УДК 539.3

ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ ВІДГУКУ ОДНОПОЛОГО ГІПЕРБОЛОЇДА НА ПЕРІОДИЧНЕ ПОВЗДОВЖНЄ НАВАНТАЖЕННЯ

О.М. Палій,
старший викладач

О.О. Лук'янченко,
канд. техн. наук, доцент

Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; (044) 2415420 e-mail:paliy.oxana@gmail.com

Виконано частотний аналіз усталених вимушених коливань тонкої оболонки від'ємної Гаусової кривизни виду однополого гіперболоїда при дії періодичного поздовжнього навантаження. За допомогою програмного комплексу скінченноелементного аналізу побудована розрахункова модель оболонки у вигляді сукупності плоских прямокутних оболонкових елементів зі шістьома степенями вільності у вузлах. Виконано модальний аналіз оболонки в лінійній постановці методом Ланцоша. Визначено власні частоти і форми коливань в нелінійній постановці для оболонки, на верхню кромку якої попередньо прикладена статична осьова докритична сила. Для цього послідовно розв'язані нелінійна задача статики модифікованим методом Ньютона-Рафсона та задача на власні значення методом Ланцоша. Методами прямого та модального частотного аналізу отримано усталений відгук оболонки на періодичне повздовжнє навантаження. Відгуки оболонки подано у вигляді залежностей максимальних переміщень вузлів моделі від частоти збурення.

Ключові слова: усталені вимушені коливання, частотний аналіз, метод скінченних елементів, тонка оболонка, однополий гіперболоїд, повздовжнє навантаження.

Вступ. Гіперболоїд відноситься до пологих оболонок від'ємної Гаусової кривизни та використовується як елемент багатьох будівельних конструкцій. Кількість робіт, яка присвячена дослідженню статичної і динамічної поведінки однополого гіперболоїда з тонкою стінкою, порівняно мало. Аналіз вимушених коливань пологих оболонок від'ємної гаусової кривизни залишається важливим серед динамічних завдань теорії пластин і оболонок [1-9]. Особливістю усталених вимушених коливань є те, що вони не затухають з часом. Їх властивості залежать не тільки від динамічних характеристик оболонок, але і від амплітуди і частоти зовнішнього навантаження. Такі коливання можуть бути ініційовані силовим періодичним за часом навантаженням. Дослідження відгуків оболонок на зовнішнє навантаження може бути проведено як в часовому так і частотному просторі. Якісна оцінка відгуку на періодичні навантаження вимагає знання про динамічні характеристики оболонок, тобто їх власні частоти і форми коливань. При дослідженні усталених вимушених коливань урахування попереднього статичного навантаження на оболонки дозволяє оцінити його вплив на їх амплітудно-частотні характеристики.

В статті за допомогою методу скінченних елементів, що реалізовані в програмному комплексі NASTRAN [10] побудована розрахункова модель тонкої оболонки від'ємної гаусової кривизни виду однополого гіперболоїда. Виконано модальний аналіз тонкої оболонки в лінійній постановці (Normal Modes) методом Ланцоша. У нелінійній постановці визначені власні частоти і

© Палій О.М., Лук'янченко О.О.

форми коливань оболонки при статичній дії повздовжнього навантаження (Nonlinear Static, Modes_Param). Досліджено усталені вимушені коливання оболонки при дії періодичного за часом рівномірно розподіленого повздовжнього навантаження за допомогою прямого (Direct Frequency) і модального частотного методів (Modal Frequency), які реалізовані в програмному комплексі. Отримані амплітудно-частотні характеристики усталених відгуків тонкої оболонки без і з урахуванням попередньої дії статичного докритичного повздовжнього навантаження.

Побудова скінченноелементої моделі тонкої оболонки. В роботі розглядається сталева оболонка виду однополого гіперболоїда з товщиною стінки h=0,002 м, окружними радіусами R=0,20 м та r=0,15 м, висотою H=0,48 м. Фізичні параметри оболонки: коефіцієнт Пуасона μ=0,3, модуль пружності $E=2{,}06\cdot10^{11}$ Н/м^2. Граничні умови: на одному кінці оболонка жорстко закріплена, а на іншому кінці задано ковзне кріплення вздовж твірної. Скінченноелементна модель оболонки побудована у вигляді сукупності плоских прямокутних оболонкових елементів зі шістьома степенями вільності у вузлах. Модель містить 6480 вузлів та 6400 елементів (рис. 1)

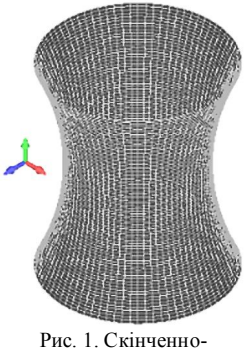


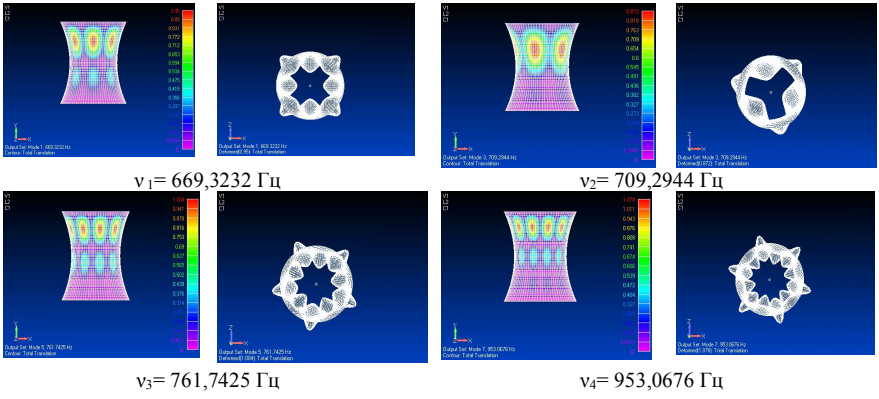
Рис. 1. Скінченно-елементна модель однополого гіперболоїда

Математична модель вимушених коливань оболонки. Динамічна крайова задача формулюється згідно варіаційного принципу Лагранжа у вигляді системи диференціальних рівнянь, скінченноелементна апроксимація якої в матричній формі має вигляд

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{\mathbf{u}}}(t)+\mathbf{C}\dot{\vec{\mathbf{u}}}+\mathbf{K}\vec{\mathbf{u}}(t)=\vec{\mathbf{P}}(t), \qquad (1)$$

де **M** – матриця мас, **C** – матриця демпфірування, **К** – матриця жорсткості, $\mathbf{P}(t)=P_0\sin\omega t$ – вектор зовнішнього періодичного повздовжнє навантаження, P_0 та ω – амплітуда та кругова частота зовнішнього збурення, $\mathbf{u}(t)$ – невідомий вектор переміщення вузлів скінченнелементної моделі, який залежить від часу. В статті матриця мас нормована по власних формах коливань і має вид одиничної діагональної матриці. Матриця жорсткості є також діагональною зі членами, що дорівнюють квадратам власних частот коливань. У випадку врахування дії статичного навантаження до лінійної матриці жорсткості **К** додається геометрична $\mathbf{K}_G$. В дослідженнях вимушених коливань оболонки враховано внутрішнє демпфірування Релея, яке дозволяє представити матрицю демпфірування у вигляді діагональної.

Модальний аналіз оболонки в лінійній постановці. Модальний аналіз оболонки виконано за допомогою обчислювальної процедури розв'язання задачі на власні значення (Normal Modes) методом Ланцоша. Перші чотири власні форми коливань оболонки в меридіальному та радіальному напрямках і відповідні власні частоти коливань подано на рис. 2.



ν_1= 669,3232 Гц ν_2= 709,2944 Гц

ν_3= 761,7425 Гц ν_4= 953,0676 Гц

Рис. 2. Перші чотири власні форми та частоти коливань оболонки (Normal Modes)

Бачимо, що кількість півхвиль в меридіальному і радіальному напрямках змінюється. Спостерігаються як симетричні так і кососиметричні власні форми коливань оболонки.

Модальний аналіз оболонки з урахуванням попередньої дії осьового докритичного навантаження. Оцінено вплив на власну частоту коливань статичного осьового навантаження $\vec{\mathbf{Q}}$, яке прикладалося до вулів верхньої кромки оболонки. Напочатку виконано нелінійний статичний аналіз методом Ньютона-Рафсона (Nonlinear Static), а потім за допомогою метода Ланцоша визначені власні значення частот і форм коливань оболонки (Modes Param). Діапазон значень статичного навантаження лежить в докритичній зоні. Отримані результати представлені на рис. 3 та в табл. 1.

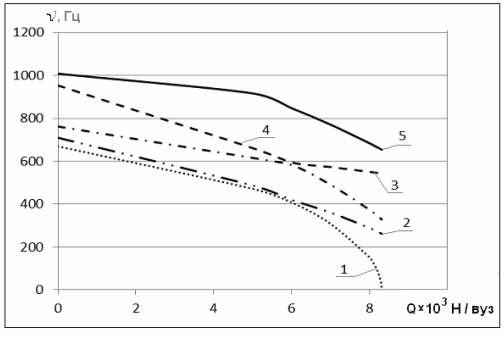


Рис. 3. Вплив статичного осьового навантаження на власну частоту коливань: 1−першу, 2-другу, 3-третю, 4-четверту, 5-п’яту

Таблиця 1

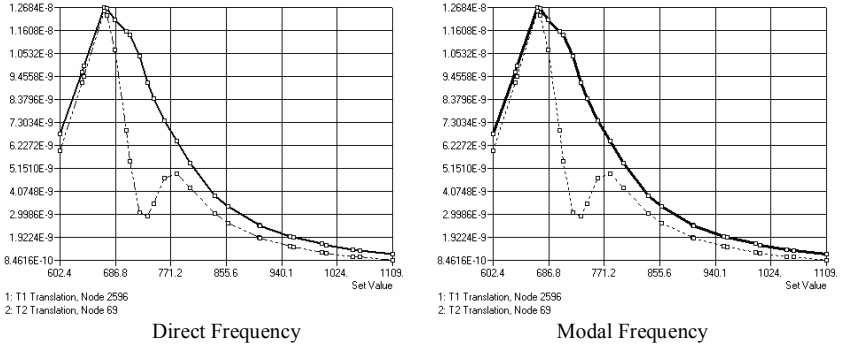
Залежність власної частоти від статичного осьового навантаження

Номер частоти	Статичне осьове навантаження, $Q\cdot10^3$ Н/вузол								
	0	5	7	8	8.1	8.2	8.3	8.31	**8.315**
1	669.32	471.15	308.04	151.32	125.13	91.72	34.06	20.84	8.45
2	709.29	486.60	360.34	288.74	280.55	272.11	263.40	262.51	262.06
3	761.74	615.23	490.06	373.90	360.12	345.77	330.78	329.24	328.47
4	953.06	660.98	572.75	550.15	547.84	545.51	543.17	542.94	542.82
5	1008.08	916.35	770.55	683.77	674.38	664.84	655.15	654.17	653.68

При збільшенні навантаження власні частоти коливань оболонки зменшуються. Перша власна частота стає нульовою, що відповідає втраті стійкості оболонки по першій формі коливань, при уточненому значенні осьового навантаження Q_{cr1}=8.315985·10^3 Н/вузол.

Частотний аналіз відгуку оболонки. Розглянуто один з видів динамічного аналізу, який служить ефективним методом знаходження усталеного відгуку (переміщень, напружень та інш.) в залежності від частоти періодичного збурення (1). Застосовано два методи розв'язання задачі: прямого частотного аналізу усталеного відгуку на періодичне збурення (Direct Frequency), в якому навантаження є синусоїдальною хвилею з відомими амплітудою, фазою і частотою; модального частотного аналізу (Modal Frequency), який аналогічний попередньому, але з використанням утриманних в розрахунках форм і частот коливань оболонки.

В статті розглянуто діапазони власних частот коливань оболонки, які наведені в табл. 1 (при Q=0, Q=8100 Н/вуз), амплітуді періодичного збурення P_o= 1000 Н/вуз та нульовому значенні початкової фази коливань. На рис. 4 наведені криві залежностей максимальних радіальних переміщень (мм) вузла 2596 − вздовж осі x та вузла 69 − вздовх осі y від частоти (Гц) періодичного навантаження, які отримано методом прямого (а) і модального (б) частотного аналізу при Q=0.



(а) (б)

Рис. 4. Залежність максимальних радіальних переміщень (вісь ординат) вузлів моделі оболонки від частоти періодичного навантаження (вісь абсцис) при Q=0.

Бачимо, що при наближенні частоти збурення до першої власної частоти коливань оболонки відбувається збільшення переміщень у двух вузлах моделі, при наближенні до третьої – збільшується лише переміщення вузла 69. Отримано аналогічні результати дослідження при використанні двох різних методів роз'язання задачі.

На рис. 5 представлені криві залежностей максимальних радіальних переміщень (мм) вузла 1526 − вздовж осі x та вузла 67 − вздовх осі y від частоти (Гц) періодичного навантаження, які отримано методами прямого (а) та модального (б) частотного аналізу при урахуванні попередньої дії статичного осьового докритичного навантаження Q=8100 Н/вуз. При наближенні частоти зовнішнього періодичного збурення до першої власної частоти коливань оболонки відбувається різке зростання переміщення у

двух вузлах моделі. При наближенні до другої відбувається наступний етап зростання та в незначній мірі до четвертої та п'ятої власних частот коливань. При виконанні прямого (а) та модального (б) частотного аналізу результати дослідження аналогічні.

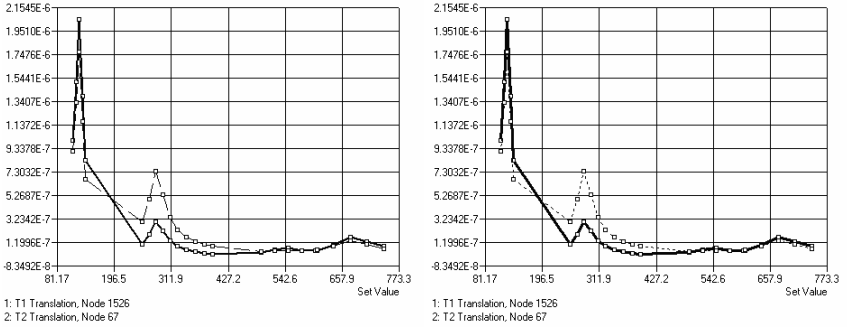


Рис. 5. Залежність максимальних амплітуд радіальних переміщень (вісь ординат) вузлів моделі оболонки від частоти періодичного навантаження (вісь абсцис) при Q=8100 Н/вуз

Частотний анал із усталених відгуків однополого гіперболоїда показав, що його чутливість на періодичне повздовжнє навантаження при урахуванні попередньої дії статичного осьового навантаження (рис. 5) є значно більшою, ніж без урахування (рис. 4).

Висновок. Прямий та модальний частотні аналізи усталених відгуків однополого гіперболоїда на періодичне повздовжнє навантаження показали, що попереднє статичне докритичне навантаження зменшує власні частоти коливань оболонки і значно впливає на її динамічну поведінку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем.- М.: Физматгиз, 1967.-784 с.
2. *Абовский Н.П., Самольянов И. И.* К расчету пологой оболочки типа гиперболического параболоида// Строит, механика и расчет сооружений. -1969, №6, с. 7-12.
3. *Рассказов А.О.* Расчет оболочек типа гиперболических параболоидов. – Киев, 1972. 175 с.
4. *Баженов В.А., Гуляев В.И., Гоцуляк Е.О.* Устойчивость нелинейных механических систем. Львов, Вища школа, 1982. – 255 с.
5. *Самольянов И.И.* Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида. Луцк.: Луцкий индустриальный институт, 1993. – 316 с.
6. *Киричук А.А., Палий О.Н.* Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций. Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сборник научных трудов.-Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003. – С. 55-58.
7. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.* Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. − С. 145-185.
8. *Bazhenov V.A., LukyanchenkoO.O., Kostina O.V.* Definition of the failure region of the oil tank with wall imperfections in combined loading. Strength of Materials and Theory of Structures, 2018. – Вип. 100, С. 27-39.
9. *Лук'янченко О.О., Палій О.М.* Чисельне моделювання стійкості параметричних коливань тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни. Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн., К.: КНУБА, 2018. – Вип. 101, С. 45-59.
10. *Рычков С.П.* MSC.visualNASTRAN для Windows. М.: НТ Пресс, 2004.– 552 с.

REFERENCES

1. *Volmir A.S.* Ustoychivost deformiruemyih sistem (Stability of deformable systems). – M.: Fizmatgiz, 1967. – 784 s. (rus)
2. *Abovskiy N.P., Samolyanov I. I.* K raschetu pologoy obolochki tipa giperbolicheskogo paraboloida (To the calculation of a shallow shell type hyperbolic paraboloid) // Stroit, mehanika i raschet sooruzheniy. – 1969, №6, S. 7-12. (rus)
3. *Rasskazov A.O.* Raschet obolochek tipa giperbolicheskih paraboloidov (Calculation of shells like hyperbolic paraboloids). – Kiev, 1972. 175 s. (rus)
4. *Bazhenov V.A., Gulyaev V.I., Gotsulyak E.O.* Ustoychivost nelineynyih mehanicheskih sistem (Stability of nonlinear mechanical systems). Lvov, Vischa shkola, 1982. – 255 s.(rus)
5. *Samolyanov I.I.* Prochnost, ustoychivost i kolebaniya giperbolicheskogo paraboloida (Strength, stability and vibrations of a hyperbolic paraboloid). Lutsk.: Lutskiy industrialnyiy institut, 1993. – 316 s.(rus)
6. *Kirichuk A.A., Paliy O.N.* Chislenno-analiticheskiy metod issledovaniya ustanovivshihsya kolebaniy obolochechnyih konstruktsiy (Numerical-analytical method for studying steady-state oscillations of shell structures). Matematicheskie modeli v obrazovanii, nauke i promyishlennosti: Sbornik nauchnyih trudov.-Sankt-Peterburgskoe otdelenie MAN VSh, 2003. – S. 55-58.(rus)
7. *Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Dynamichna stiikist parametrychnykh kolyvan pruzhnykh system (Dynamic stability of parametric oscillations of elastic systems) // Opir materialiv i teoriia sporud. K.: KNUBA, 2015. Vyp. 95. − S. 145-185.(ukr)
8. *Bazhenov V.A., LukianchenkoO.O., Kostina O.V.* Definition of the failure region of the oil tank with wall imperfections in combined loading. Strength of Materials and Theory of Structures, 2018. – Vyp. 100, S. 27-39.
9. *Lukianchenko O.O., Paliy O.M.* Chyselne modeliuvannia stiikosti parametrychnykh kolyvan tonkostinnoi obolonky vidiemnoi hausovoi kryvyzny (Numerical simulation of the stability of parametric oscillations of a thin-walled shell of distinct Gaussian curvature). Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn., K.: KNUBA, 2018. – Vyp. 101, S. 45-59.(ukr)
10. *Ryichkov S.P.* MSC.visualNASTRAN dlya Windows (MSC.visualNASTRAN for Windows). M.: NT Press, 2004.– 552 s.

Стаття надійшла до редакції 18.03.2019 р.

Paliy O.M., Lukianchenko O.O.

FREQUENCY ANALYSIS OF THE RESPONSE OF A ONE-SHEET HYPERBOLOID TO PERIODIC LONGITUDINAL LOADING

The frequency analysis of the steady state forced vibrations of a thin shell of negative Gaussian curvature is performed. The one-sheet hyperboloid shell is subjected to the action of the periodic longitudinal load. The finite element model for the shell is built using flat quadrilateral shell elements with six degrees of freedom per node. The modal analysis of the shell is performed by the Lanczos method using linear formulation of the problems. Eigenfrequencies and eigenmodes of the shell are also defined using nonlinear formulation of the problems that takes into account the effect of a longitudinal under critical static force preliminary applied to the top edge of the shell. For this purpose the nonlinear statics problems and the natural vibration problems are sequentially solved by the modified Newton-Raphson method and Lanczos method respectively. A modal analysis showes that dependence of the shell eigenfrequencies on the static longitudinal loading is nonlinear. The steady state response of the shell to the periodic longitudinal loading is obtained both by means of direct and modal frequency analysis. It turned out that sensitivity of the hyperboloid of one sheet to the periodic longitudinal loading considerably increases when the static under critical longitudinal loading is taken into account. The responses of the shell are presented in the form of amplitude frequency dependences of the finite element model nodes.

Keywords: forced vibrations, frequency analysis, finite element method, thin shell, one-sheet hyperboloid, longitudinal loading.

Палий О.Н., Лукьянченко О.А.

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ОТКЛИКА ОДНОПОЛОСНОГО ГИПЕРБОЛОИДА НА ПЕРИОДИЧЕСКУЮ ПРОДОЛЬНУЮ НАГРУЗКУ

Выполнен частотный анализ установившихся вынужденных колебаний тонкой оболочки отрицательной Гауссовой кривизны вида однополосного гиперболоида при действии периодической продольной нагрузки. С помощью программного комплекса конечноєлементного анализа построена расчетная модель оболочки в виде совокупности плоских прямоугольных оболочечных элементов с шестью степенями свободы в узлах. Выполнен модальный анализ оболочки в линейной постановке методом Ланцоша. Определены собственные частоты и формы колебаний в нелинейной постановке для оболочки, на верхнюю кромку которой предварительно приложена статическая осевая докритическая сила. Для этого последовательно решены нелинейная задача статики модифицированным методом Ньютона-Рафсона и задача на собственные значения методом Ланцоша. Модальный анализ показал, что зависимость собственных частот оболочки от статической осевой нагрузки нелинейна. Методами прямого и модального частотного анализа получен установившийся отклик оболочки на периодическую продольную нагрузку. Исследования показали, что чувствительность однополосного гиперболоида на периодическую продольную нагрузку при учете действия статической осевой докритической нагрузки значительно больше, чем без ее учета. Отклики оболочки представлены в виде зависимостей максимальных перемещений узлов модели от частоты возмущения.

Ключевые слова: установившиеся вынужденные колебания, частотный анализ, метод конечных элементов, тонкая оболочка, однополосной гиперболоид, продольная нагрузка.

УДК 539.3
Палій О.М., Лук'янченко О.О. **Частотний аналіз відгуку однополого гіперболоїда на періодичне повздовжнє навантаження** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 199-206.

Виконано частотний аналіз усталених вимушених коливань тонкої оболонки виду однополого гіперболоїда при дії періодичного повздовжнього навантаження із застосуванням процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Методами прямого і модального частотного аналізу досліджено відгук оболонки без і з урахуванням статичного осьового докритичного навантаження.

Табл. 1. Іл. 5. Бібліогр. 10 назв.

UDC 539.3
Paliy O.M., Lukianchenko O.O. **Frequency analysis of the response of a one-sheet hyperboloid to periodic longitudinal loading** / Strength of Materials and the Theory of Structures. – 2019. – Issue 102. – P. 199-206.

The frequency analysis of the steady state forced vibrations of a thin shell of negative Gaussian curvature is performed. The one-sheet hyperboloid shell is subjected to the action of the periodic longitudinal load. The shell response is investigated using both the direct and modal frequency analysis without and taking into account a static longitudinal loading.

Tab. 1. Fig. 5. References 10 items.

УДК 539.3
Палий О.Н., Лукьянченко О.А. **Частотный анализ отклика однополосного гиперболоида на периодическую продольную нагрузку** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2019. – Вып. 102. – С. 199-206. – Укр.

Выполнен частотный анализ установившихся вынужденных колебаний тонкой оболочки вида однополосного гиперболоида при действии периодической продольной нагрузки с помощью процедур программного комплекса конечноэлементного анализа. Методами прямого и модального частотного анализа исследован отклик оболочки без и с учетом статической осевой докритической нагрузки.

Табл. 1. Ил. 5. Библиогр. 10 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *старший викладач кафедри теоретичної механіки КНУБА, ПАЛІЙ Оксана Миколаївна.*
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПАЛІЙ Оксані Миколаївні.*
Робочий тел.: *+38(044) 241-55-72.*
Мобільний тел.: *+38(067) 236-39-85.*
E-mail: *paliy.oxana@gmail.com*

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.*
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.*
Робочий тел.: *+38(044) 245-40-20.*
Мобільний тел.: *+38(095) 727-18-25.*
E-mail: *lukianch0907@meta.ua*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1794-6030