачі одним спільним розв'язком. Дроздов П.Ф. [2] розрізняє дискретні, континуальні і дискретно- континуальні розрахункові моделі просторових несучих систем багатоповерхових будинків. Вплив поздовжнього згину (так званий розрахунок за деформованою схемою) для моделей з абсолютно жорсткими зв'язками зсуву, враховується множенням значення сумарних згинальних моментів і бімоментів на коефіцієнт поздовжнього згину φ=1/[1-(v/v_{cr})], де v - параметри поздовжніх сил. Немчинов Ю.І. [3] розробив метод скінченних елементів для розрахунку просторових конструкцій. Істотна економія при розрахунку просторових тонкостінних систем досягається шляхом введення просторових скінченних елементів і побудови матриці жорсткості, заснованої на поєднанні варіаційного методу Власова-Канторовича в матричній формі та МСЕ в класичній постановці. Дано виведення основних співвідношень МСЕ для тонкостінної просторової системи, рекомендованої для розрахунку широкого класу конструкцій. Наведено матриці жорсткості стиснуто-зігнутих балок на основі точного розв'язку. Що стосується класичного МСЕ, то він досить добре розроблений в роботах [4, 5, 6, 7] та інших.

Питання недеформаційного розрахунку систем МСЕ з урахуванням тривалих процесів були розглянуті Прокоповичем І.Є. і Яременко О.Ф. [8], Євзеровим І.Д. [9]; Кубанешвілі А.С., Менагарішвілі З. Р., Тушішвілі З.І. [10]; Яценко Є.А., Корніловою С.В., Бовіним А.А. [11] та іншими. Дослідженню стійкості стержня в умовах повзучості за допомогою МСЕ присвячені роботи Колєва П. [12], Бєлкіна В.П. і Каледіна В.О. [13] та інших.

По деформаційному розрахунку просторових стержневих залізобетонних систем МСЕ з урахуванням усадки і повзучості присвячені перші роботи [14, 15], а з урахуванням віброповзучості даних в літературі не виявлено.

2. Матриця жорсткості елемента в місцевій системі координат. Розглянемо прямолінійний стержень довільного перетину, що складається з бетону площею $A_в$, початковим модулем пружності бетону E_0 і e = 1,2, ..., s стержнів звичайної і попередньо напруженої арматури з площею перетину кожного e-го стержня A_e і модулем пружності E_e. Нехай в загальному випадку стержень сприймає всі види навантажень - згин у двох площинах, розтяг-стиск і кручення. Вузли i, j елемента розміщені на кінцях. Місцеву систему координат виберемо так, щоб вісь $\boldsymbol{x}$ збігалася з поздовжньою віссю стержня, а осі ***y*** і ***z*** збігалися з головними центральними осями його приведеного поперечного перерізу.

У кожному вузлі будемо розглядати 6 компонент переміщень: 3 лінійних (v) і 3 кутових (θ) відносно до відповідних осей, а також відповідні їм силові фактори V і M. Кінематичні і статичні характеристики стержня будемо відзначати нижнім подвійним індексом, де перший індекс буде вказувати на вузол, а другий - на вісь місцевої системи координат стержня. Позитивні кінематичні та статичні характеристики стержня з урахуванням його просторової роботи і поздовжнього стиснення (P) показані на рис. 1.

Побудуємо матрицю жорсткості II типу. Нехай на лівому (i) кінці стержня буде шарнір, а на правому (j) - защемлення. Шарнірне обпирання стержня буде таким, що допускає вигин у двох взаємно перпендикулярних площинах ***xy*** і ***xz***, але крученню щодо поздовжньої осі ***xx*** перешкоджає. При побудові матриці врахуємо той факт, що в більшості випадків поздовжні сили і крутні моменти постійні у межах скінченного елемента. Тому у вузлах i та j стержня ці сили однакові, але в різні боки спрямовані. Позитивні напрямки кінематичних та статичних характеристик стержня з урахуванням його просторової роботи і поздовжнього стиснення (P) показані на рис. 2. Всі характеристики є функціями часу (аргументи t опущені).

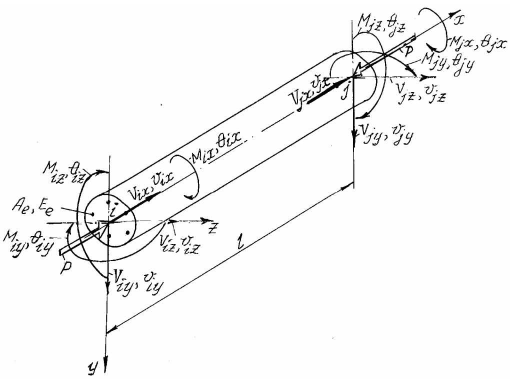


Рис. 1. Характеристики просторового стержня I типу

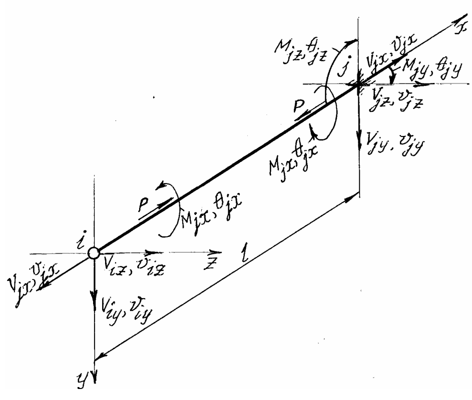


Рис. 2. Характеристики просторового стержня II типу

Припускаємо, що у вибраній місцевій системі координат вузлові сили розпадаються на чотири групи, які можна розглядати незалежно один від одного. Група "а" являє собою вузлові сили (V_{iy}, V_{jy}, M_{jz}), які визивають вигин стержня тільки в площині ***xy*** ($v_{iy}, v_{jy}, \theta_{jz}$). Група "*b*" ($V_{iz}, V_{jz}, M_{jy}$) – вигин в площині ***xz*** ($v_{iz}, v_{jz}, \theta_{jy}$), група "*c*" ($V_{jx}$) – поздовжні деформації (v_{jx}), а група "*d*" (M_{jx})- деформації кручення (θ_{jx}). Такий груповий підхід до розташування компонентів зусиль $\vec{S}$ і переміщень $\vec{V}$ дозволяє матрицю жорсткості просторового стержня (r) сформувати в блочно-діагональному вигляді.

Кожен блок на головній діагоналі матриці являє собою підматрицю окремої групи, яка характеризує плоский напружений стан. Плоскі задачі даних чотирьох груп нами вирішені [16] і їх результати наступні:

$$r_\alpha = \frac{3E_0 I_z}{l^3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta_1(v_\alpha) & -\eta_1(v_\alpha) & \varphi_1(v_\alpha)l \\ \hline -\eta_1(v_\alpha) & \eta_1(v_\alpha) & -\varphi_1(v_\alpha)l \\ \hline \varphi_1(v_\alpha)l & -\varphi_1(v_\alpha)l & \varphi_1(v_\alpha)l^2 \\ \hline \end{array} F_\alpha(t), \tag{1}$$

$$r_b = \frac{3E_0 I_y}{l^3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta_1(v_b) & -\eta_1(v_b) & \varphi_1(v_b)l \\ \hline -\eta_1(v_b) & \eta_1(v_b) & -\varphi_1(v_b)l \\ \hline \varphi_1(v_b)l & -\varphi_1(v_b)l & \varphi_1(v_b)l^2 \\ \hline \end{array} F_b(t), \tag{2}$$

$$r_c = \frac{E_0 A}{l} \cdot F_c(t), \tag{3}$$

$$r_d = \frac{G_0 I_{кр}}{l} \cdot F_d(t) \cdot \tag{4}$$

В підматрицях r_a та r_b позначено: $E_0 I_z$ і $E_0 I_y$ - згинаюча жорсткість приведеного перерізу стержня щодо осі ***z*** і ***y*** відповідно; $\varphi_1(v)$ та $\eta_1(v)$ - спеціальні тригонометричні функції, що враховують деформації поздовжнього згину при аргументах $v_a = l\sqrt{\frac{P}{E_0 I_z}}$ і $v_b = l\sqrt{\frac{P}{E_0 I_y}}$; $F_a(t) = L_a \cdot 1$ й $F_b(t) = L_b \cdot 1$ - тимчасові функції впливу повзучості-віброповзучості бетону при згині в площині ***xy*** і ***xz***. В підматрицях r_c та r_d позначено: $E_0 A$ і $G_0 I_{кр}$ - поздовжня жорсткість і жорсткість при крученні приведеного перерізу стержня відповідно; $F_c(t) = L_c \cdot 1$ і $F_d(t) = L_d \cdot 1$ - тимчасові функції впливу повзучості-віброповзучості бетону при осьовій деформації і крученні. Тут $L_a = \Gamma_a^{-1} K_a$, $L_b = \Gamma_b^{-1} K_b$, $L_c = T_c^{-1} K_c$ і $L_d = \Lambda^{-1} K_d$ - узагальнені оператори повзучості-віброповзучості відповідних підматриць, які можуть бути інтегральними, диференціальними або матричними.

Формули (1) - (4) визначають матрицю жорсткості II типу просторового залізобетонного стержня постійної жорсткості в місцевій системі координат. Матриці жорсткості стержнів I типу та III (з шарнірними кінцями) типу і детальний опис метода начальних параметрів віброповзучості бетону наведені в роботах авторів [16 і 17].

3. Матриця жорсткості всієї системи. Рівняння рівноваги вузлів розрахункової моделі стержневої системи в матричній формі МСЕ представляється у вигляді:

$$R\vec{Z} - \vec{P} = 0, \qquad (5)$$

де R - квадратна симетрична матриця жорсткості всієї системи; $\vec{P}$ - вектор-стовпець зовнішнього навантаження. Існують різні способи формування матриці R. Одним з них є спосіб формування її через матриці жорсткості окремих стержнів r_g у вигляді:

$$R = \sum_{g=1}^{\kappa} r^g \; ; \; r^g = \lambda_a^T r_a \lambda_a + \lambda_b^T r_b \lambda_b + \lambda_c^T r_c \lambda_c + \lambda_d^T r_d \lambda_d \equiv \lambda_g^T r_g \lambda_g \, . \qquad (6)$$

Для прямокутних систем без похилих стержнів матриці перетворення координат λ_g вельми нераціональні при розгляді систем з багатьма параметрами переміщень, так як в основному наповнюються нулями і тільки в деяких осередках ставлять одиниці. Тому замість цих матриць застосовують більш компактні таблиці індексів, складання яких базується на наступних міркуваннях.

Матриця λ_g вживається в поєднанні $\lambda_g^T r_g \lambda_g$, де r_g - матриця жорсткості скінченного елемента в місцевій (локальній) системі координат. В даному сполученні процедура перемноження виявляє в матриці r_g ті елементи, які відповідають номеру стовпця матриці λ_g^T і номеру рядка матриці λ_g,в яких стоять одиниці. Ці номери стовпця і рядка матриці r_g - є індекси елементів цієї матриці. Таким чином, для нас важливими є індекси елементів матриці r_g, а не самі матриці. Саме ці індекси заносяться у відповідну таблицю.

Структурно таблиця індексів складається із стовпців, номер якого збігається з параметром переміщення системи Z_κ, і рядків, що відповідають номеру скінченного елемента g при $g \equiv \kappa = 1,2, \ldots, n$. Щоб заповнити рядки таблиці, необхідно окремий елемент перенести на місце елемента g системи і простежити за тим, які параметри $\vec{V}_g$ збігаються з параметрами Z_κ і їх ставлять у відповідні клітинки рядка. Якщо збігів немає, то в таблиці індексів ставлять нулі. Крім того, таблиця індексів дає можливість перевести загальні (глобальні) переміщення $\vec{Z}$ в місцеву (локальну) систему координат у відповідності з формулою $\vec{V}_g = \lambda_g \vec{Z}$.

Таким чином, таблиця індексів дозволяє звести кількість матричних операцій до мінімуму.

4. Розв'язок вирішуючого рівняння. Алгоритм МСЕ. Вирішуючи рівняння МСЕ (5) з урахуванням тривалих процесів та просторової роботи є складним рівнянням і його чисельна реалізація ускладнена. Справа в тому, що елементи матриці жорсткості всієї системи включають як числа, так і різні оператори повзучості-віброповзучості. Тому потрібно спочатку вирішити це рівняння в універсальній операторній формі, отримати рекурентні формули і тільки по них одержати чисельний результат.

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2019. № 103

Найбільш підходящим методом, на наш погляд, для вирішення цього складного завдання є метод Халецького [18] або так званий метод квадратного кореня. Суть його полягає в наступному.

Кожну матрицю можна представити у вигляді добутку двох матриць: $R = L \cdot M$, де L та M - нижня і верхня трикутні матриці відповідно. Для симетричної матриці R матриця L дорівнює транспонованій матриці M, тобто $L = M^T$. Якщо вирішуюче рівняння МСЕ представити у вигляді $R\vec{Z} = \vec{P}$, то згідно з методом Халецького його можна замінити рівнянням $M^T M\vec{Z} = \vec{P}$ і розбити його рішення на два рівняння. Для першої системи рівнянь рекурентні формули мають вигляд:

$$y_1 = \frac{P_1}{m_{11}} , \; y_n = \frac{1}{m_{nn}}[P_n - \sum_{s=1}^{s=n-1} m_{sn} y_s], \; n = 2,3,...,n , \tag{7}$$

а для другої –

$$Z_n = \frac{y_n}{m_{nn}} , \; Z_i = \frac{1}{m_{ii}}[y_i - \sum_{s=i+1}^{s=n} m_{is} Z_s], \; i = (n-1),(n-2),...,1 . \tag{8}$$

Подальше вирішення задачі за даними рекурентним формулами вже не викликає ускладнень.

Класичний МСЕ загальновідомий, а блок-схема алгоритму деформаційного розрахунку МСЕ у пружній постановці і з урахуванням тривалих процесів наступна:

Пункти блок-схеми алгоритму МСЕ	Деформаційний пружний розрахунок	Деформаційний розрахунок з урахуванням повзучості та віброповзучості
1. Формування вихідних матриць	$\vec{Z}$, $\vec{P}$, $\vec{S}_g$, $\vec{S}^*_g$, r_g, a_g	$\vec{Z}(t)$, $\vec{P}(t)$, $\vec{S}_g(t)$, $\vec{S}^*_g(t)$, $r_g(t)$, $\overrightarrow{a_g}$
2. Матриці жорсткості g-го КЕ в глобальній системі координат	$r^g = a_g^T r_g a_g$	$r^g(t) = a_g^T r_g(t) a_g$
3. Матриці жорсткості всієї системи	$R = \sum_{g=1}^{k} r^g$	$R(t) = \sum_{g=1}^{k} r^g(t)$
4. Вектор вузлових переміщень системи	$\vec{Z} = R^{-1}\vec{P}$	$\vec{Z}(t) = R(t)^{-1}\vec{P}(t)$
5. Вектор вузлових зусиль g-го КЕ в місце-вій системі координат всього навантаження	$\vec{S}^*_g = r_g a_g \vec{Z} + \vec{S}_g$	$\vec{S}^*_g(t) = r_g(t) a_g \vec{Z}(t) + \vec{S}_g(t)$

Загальний алгоритм МСЕ таких конструкцій йде від простого до складного: 1) недеформаційний розрахунок (класичний МСЕ); 2) деформаційний пружний розрахунок (з урахуванням деформацій поздовжнього згину стержнів системи); 3) деформаційний розрахунок з урахуванням усадки і повзучості; 4) деформаційний розрахунок з урахуванням віброповзучості бетону.

5. Визначення напружень по зусиллям і перехід до формул ДБН. За обчисленими внутрішніми зусиллями можна визначити значення поточних напружень в арматурі і бетоні в будь-який момент часу *t*. Умовно будемо вважати, що при деформаційному розрахунку методом скінченних елементів найбільші зусилля будуть у вузлах скінченних елементів і відповідно найбільші напруження. У рамках МСЕ цього легко добитися відповідною розбивкою стержневої залізобетонної системи на скінченні елементи.

Визначення формул для напружень в бетоні та арматурі просторового елемента. Вважається справедливою узагальнена для залізобетонних просторових стержнів гіпотеза плоских перетинів, яка в будь-який момент часу виражається співвідношенням:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_в &= \varepsilon + \chi_z y + \chi_y z; \\ \varepsilon_e &= \varepsilon + \chi_z y_e + \chi_y z_e, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

де $\varepsilon \equiv \varepsilon(x,t)$ - поздовжня деформація осі елемента; $\chi_z \equiv \chi_z(x,t) \approx -\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$; $\chi_y \equiv \chi_y(x,t) \approx -\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$ - кривизни вигину елемента відносно осей z і y відповідно. Поздовжня осьова деформація і кривизни вигину - це параметри, які повністю визначають положення площини поперечного перерізу стержневого просторового елемента при тривалому його деформуванні. Внутрішні зусилля розподіляються між бетоном і арматурою, які запишемо у розгорнутому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int\limits_{A_в} \sigma_в dA_в + \sum_{e=1}^{s} \sigma_e A_e; \\ M_z &= \int\limits_{A_в} \sigma_в z dA_в + \sum_{e=1}^{s} \sigma_e A_e z_e; \\ M_y &= \int\limits_{A_в} \sigma_в y dA_в + \sum_{e=1}^{s} \sigma_e A_e y_e. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Детальний хід отримання всіх формул опускаємо (див. [16]) і покажемо зразу співвідношення між компонентами деформацій і зусиль просторового елемента:

$$\left.\begin{aligned} K\varepsilon &= \Lambda(T_\varepsilon \varepsilon^* + Ж_\varepsilon \chi_z^* + \Gamma_\varepsilon \chi_y^*) + V(T_\varepsilon \varepsilon_u^* + Ж_\varepsilon \chi_{uz}^* + \Gamma_\varepsilon \chi_{uy}^*); \\ K\chi_z &= \Lambda(T_z \varepsilon^* + Ж_z \chi_z^* + \Gamma_z \chi_y^*) + V(T_z \varepsilon_u^* + Ж_z \chi_{uz}^* + \Gamma_z \chi_{uy}^*); \\ K\chi_y &= \Lambda(T_y \varepsilon^* + Ж_y \chi_z^* + \Gamma_y \chi_y^*) + V(T_y \varepsilon_u^* + Ж_y \chi_{uz}^* + \Gamma_y \chi_{uy}^*), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

де деформації пружного залізобетону від зовнішнього навантаження і умовного усадочного навантаження рівні:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^* = \frac{N}{E_0 A};\ \chi_z^* = \frac{M_z}{E_0 I_z};\ \chi_y^* = \frac{M_y}{E_0 I_y}; \\ \varepsilon_u^* = \frac{N_u}{E_0 A};\ \chi_{uz}^* = \frac{M_{uz}}{E_0 I_z};\ \chi_{uy}^* = \frac{M_{uy}}{E_0 I_y}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

а узагальнені оператори повзучості-віброповзучості мають вигляд:

$$К = Б_\mu Б_{\lambda z} Б_{\lambda y} - (\lambda_{zy}\lambda_{yz}Б_\mu + e_{sy}\eta_y Б_{\lambda z} + e_{sz}\eta_z Б_{\lambda y})W^2 + (e_{sz}\eta_y\lambda_{zy} + e_{sy}\eta_z\lambda_{yz})W^3$$

;

$$T_\varepsilon = Б_{\lambda z}Б_{\lambda y} - \lambda_{zy}\lambda_{yz}W^2;\ Ж_\varepsilon = (e_{sy}\lambda_{yz}W - e_{sz}Б_{\lambda y})W;$$

$$Г_\varepsilon = (e_{sz}\lambda_{zy}W - e_{sy}Б_{\lambda z})W;\ T_z = (\eta_y\lambda_{zy}W - \eta_z Б_{\lambda y})W;$$

$$Ж_z = Б_\mu Б_{\lambda y} - e_{sy}\eta_y W^2;\ Г_\varepsilon = (e_{sy}\lambda_{yz}W - e_{sz}Б_{\lambda y})W;$$

$$T_y = (\eta_z\lambda_{yz}W - \eta_y Б_{\lambda z})W;\ Ж_y = (\eta_y e_{sz}W - \lambda_{yz}Б_\mu)W;\ Г_y = Б_\mu Б_{\lambda z} - e_{sz}\eta_z W^2. \qquad (13)$$

Для визначення нормальних напружень в бетоні та арматурі отримаємо формули:

$$КΛ\sigma_в = V(\sigma_{вp} + \sigma_{вu} - К\sigma_u);\quad К\sigma_e = \sigma_{ep} + \sigma_{eu} \qquad (14)$$

при

$$\sigma_{вp} = E_0 Λ(H_{в\varepsilon}\varepsilon^* + H_{вz}\chi_z^* + H_{вy}\chi_y^*);\ \sigma_{ep} = E_e Λ(H_{e\varepsilon}\varepsilon^* + H_{ez}\chi_z^* + H_{ey}\chi_y^*);$$

$$\sigma_{вu} = E_0 V(H_{в\varepsilon}\varepsilon_u^* + H_{вz}\chi_{uz}^* + H_{вy}\chi_{uy}^*);\ \sigma_{eu} = E_e V(H_{e\varepsilon}\varepsilon_u^* + H_{ez}\chi_{uz}^* + H_{ey}\chi_{uy}^*);$$

$$\sigma_u = E_0\varepsilon_u, \qquad (15)$$

де

$$H_{в\varepsilon} = T_\varepsilon + yT_z + zT_y;\ H_{e\varepsilon} = T_\varepsilon + y_e T_z + z_e T_y;\ H_{вz} = Ж_\varepsilon + yЖ_z + zЖ_y;$$

$$H_{ez} = Ж_\varepsilon + y_e Ж_z + z_e Ж_y;\ H_{вy} = Г_\varepsilon + yГ_z + zГ_y;\ H_{ey} = Г_\varepsilon + y_e Г_z + z_e Г_y. \qquad (16)$$

При розрахунку симетрично армованих стержневих просторових елементів вищенаведені формули для напружень різко спрощуються, оскільки при $S_{sy}=S_{sz}=0$ та $J_{s,zy}=J_{s,yz}=0$:

$$\eta_z = \eta_y = 0;\ e_{sz} = e_{sy} = \lambda_{zy} = \lambda_{yz} = 0;\ S_{вy} = S_{вz} = 0;\ M_{uy} = M_{uz} = 0.$$

Таким чином, нормальні напруження в арматурі $\sigma_e(t)$ і бетоні $\sigma_в(t)$ просторового елемента визначаються за формулами (14 - 16) при відомих згинаючих моментах $M_ф(t)$ і поздовжніх силах $N_ф(t)$.

Дані про поточні нормальні напруження в арматурі і бетоні використовуються для визначення втрат попереднього напруження в арматурі, які у відповідності з теорією власних напружень акад. Є.А. Яценко [19] визначаються за формулою:

$$\sigma_{loss2e}(t) = \sigma_e(t) - \alpha_e(t)\cdot\sigma_в(x_e,t),\quad x \equiv y,z. \qquad (17)$$

У даній формулі $\sigma_e(t)$ і $\sigma_в(x_e,t)$ - сума збільшень напружень в арматурі і бетоні, викликаних дією зусиль попереднього напруження арматури, усадки (набухання) бетону і тривалого зовнішнього навантаження; $\alpha_e(t) = E_e / E_в(x_e, t)$ - відношення модулів пружності арматури до бетону в розрахунковий момент часу *t*.

Рівнодіюча власних напружень $P(t)$ і її ексцентриситети $e_{0p,y}(t)$ та $e_{0p,z}(t)$ визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} P(t) &= \sum_{e=1}^{s}[\sigma_{con1} + \sigma_{loss2e}(t)]A_e; \\ e_{0p,y}(t) &= \frac{\sum_{e=1}^{s}[\sigma_{con1} + \sigma_{loss2e}(t)]A_e y_e}{P(t)}; \\ e_{0p,z}(t) &= \frac{\sum_{e=1}^{s}[\sigma_{con1} + \sigma_{loss2e}(t)]A_e z_e}{P(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

За формулами (18) здійснюється перехід від розрахунків поточних значень внутрішніх зусиль і напружень стержневих залізобетонних систем з урахуванням просторової роботи, деформацій поздовжнього згину і тривалих процесів до розрахункових формул державних будівельних норм [20].

6. Пропозиції по формулам для автоматизації розрахунків. Аналогічний результат розрахунку стержневої системи можна отримати, використовуючи формули для автоматизації і спрощення цих складних розрахунків, які ми назвали рекурентними формулами. Ці формули отримані на основі принципу Вольтерра і такої робочої гіпотези - у вирішення тривалого переміщення (зусилля) функція часу повинна входити як множник при вираженні пружного переміщення (зусилля). Тривалі переміщення:

$$z_i(t) = z_i^* F_i(t),\ i = 1, 2, \ldots n – \text{невідомих}, \tag{19}$$

де z_i^* - пружне *i*-е переміщення, а $F_i(t)$ - функція часу для *i*-го переміщення. Ця функція враховує повзучість-віброповзучість системи і визначається за такою рекурентною формулою:

$$F_i(t) = \frac{D^*}{D_i^*}\left[D(t)\right]^{-1}\left[D_i(t)\right], \tag{20}$$

де D^* -пружний визначник системи, $\left[D(t)\right]^{-1}$ - зворотна матриця визначника системи в часі, D_i^* - пружний визначник для *i*–го переміщення, $\left[D_i(t)\right]$ - матричний визначник для і-го переміщенняв часі.

Тривалі зусилля:

$$S_j(t) = S_j^* T_j(t), \tag{21}$$

де $T_j(t)$ - функція часу для *j*-го рядка вектору вузлових зусиль *g*-го СЕ. Вона враховує повзучість-віброповзучість системи та визначається затакою рекурентною формулою:

$$T_j(t) = (1-\frac{S_j^n}{S_j^*})(L_g 1) + \frac{\Delta S_j^{\Delta z}(t)}{S_j^*} + \frac{S_j^n(t)}{S_j^*}, \tag{22}$$

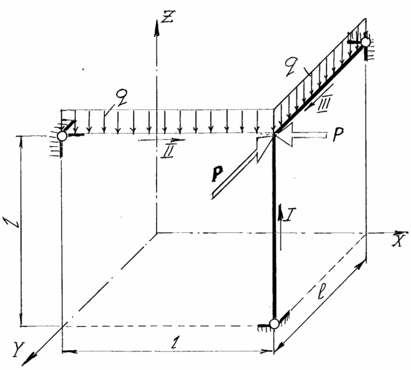
де S_j^* - зусилля пружного деформаційного розрахунку, S_j^n - зусилля пружне від невузлового навантаження, $S_j^n(t)$ - тимчасове зусилля від невузлового навантаження, та прирощення зусилля від повзучості-віброповзучості, яке знаходиться з розв'язку матричного рівняння:

$$\Delta\vec{S}_g^{\Delta z}(t) = r_g^* a_g L_g \Delta\vec{z}(t), \tag{23}$$

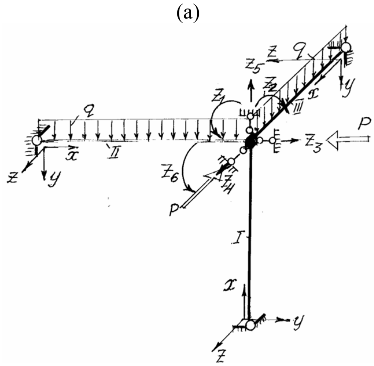
де позначено

$$\Delta\vec{z}(t) = \overrightarrow{z_i^*(F_i(t)-1)}.$$

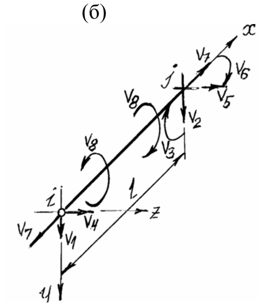
При розрахунку виходимо з того, що всі пружні розв’язки МСЕ вже отримані і нам відомі всі вектори переміщень та зусиль недеформаційного і деформаційного пружних розрахунків. Подальший розрахунок з урахуванням тривалих процесів можна виконати більш просто, використовуючи рекурентні формули (20 – 23). На ці формули нами отримано авторське свідоцтво № 52720 від 20.12.2013р.



(а)



(б)



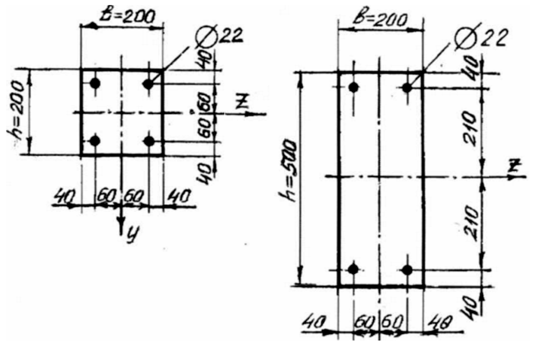
(в)

Рис. 3. До прикладу: (а) - розрахункова схема; (б) - основна система методу переміщень; (в) - скінченний елемент

7. Приклад розрахунку. Розглянемо просторову залізобетонну раму з симетрично армованими елементами при дії на неї постійних у часі просторових сил: q = 10 кН/м - рівномірно розподіленого навантаження і P = 500 кН - вузлових стискаючих сил, та без утворення тріщин. Розрахункова схема і основна система методу переміщень рами представлена на рис. 3.

Нехай поперечні перерізи I скінченного елемента і II, III елемента будуть виконані згідно рис. 4,(а) і рис. 4,(б) відповідно.

Поперечні перерізи виконані з бетону класу С55/60 (В60) з початковим модулем E_0=36 ГПа, G_0=15 Гпа і арматури, що складається з симетрично розташованих 4-х стержнів ∅22 мм, класу А240 (А-III) з модулем E_e=200 ГПа, G_e=80 Гпа і загальною площею $A_e=0{,}152\cdot10^{-2}$м^2.



(а) (б)

Рис. 4. Поперечні перерізи I (а) і II, III (б) скінченних елементів

Розрахунок будемо виконувати згідно схеми алгоритму МСЕ деформаційного розрахунку залізобетонних стержневих систем з урахуванням тривалих процесів (дивись п. 4) в МП «MathCad».

Розрахункова схема МСЕ представлена на рисунку 5.

Детальний розрахунок даної просторової рами по вищенаведеному алгоритму представлений у роботі авторів [16], а тут покажемо зразу результати розрахунків у вигляді епюр внутрішніх зусиль рами (рис. 6).

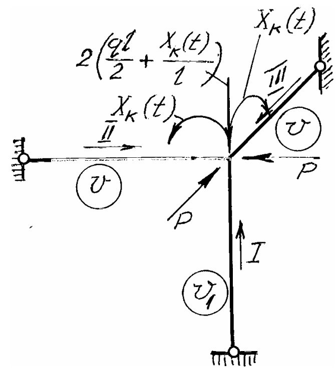


Рис. 5. Розрахункова схема МСЕ

Програма, алгоритм та результати розрахунку рами з шістьма невідомими по рекурентним формулам (20 – 23) також були реалізовані в МП «MathCad». По цим формулам був виконаний розрахунок рами і результати повністю збіглися з результатами отриманими по МСЕ, а тому ми рекомендуємо використовувати ці рекурентні формули для спрощення та автоматизованого розрахунку просторових стержневих систем з урахуванням тривалих процесів - усадки, повзучості і віброповзучості бетону.

Аналіз розрахунку залізобетонної просторової рами показав, що врахування деформацій поздовжнього згину стержнів і повзучості-віброповзучості бетону значно видозмінюють напружено-деформований стан просторових систем. Так, наприклад, деякі переміщення рами зростають у часі на 135-348%, а зміна зусилля коливається від +88% до -231% в порівнянні з пружними значеннями не деформаційного розрахунку. На зростання переміщень основний вплив має повзучість та віброповзучість, частка яких складає відповідно: 135% - 184% та 228% - 338%, а на зростання зусиль – деформації поздовжнього згину, частка яких склала від +10% до -228%.

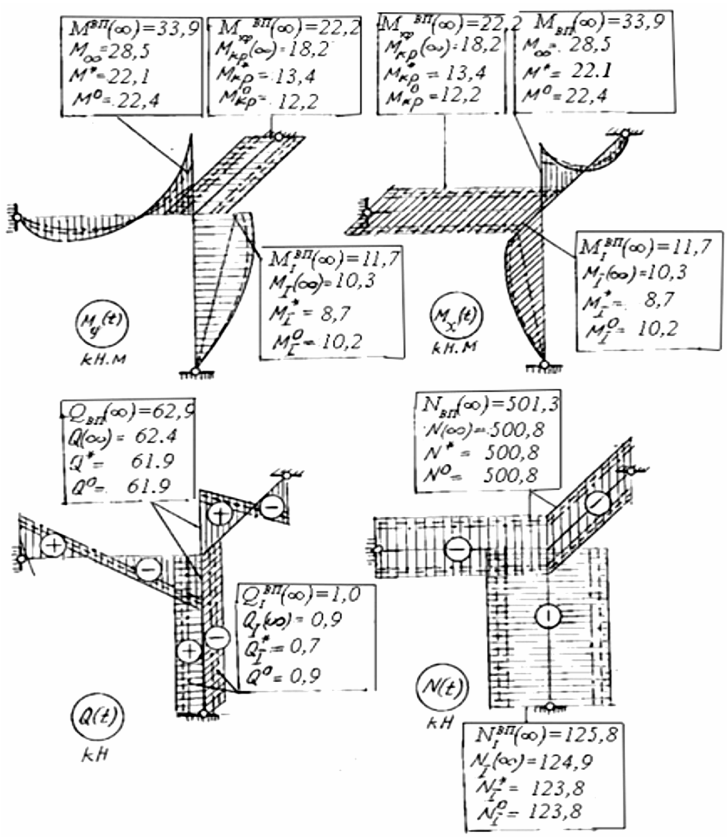


Рис. 6. Епюри внутрішніх зусиль просторової рами

Висновки

1. Виконані дослідження дозволили отримати матрицю жорсткості трьох типів залізобетонного просторового скінченного елемента в місцевій системі координат з урахуванням деформацій поздовжнього згину і тривалих процесів - усадки, повзучості і віброповзучості бетону.

2. Отримано матрицю жорсткості всієї залізобетонної стержневої системи за допомогою таблиці індексів і розв'язок вирішуючого рівняння МСЕ на базі методу Халецького.

3. Все це дозволило вперше розробити алгоритм розрахунку залізобетонних стержневих систем з урахуванням просторової роботи, деформацій поздовжнього згину, усадки, повзучості і віброповзучості бетону методом скінченних елементів.

4. Були розроблені і використані рекурентні формули для розрахунку n-раз кінематично невизначених просторових залізобетонних рам на тривалі процеси, які значно спрощують і автоматизують ці складні розрахунки. На їх основі можуть бути розроблені підпрограми для великих розрахункових

комплексів (по аналогії, як це було зроблено в математичному пакеті «MathCad») для розрахунку просторових рам.

5. Виконаний приклад розрахунку залізобетонної просторової рами показав, що врахування деформацій поздовжнього згину стержнів і повзучості-віброповзучості бетону значно видозмінюють напружено-деформований стан просторових систем. Деякі переміщення рами зростають у часі на 135-348%, а зміна зусилля коливається від +88% до -231% в порівнянні з пружними значеннями не деформаційного розрахунку. На зростання переміщень основний вплив має повзучість та віброповзучість, частка яких складає відповідно: 135% -184% та 228% -338%, а на зростання зусиль – деформації поздовжнього згину, частка яких склала від +10% до -228%.

6. Зазначені особливості та відсотки зміни у часі переміщень і зусиль, переконливо доводять необхідність виконання розрахунків залізобетонних стержневих систем з урахуванням просторової роботи, деформацій поздовжнього згину і повзучості-віброповзучості.

7. Деформаційні розрахунки стержневих залізобетонних систем слід виконувати не тільки для встановлення зміни картини внутрішніх зусиль та переміщень у часі, а й необхідно в найнебезпечніших місцях системи визначати напруження в арматурі і бетоні та прогини, щоб не допустити перевищення розрахункових опорів матеріалів та нормативних переміщень за весь період експлуатації споруди.

8. В цілому побудовано теорію деформаційного розрахунку стержневих залізобетонних систем з урахуванням тривалих процесів, яка рекомендується для впровадження в практику проектування просторових стержневих залізобетонних конструкцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вайнберг Д.В., Чудновский В.Г.* Расчет пространственных рам. - К.: Госстройиздат УССР, 1964. - 308 с.
2. *Дроздов П.Ф.* Конструирование и расчет несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. - 223 с.
3. *Немчинов Ю.И.* Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). - К.: Будівельник, 1980. - 232 с.
4. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Мельниченко Г.И.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики. - К.: КГТУСА, 1994.- 368 с.
5. *Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С.* Метод конечных элементов. – К.: Вища школа, 1981. - 176 с.
6. *Масленников А.М.* Расчет строительных конструкций методом конечных элементов. - Л.: ЛИСИ, 1977. - 80 с.
7. *Исаханов Г.В., Гранат С.Я., Мельниченко Г.И.* Строительная механика: Расчет стержневых систем на ЭВМ. – К.: Вища школа, 1990. – 229 с.
8. *Прокопович И.Е., Яременко А.Ф.* Применение метода конечных элементов к решению задач линейной теории ползучести // Строит. мех. и расчет сооружений, № 6, 1982. - С. 29-33.
9. *Евзеров И.Д.* Метод конечных элементов при расчете на длительное действие нагрузки // Сопротивление материалов и теория сооружений, вып. 56. - К.: Будівельник, 1990. -С. 98-103.
10. *Кубанешивили А.С., Менагаришвили З.Р., Тушишвили З.И.* Применение МКЭ к расчету ЖБК с учетом ползучести бетона // Бетон и жб. в энерг. стр-ве. Матер. Всесоюз. конф. по бет. и жб. Казань, окт.,1988. - Тбилиси, 1988. - С.94-98.
11. *Яценко Е.А., Корнилова С.В., Бовин А.А.* Теория ползучести железобетонных конструкций. – Днепр-ск: Guadeamus, 2000. – 600 с.
12. *Колев П.* Исследование устойчивости стержня в условиях ползучести с помощью МКЭ в обобщенном виде // Строительство, вып. 35, №1, 1988. - С. 16-18.

13. *Белкин В.П., Каледин В.О.* О применении конечно элементных моделей к задаче устойчивости при ползучести /Сиб. металлург. ин-т. - Новокузнецк, 1988. - 5 с. Деп. в ВИНИТИ 16.11.88, № 8144-В88.
14. *Яценко Е.А., Слободянюк С.А.* Теория длительной прочности и устойчивости стержневых железобетонных систем с учетом ползучести бетона. Монография – Днепропетровск: ПДАБА; Пороги, 2002. – 252 с.
15. *Слободянюк С.А.* Деформационный расчет и устойчивость стержневых железобетонных систем с учетом длительных процессов // Дисс. … доктора техн. наук: 05.23.01. – Днепропетровск: ПГАСА, 2002. – 280 с.
16. *Слободянюк С.А., Буратинский А.П., Щербачов А.Д.* Теорія тривалої міцності та стійкості стержневих залізобетонних систем з урахуванням повзучості та віброповзучості бетону. Звіти НДР по державній темі № 32 (номер державної реєстрації 0110U002434, науковий керівник, д.т.н., проф. С.О.Слободянюк). – Дніпропетровськ: ДВНЗ «ПДАБА», том 1, 2010. – 153 с.; том 2, 2011. – 140 с.; том 3, 2012. – 154 с.
17. *Слободянюк С.А., Буратинский А.П.* Метод начальных параметров виброползучести бетона // “Бетон и железобетон в Украине”. – 2010. - № 5. – С. 6 – 7.
18. *Большаков В.И., Яценко Е.А., Соссу Г.* Основы метода конечных элементов. – Днепропетровск: Gaudeamus, 2000. - 255 с.
19. *Яценко Е.А.* Методы расчета железобетонных конструкций на длительное воздействие с учетом ползучести бетона: Дис. ... докт. техн. наук: 05.23.01.- М.,1989. – 364 с.
20. *ДБН В.2.6-98:2009.* Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с.

REFERENCES

1. *Weinberg, D.V., Chudnovsky, V.G.* Calculation of space frames (Raschet prostranstvennykh ram). - K .: Gosstroyizdat USSR, 1964. – 308 p.
2. *Drozdov P.F.* Design and calculation of load-bearing systems of multistoried buildings and their elements (Konstruirovaniye i raschet nesushchikh sistem mnogoetazhnykh zdaniy i ikh elementov). - M .: Stroiizdat, 1977. - 223 p.
3. *Nemchinov Yu.I.* Calculation of space structures (finite element method) (Raschet prostranstvennykh konstruktsiy (metod konechnykh elementov)). - K.: Budivelnyk, 1980. - 232 p.
4. *Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Melnichenko G.I.* The finite element method in problems of structural mechanics (Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki). - K.: KGTUSA, 1994.- 368 p.
5. *Varvak P.M., Buzun I.M., Gorodetsky A.S.* The finite element method (Metod konechnykh elementov). - K .: Vishcha school, 1981. - 176 p.
6. *Maslennikov A.M.* Calculation of engineering structures by the finite element method (Raschet stroitel'nykh konstruktsiy metodom konechnykh elementov). - L .: LISI, 1977. - 80 p.
7. *Isakhanov G.V., Granat S.Ya., Melnichenko G.I.* Structural mechanic: Calculation of core systems on a computer (Stroitel'naya mekhanika: Raschet sterzhnevykh sistem na EVM). - K .: Vishcha school, 1990. - 229 p.
8. *Prokopovich I.E., Yaremenko A.F.* Application of the finite element method to solving problems of the linear theory of creep (Primeneniye metoda konechnykh elementov k resheniyu zadach lineynoy teorii polzuchesti) // Stroit. mekh. i raschet sooruzheniy, № 6, 1982. - pp. 29-33.
9. *Yevzerov I.D.* Finite element method for long-term load effects (Metod konechnykh elementov pri raschete na dlitel'noye deystviye nagruzki) // Resistance of materials and theory of structures, vol. 56. - K .: Budivelnik, 1990. -P. 98-103.
10. *Kubaneshivili A.S., Menagarishvili Z.R., Tushishvili Z.I.* Application of FEM to the calculation of reinforced concrete structures taking into account creep of concrete (Primeneniye MKE k raschetu ZHBK s uchetom polzuchesti betona) // Beton i zhb. v energ. str-ve. Mater. Vsesoyuz. konf. po bet. i zhb. Kazan', okt.,1988. - Tbilisi, 1988. - pp. 94-98.
11. *Yatsenko E.A., Kornilov S.V., Bovin A.A.* Theory of creep of reinforced concrete structures (Teoriya polzuchesti zhelezobetonnykh konstruktsiy). - Dnepropetrovsk: Guadeamus, 2000. - 600 p.
12. *Kolev P.* Research stability of a rod in creep conditions using FEM in a generalized form (Issledovaniye ustoychivosti sterzhnya v usloviyakh polzuchesti s pomoshch'yu MKE v obobshchennom vide) // Construction, vol. 35, No. 1, 1988. - p. 16-18.
13. *Belkin V.P., Kaledin V.O.* Application of finite elemental models to the problem of creep stability (O primenenii konechno elementnykh modeley k zadache ustoychivosti pri polzuchesti) // Sib. metallurg. inst. - Novokuznetsk, 1988. - 5 s. Dep. v VINITI 16.11.88, № 8144-V88.

14. *Yatsenko E.A., Slobodianyuk S.A.* The theory of long-term strength and stability of rod-reinforced concrete systems with allowance for creep of concrete. Monograph. (Teoriya dlitel'noy prochnosti i ustoychivosti sterzhnevykh zhelezobetonnykh sistem s uchetom polzuchesti betona) - Dnepropetrovsk: PDABA; Porogi, 2002. – 252 p.
15. *Slobodianyuk S.A.* Deformation calculation and stability of core concrete systems with allowance for long-term processes (Deformatsionnyy raschet i ustoychivost' sterzhnevykh zhelezobetonnykh sistem s uchetom dlitel'nykh protsessov) // Diss. ... doctor tech. sciences: 05.23.01. - Dnepropetrovsk: PGASA, 2002. - 280 p.
16. *Slobodyanyuk S.A., Buratinskiy A.P., Shcherbachov A.D.* The theory of long durability and stability of core reinforced concrete systems with allowance for the creep and vibrocreep of concrete. Reports of research work on the state theme № 32 (state registration number 0110U002434, scientific supervisor, doctor of technical sciences, professor S.A. Slobodianyuk) (Teoriya tryvaloyi mitsnosti ta stiykosti sterzhnevykh zalizobetonnykh system z urakhuvannyam povzuchosti ta vibropovzuchosti betonu. Zvity NDR po derzhavniy temi № 32)
17. *Slobodyanyuk S.A., Buratinskiy A.P.* The method of initial parameters of vibrocreep concrete (Metod nachal'nykh parametrov vibropolzuchesti beton) // Beton i zhelezobeton v Ukraine. - 2010. - № 5. - p. 6 - 7.
18. *Bolshakov V.I., Yatsenko E.A.,* Sossa G. Fundamentals of the finite element method (Osnovy metoda konechnykh elementov). - Dnepropetrovsk: Gaudeamus, 2000. - 255 p.
19. *Yatsenko E.A.* Methods for calculating reinforced concrete structures for a long-term effect, taking into account concrete creep (Metody rascheta zhelezobetonnykh konstruktsiy na dlitel'noye vozdeystviye s uchetom polzuchesti betona): Diss. ... doctor tech. sciences: 05.23.01.- M., 1989. - 364 p.
20. DBN V.2.6-98: 2009. Concrete and reinforced concrete constructions. General considerations (Betonni ta zalizobetonni konstruktsiyi. Osnovni polozhennya). - K.: Minregionstroy of Ukraine, 2011. - 71 p.

Стаття надійшла 30.07.2019 р.

Slobodianiuk S.O., Buratynskyi A.P.

DEFORMATION CALCULATION OF SPACE REINFORCED CONCRETE FRAME BY FEM WITH ALLOWANCE FOR VIBROCREEP OF CONCRETE

The efficiency of the reinforced frameworks depends to a large extent on a properly framing scheme. If the framing scheme is made of reinforced concrete, the frame displays at various long static and dynamic loads such a characteristic phenomenon as the creep and vibrocreep of concrete. In addition, the space frame must take into account the buckling strain. An algorithm for the calculation of n-times kinematicly indeterminate space reinforced concrete frames has been developed, taking into account buckling strain, creep and vibrocreep based on finite element analysis and recursion formulas, which makes it possible to simplify the calculation of bar systems for long processes. Recursion formulas can be used to develop programs for calculating space frames. The article presents the research and obtained a stiffness matrix of three types of reinforced concrete space finite element, taking into account buckling strain and long processes. An algorithm for calculating reinforced concrete bar systems was developed taking into account the space work, buckling strain, vibocreep of concrete by finite element method. An executed example of the calculation of a reinforced concrete space framed structure showed that taking into account the buckling strain of the rods and the vibrocreep of concrete significantly alter the stress-strain state of space systems. Some frame motions increase by 135-348% over time, and the force variation varies from + 88% to -231% in comparison with elastic non-deformation values. The increase in displacements is mainly influenced by creep and vibration creep, which account for 135% –184% and 228% - 338%, respectively, and for the growth of efforts – buckling strain, the share of which ranged from + 10% to -228%. Deformation calculations of framed reinforced concrete systems should be performed not only to establish a change in the pattern of internal forces and time motions, but in the most dangerous places of the system to determine the stresses in reinforced and concrete and deflections to prevent the excess of calculated resistances of materials and normative motions.

Keywords: space frame, stiffness matrix, finite element method, algorithm, shrinkage, creep, concrete vibrocreep.

Слободянюк С.А., Буратинский А.П.

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМ МКЭ С УЧЕТОМ ВИБРОПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

Рассматривается задача расчета пространственной железобетонной рамы методом конечных элементов (МКЭ) с учетом деформированной схемы и длительных процессов – усадки, ползучести и виброползучести бетона. Расчет с учетом деформированной схемы или деформаций продольного изгиба называют еще деформационным расчетом. Получено матрицы жесткости трех типов конечных элементов в местной системе координат, матрицу жесткости всей системы, решение разрешающего уравнения и алгоритм МКЭ. Рассмотрено предложение по формулам автоматизированного расчета, а также пример расчета пространственной рамы.

Ключевые слова: пространственная рама, матрица жесткости, метод конечных элементов, алгоритм, усадка, ползучесть, виброползучесть бетона.

УДК 624.046.012.45: 539.376
Слободянюк С.О., Буратинський А.П. **Деформаційний розрахунок просторових залізобетонних рам МСЕ з урахуванням віброповзучості бетону** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. - С. 219-234.

Розглядається задача розрахунку просторової залізобетонної рами методом скінченних елементів (МСЕ) з урахуванням деформованої схеми та тривалих процесів – усадки, повзучості і віброповзучості бетону.
Іл. 6. Бібліогр. 20 назв.

UDC 624.046.012.45: 539.376
Slobodianiuk S.O., Buratynskyi A.P. **Deformation calculation of space reinforced concrete frame by FEM with allowance for vibrocreep of concrete** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv:KNUBA, 2019. – Issue 103. - P. 219-234.

The article discusses calculation of space reinforced concrete frame by the finite element method with allowance for deformed model and long processes, such as shrinkage, creep and vibrocreep concrete.
Fig. 6. Ref. 20.

УДК 624.046.012.45: 539.376
Слободянюк С.А., Буратинский А.П. **Деформационный расчет пространственных железобетонных рам МКЭ с учетом виброползучести бетона** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. - Вып. 103. – С. 219-234.

Рассматривается задача расчета пространственной железобетонной рамы методом конечных элементов (МКЭ) с учетом деформированной схемы и длительных процессов – усадки, ползучести и виброползучести бетона.
Ил. 6. Библиогр. 20 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Слободянюк Сергій Олександрович*
Адреса: *49600. м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури"*
Мобільний тел.: *+380662137823*
Імейл: *slobodianiuk.sergey@gmail.com*
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-4874-7296

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, доцент Буратинський Андрій Петрович*
Адреса робоча: *49000. м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури"*
Мобільний тел.: *+380672521309*
Імейл: *buratynskyi.andrii@pgasa.dp.ua*
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5152-3766