ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2019. № 102

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН І РІВНЯННЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО РУХУ ПОРОЖНИСТОГО ТІЛА ОБЕРТАННЯ – ДИСКА ПІД ДІЄЮ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

О.К. Гревцев[1],
старший науковий співробітник

Н.Ю. Селіванова[2],
старший викладач

[1]*ДП «Державний дорожній науково-дослідний інститут імені М.П. Шульгіна»*

[2]*Національний транспортний університет*

Розглянута просторова задача теорії термопружності та електромагнітопружності для тіла обертання, зокрема для порожнистого диска змінної товщини, навантаженого осесиметрично температурним полем і об'ємними силами: силами тяжіння, пондеромоторними силами (механічні сили, які діють з боку електромагнітного поля на одиницю об'єму провідного середовища) і силами інерції. В результаті досліджень були отримані диференціальні рівняння для знаходження переміщень і рівняння вертикального руху розглянутого тіла обертання. Визначені умови руху порожнистого диска під дією власного електромагнітного імпульсного поля. Проведені дослідження пружнього стану розглянутого тіла обертання. При цьому показано, що дотичні, осьові і радіальні напруження в тілі порожнистого диска відсутні, тобто дорівнюють нулю. Єдине напруження, яке не дорівнює нулю, є окружне напруження. Показано, що температурне поле з'являється при виникненні пондеромоторних сил, спричинених електромагнітним полем і є результатом деформації тіла обертання порожнистого диска.

Ключові слова: термопружність, електромагнітопружність, електромагнітне імпульсне поле, осесиметричне навантаження, осесиметрична деформація, сила інерції, силі тяжіння (гравітації), пондеромоторні сили, температурне поле, релятивістська маса.

Вступ. Відомо [4, 8], що в літературі не наведено точних методів розв'язання задачі теорії пружності для тіл обертання змінної товщини. Наприклад, для тонкого диска змінної товщини, що обертається, припускають, що напруга є плоскою, граничними умовами на криволінійній поверхні нехтують в силу малої товщини [4]. Для порожнистого диска змінної товщини з осесиметричним навантаженням температурним полем і об'ємними силами: силами тяжіння, пондеромоторними силами і силами інерції – немає аналітичного методу розв'язання задачі з точки зору теорії термопружності та електромагнітопружності. А дослідження руху тіла обертання – порожнистого диска – під дією вищеназваних об'ємних сил взагалі не проводилися.

Основна частина. У запропонованій роботі розглянута просторова задача теорії пружності в циліндричних координатах для тіла обертання, зокрема для порожнистого диска змінної товщини, навантаженого осесиметрично температурним полем і об'ємними силами без спрощених гіпотез, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності для осесиметричної деформації.

Нехай тіло обертання перебуває під дією об’ємних сил: сили гравітації (сили тяжіння) $P(t)$; пондеромоторних сил $\overline{P}(\overline{P}_r, \overline{P}_z)$ і температурного поля $\theta(r,z,t)$, а також сил інерції $(\rho u_{3,t})_{,t}$, діючих у напрямку осі обертання OZ, [1], тут u_3 – переміщення в осьовому напрямку, ρ – щільність релятівістської маси тіла. Якщо тіло вільне від механічних зв'язків, то під дією вищеназваних сил, воно буде знаходитися в рівновазі (невагомості), коли ці сили зрівноважуються, або рухатися.

Задача визначення рівноваги або руху суцільного обмеженого середовища є комплексною задачею. Для її рішення необхідно розв’язати рівняння механіки суцільного середовища сумісно з рівняннями електродинаміки [2] і враховуючи термомеханічну взаємодію всередині середовища внаслідок деформації [3]. При дослідженні пружнього стану електропровідного тіла у електромагнітному полі припускається, що тіло перебуває у магнітному полі, яке утворюється електричним током у самому тілі, де тече електричний струм і утворюються електричні заряди. Під дією власного електромагнітного імпульсного поля тіло повинно рухатися самостійно. У ланцюгу, в якому тече змінний струм за величиною і постійний за направленням, закон Ньютона не виконується (не виконуються умови рівноваги пондеромоторних сил). Ці сили і спричинятимуть рух тіла обертання – диска.

Розглянемо пружній стан і рівняння вертикального руху порожнистого диска. Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах (r, z) мають такий вигляд [6]:

в переміщеннях

$$\begin{aligned} &\Delta u_1 - \frac{11}{r^2} u_1 + \frac{1}{1-2v} e_{,1} - 2\frac{(1+v)}{(1-2v)} \alpha\theta_{,1} + \frac{1}{G} P_r = 0, \\ &\Delta u_3 + \frac{1}{1-2v} e_{,3} - \frac{2(1+v)}{(1-2v)} \alpha\theta_{,3} - \frac{1}{G}\left[P_T - P_z + (u\rho_{3,t})_{,t}\right] = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

і напруженнях

$$\begin{aligned} &\sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} + P_r = 0; \\ &\sigma_{33,3} + \sigma_{13,3} + \frac{1}{r}\sigma_{13} - P_T + P_z - (\rho u_{3,t})_{,t} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

У рівняннях (1) і (2) індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою r або z; u_1 і u_3 – відповідно компоненти радіального і осьового переміщень; Δu - оператор Лапласа від переміщень u_i $(i = 1,3)$; $\Delta u_i = u_{i,11} + \frac{1}{r} u_{i,1} + u_{i,33}$; $\Delta_1 u_i = u_{i,11} + \frac{1}{r} u_{i,1}$; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ – відповідно компоненти радіальної, окружної, осьової і дотичної напружень; $\overline{P}_r$ і $\overline{P}_z$ – компоненти пондеромоторної сили $\overline{P}$ $(\overline{P}_r, \overline{P}_z)$ у напрямку осей

OR і OZ; $\bar{P}_T$ - сила тяжіння; $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву (E – модуль пружності); $\theta=\theta(r,z,t)=\theta_1(r,t)+\theta_2(z,t)$ – температурне поле.

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [4]:

$$\sigma_{ij}=2G\left(e_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\delta_{ij}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta\delta_{ij}\right),\ ij=1,2,3; \tag{3}$$

при відомих залежностях між деформаціями і переміщеннями:

$$e_{11}=u_{1,1};\ \ e_{22}=\frac{1}{r}u_1;\ e_{33}=u_{3,1};\ \ 2e_{13}=u_{1,3}+u_{3,1}. \tag{4}$$

Тут σ_{ij} – символ Кронекера; α і ν - коефіцієнти теплового лінійного розширення і Пуассона $e=e_{11}+e_{22}+e_{33}$ - об'ємне розширення.

Для замикання системи рівнянь рівноваги (1) необхідно додати рівняння теплопровідності [6]:

$$\Delta\theta+\frac{1}{\lambda}W=0, \tag{5}$$

де W - кількість тепла, яке утворюється або поглинається одиницею об'єма тіла при його деформації; λ - коефіцієнт теплопровідності; $\Delta\theta=\theta_{,11}+\frac{1}{r}\theta_{,1}+\theta_{,33}$.

Пондеромоторні сили - це механічні сили, які діють з боку електромагнітного поля на частки (одиниці об'єму) провідності середовища. Коли на тіло не накладені механічні зв'язки, які перешкоджають його руху, то під дією пондеромоторних сил воно буде знаходитися у русі при умовах $P_r \neq P_z$ і в рівновазі (невагомість тіла) при $P_r = P_z$.

В силу закона тяжіння Ньютона [5] тіло, яке знаходиться на рівні моря, притягується до Землі з силою (обертанням Землі зневажаємо):

$$P_T(0)=m_0 g_0=\gamma\frac{Mm_0}{R^2},\ \gamma M=g_0 R^2, \tag{6}$$

де M і R - маса і радіус Землі; m_0 - маса тіла у стані спокою; g_0 - прискорення вільного падіння тіла на рівні моря.

При віддаленні від поверхні Землі маємо

$$P_T(t)=m_0 g_0\frac{R^2}{Z^2(t)},$$

$$g(t)=g_0\frac{R^2}{Z^2(t)}, \tag{7}$$

де $Z(t)$ - відстань від центра Землі до початку координат системи (r,z), яка зв'язана з тілом обертання - полим диском. З Землею зв'язана система координат (r',z') (рис. 1).

З формули (7) бачимо, що сила тяжіння P_T і прискорення вільного падіння g_0 змінюється з висотою. Силу тяжіння можна записати для одиниці об'єма однорідного тіла обертання у наступному вигляді:

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2019. № 102

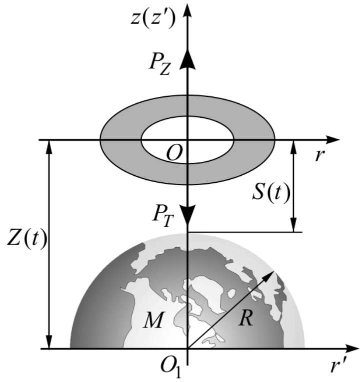

Рис. 1

$$P_T(t) = \rho_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)},$$

$$F_t(t) = V_0 \rho_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}, \qquad (8)$$

де $P_T(t) = V_0 F_t(t)$, $m_0 = \rho_0 V_0$ (V_0 - об’єм тіла в стані спокою).

У початковий момент часу $t = 0$, диск знаходиться у поверхні Землі, тобто $Z(0) = R$. Тоді $P_T(0) = \rho_0 g_0$, $F_t(0) = V_0 \rho_0 g_0 = m_0 g_0$ і сила тяжіння дорівнює його вазі.

Нехай диск рухається вертикально вгору у напрямку осі обертання OZ і не чинить рух в горизонтальній площині OR, тобто дотично до Землі. Вертикальна складова пондеромоторної сили P_z буде знайдена з рівнянь Максвела [7].

Припустимо, що у природному стані, коли ще немає деформацій і напружень, має місце рівняння рівноваги сил:

$$P_T - P_z = 0,$$

Тобто пондероморна сила P_z урівноважує силу тяжіння диска на одиницю об’єма P_T для кожної точки тіла. Але за цих умов, у зв’язку з появою пондеромоторної сили $\bar{P}(\bar{P}_r; \bar{P}_z)$, може з'явитися температурне поле $\theta(r, z, t)$ і горизонтальна складова пондероморної сили P_r, які викликатимуть напружений стан тіла обертання - диска і в умовах рівноваги.

Розглянемо аксіальне тіло обертання, зокрема порожнистий диск змінної товщини симетричний відносно площин $Z = 0$ і $R = 0$ для системи координат пов'язаної з диском. Чверть диска (через осьову симетрію) показана на рис. 2.

Тут P_z - вертикальна складова пондеромоторної сили; P_T - сила тяжіння; $l_1(z)$ і $l_2(z)$ - рівняння внутрішньої та зовнішньої поверхонь диску; $h_1(r)/2$ і $h_2(r)/2$ - внутрішня і зовнішня довжина порожнини диска.

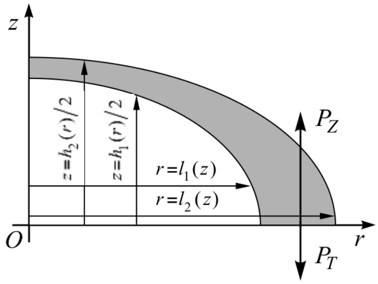

Рис. 2

Пропонований метод рішення систем рівнянь рівноваги (1) і (2) засновано на поступальних наближеннях розв’язання при при задовільнені граничних умов (9). Докладно метод рішення диференціальних рівнянь осесиметричної задачі теорії пружності був наведений у статтях [9, 10, 11, 12]. Знайдені радіальні переміщення $u_1(r,z,t)$ і осьові переміщення $u_3(r,z,t)$ переміщення, які перетворюють систему рівнянь (1) на тотожності і мають такий вигляд:

$$u_1(r,z,t) = u(r,t) - \frac{z^2}{2}\left[\frac{\nu}{2G}P_r(r,t) + (1+\nu)\alpha\theta_{1,1}\right],$$

$$u_3(r,z,t) = z(t) - \frac{\nu}{1-\nu}z\frac{1}{r}(ur)_{,1} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{z^3}{6}\times$$
$$\times\left[\frac{\nu}{2G}\Delta_1 P_r + (1+\nu)\alpha\Delta_1\theta_{1,1}\right] + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\int_0^z \theta(r,z,t)dz_1, \tag{9}$$

де $u(r,t)$ - радіальне переміщення точок в серединній площині $z=0$, $z(t)$ - функція інтегрування, яка характеризує відстань від центра Землі до площини диска $z=0$, як абсолютно жорсткого тіла (точки).

Розв’язання диференціальних рівнянь показало, що осьові та дотичні напруження у тілі диска всюди дорівнюють нулю. При цьому були отримані диференціальні рівняння для визначення радіального переміщення $u(r,t)$, температурного поля $\theta_1(r,t)$, радіальної складової пондеромоторної сили $P_r(r,t)$, а також рівняння руху:

$$P_T(t) - P_z(t) + (\rho u_{3,t})_{,t} = 0.$$

Радіальну складову пондеромоторної сили представимо у вигляді:

$$P_r(r,t) = P_{1,1}(r,t) = P_0(t)r, \tag{10}$$

яка точно задовільняє рівняння $(\Delta_1 P_1)_{,1} = 0.$

Розв’язуючи рівняння $(\Delta_1\theta_1)_{,1} = 0$, отримаємо температурне поле у радіальному напрямку:

$$\theta_1(r,t) = B_1\frac{r^2}{4} + B_2\ln r + B_3, \tag{11}$$

де B_1, B_2 і B_3 - довільні сталі інтегрування.

Знаходимо радіальне переміщення $u(r,t)$ точок площини $z=0$ з рівняння:

$$\left[\frac{1}{r}(u,r)_{,1}\right]_{,1} = (1+\nu)\alpha\theta_{1,1}(r,z) - \frac{1-\nu}{2G}P_{1,1}(r,t).$$

Звідси $u(r,t)$ дорівнює:

$$u(r,t) = (1+\nu)\alpha\left[B_1\frac{r^3}{16} + B_2\left(\frac{r}{2}\ln r - \frac{r}{4}\right) - \frac{1-\nu}{2G}P_0(t)\frac{r^3}{8} + A_1\frac{r}{2} + A_2\frac{1}{r}\right], \tag{12}$$

де A_1 і A_2 - довільні сталі інтегрування.

Рівняння руху може бути записано у такому вигляді:

$$(\rho u_{3,t})_{,t} = P_T(t) - P_z(t),$$

або, з урахуванням виразу сили тяжіння на одиницю об’єма (8):

$$(\rho u_{3,t})_{,t} = \rho_0 g_0\frac{R^2}{z^2(t)} - P_z(t). \tag{13}$$

ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2019. № 102

Для розв'язання цього рівняння треба знати величину осьового переміщення $u(r,t)$ і значення вертикальної складової пондеромоторної сили $P_z(t)$.

Нехай в начальний момент часу $t=0$ диск перебуває у стані рівноваги на поверхні Землі. У цьому разі відстань $Z(t)$ від центра Землі дорівнює $Z(0)=R$. Отже, сила тяжіння одиниці об'єма тіла $P_T(0)=\rho_0 g_0$ урівноважується під'ємною силою - вертикальною складовою пондеромоторної сили $P_z(0)$. Таким чином маємо умову невагомості диска:

$$P_T(0)-P_z(0)=0.$$

Для радіальних напружень σ_{11} із закону Гука (3) з урахуванням (10), (11) і виразу $\theta(r,z,t)=\theta_1(r,t)+\theta_2(z,t)$ отримаємо:

$$\sigma_{11}=\frac{2G}{1-v}\left\{(1+v)\alpha\left[B_1\frac{3+v}{16}+B_2\left(\frac{1+v}{2}\ln r+\frac{1-v}{4}\right)\right]-\frac{1-v}{2G}P_0\frac{3+v}{8}r^2+A_1\frac{1+v}{2}-\right.$$

$$\left.-A_2\frac{1-v}{r^2}-(1-v^2)\alpha\frac{z^2}{2}B_1-(1+v)\alpha\left[B_1\frac{r^2}{4}+B_2\ln r+B_3+\theta_2(z,t)\right]\right\}. \quad (14)$$

Граничні умови для порожнистих тіл обертання будуть такими [8]:

$$\begin{aligned} P_{ir}&=\sigma_{11}\cos\varphi_i+\sigma_{13}\sin\varphi_i, \\ P_{iz}&=\sigma_{13}\cos\varphi_i+\sigma_{33}\sin\varphi_i, \end{aligned} \quad i=1,2, \quad (15)$$

де P_{ir} і P_{iz} – проекції інтенсивності поверхневих навантажень на відповідні напрямки

$$\cos\varphi_i=\frac{f_{i,1}}{|\bar{n}_i|},\ \sin\varphi_i=\frac{f_{i,3}}{|\bar{n}_i|},\quad \left[\bar{n}_i\left(f_{i,1};f_{i,3}\right)\right].$$

Тут $\bar{n}_i$ – нормаль до поверхонь тіла обертання, φ_i – кут між нормаллю і напрямками координатних осей, f_i - неявне рівняння ліній профілю граничних поверхонь порожнистого диска.

Через рівність нулю напружень σ_{13} і σ_{33} граничні умови (15) спрощуються і, в разі відсутності поверхневих навантажень $P_{ir}=P_{iz}=0$ на криволінійних внутрішній та зовнішніх поверхнях порожнистого диска, набувають такого вигляду (рис. 3) $\sigma_{11}=0$ при $r=l_2(z)$ і $\sigma_{11}=0$ при $r=l_1(z)$, де $l_1(z)$, $l_2(z)$ – рівняння профілю внутрішньої та зовнішньої поверхоньпорожнистого диска.

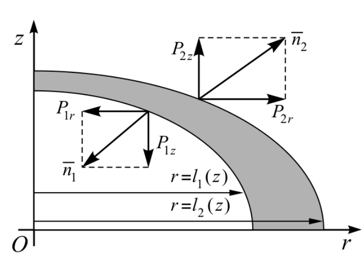

Рис. 3

Виконуючи граничну умову для зовнішньої поверхні диска, отримаємо:

$$(1+v)\alpha\left[B_1\frac{3+v}{16}l_2^2+B_2\left(\frac{1+v}{2}\ln l_2+\frac{1-v}{4}\right)-\frac{1-v}{2G}P_0\frac{3+v}{8}l_2^2+A_1\frac{1-v}{l_2^2}-\right.$$

$$-(1-v^2)\alpha\frac{z^2}{2}\left(B_1\frac{1}{2}-B_2\frac{1}{l_2^2}\right)-\frac{v(1+v)}{2G}\frac{z^2}{2}P_0-v\left(1+v\right)\alpha B_1\frac{z^2}{2}-$$

$$-\left(1+v\right)\alpha\left[B_1(l_2^2/4)+B_2\ln l_2+B_3+\theta_2(z,t)\right]\Bigg]=0. \qquad (16)$$

Функція $\theta(z,t)$ може бути отримана з рівняння (16). Виключаючи з формули для напружень (14) цю функцію за допомогою (16), отримаємо:

$$\sigma_{11}=\frac{2G}{1-v}\left\{\left(1+v\right)\alpha\left[B_1\frac{3+v}{16}(r^2+l_2^2)+B_2\frac{1+v}{2}\ln\frac{r}{l_2}\right]-\frac{1-v}{2G}P_0\frac{3+v}{8}(r^2-l_2^2)-\right.$$

$$\left.-A_2(1-v)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{l_2^2}\right)+(1-v^2)\alpha B_2\frac{z^2}{2}r^2-l_2^2()-(1+v)\alpha\left(B_1\frac{r^2-l_2^2}{4}+B_2\ln\frac{r}{l_2}\right)\right\}. \quad (17)$$

Як бачимо з (17), при $r=l_2$ напруження σ_{11} дорівнюють нулю.

Виконуємо граничну умову на поверхні порожнини диска і отримаємо:

$$(1+v)\alpha\left[B_1\frac{3+v}{16}\left(l_1^2+l_2^2\right)+B_2\frac{1+v}{2}\ln\frac{l_1}{l_2}\right]-\frac{1-v}{2G}P_0\frac{3+v}{8}\left(l_1^2-l_2^2\right)-A_2\left(1-v\right)\left(\frac{1}{l_1^2}-\frac{1}{l_2^2}\right)+$$

$$+\left(1-v^2\right)\alpha B_2\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{l_1^2}-\frac{1}{l_2^2}\right)-\left(1+v\right)\alpha\left(B_1\frac{l_2^2-l_1^2}{4}+B_2\ln\frac{l_1}{l_2}\right)=0. \qquad (18)$$

Це рівняння можливе, якщо покласти

$$B_2=0 \text{ і } A_2=0. \qquad (19)$$

Для B_1 отримаємо з (18):

$$B_1=\frac{3+v}{1+v}\frac{P_0}{G\alpha}. \qquad (20)$$

Підставляючи в рівняння (17) значення (19) і (20), отримаємо те, що $\sigma_{11}=0$ всюди у тілі порожнистого диска.

Знаходимо $\theta_2(z,t)$ з (16) з урахуванням значень (19) та (20) і покладаючи $B_3=0$

$$\theta_2\left(z,t\right)=\frac{3}{4}\frac{P_0(t)}{G\alpha}z^2+\frac{A_1(t)}{2\alpha}. \qquad (21)$$

Для температурного поля $\theta(r,z,t)$ отримаємо:

$$\theta(r,z,t)=\theta_1(r,t)+\theta_2(z,t)=B_1\frac{r^2}{4}+\theta_2(z,t)=\frac{P_0(t)}{4G\alpha}\left(-\frac{3+v}{1+v}r^2+3z^2\right)+\frac{A_1(t)}{2\alpha}. \quad (22)$$

Підставляючи значення (22) у рівняння теплопровідності (5), знаходимо потужність стоку тепла одиницею об'єму тіла диска:

$$W=\frac{3-v}{1+v}\frac{\lambda P_0(t)}{2G\alpha}, \qquad (23),$$

який зникає при $P_0=0$, тобто після припинення дії пондеромоторної сили. Знаходимо радіальне переміщення $u(r,t)$ точок площини $Z=0$ з рівняння (12), враховуючи формули (19) і (20),

$$u\left(r,t\right)=-\frac{P_0(t)}{4G}r^3+A_1\frac{r^2}{2}. \qquad (24)$$

Далі знаходимо значення переміщень $u_1(r,z,t)$ і $u_3(r,z,t)$ з (9), ураховуючи вирази (10), (11), (20), (22), (24), а також залежності

$$\Delta_1 P_r = 2P_0 \text{ і } \Delta_1\theta_1 = -\frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{P_0}{G\alpha}:$$

$$u_1\left(r,z,t\right)=\frac{P_0(t)}{4G}\left(3rz^2-r^3\right)+A_1\frac{r}{2}, \qquad (25)$$

$$u_3\left(r,z,t\right)=z(t)+\frac{P_0(t)}{4G}\left(z^3-3r^2z\right)+A_1\frac{z}{2}.$$

Звідси визначаємо компоненти переміщень у координатній площині тіла обертання – порожнистого диска $Z=0$:

$$u_1\left(r,o,t\right)=\frac{P_0(t)}{4G}r^3+A_1\frac{r}{2},$$
$$u_3\left(r,o,t\right)=z(t), \qquad (26)$$

де $Z(t)$ - відстань від початку координат системи (o',r',z'), пов'язаною з центром Землі до початку координат системи (o,r,z), пов'язаною з тілом обертання. У цьому випадку бачимо, що рух диска можна розглядати як рух точки - початку координат, пов'я заной з тілом (але не з центром його ваги).

Дійсно при:

$$r=0,\ z=0:$$
$$u_1(0,0,t)=0, \qquad (27)$$
$$u_3(0,0,t)=z(t).$$

За початковий час $t=0$ прийнято такий стан тіла, коли воно знаходиться у невагомості на поверхні Землі і його рух відсутній:

$$z(t)\big|_{t=0}=R;\quad P_T(0)-P_Z(0)=0.$$

За переміщеннями (25) знаходимо із закона Гука окружне напруження σ_{22}, яке єдине не дорівнює нулю:

$$\sigma_{22}=P_0(t)r^2. \qquad (28)$$

Оскільки складова радіальної пондеромоторної сили $P_r(r,t)=P_0 r$ виникає не у початковий момент часу $t=0$, коли диск перебуває у невагомості на поверхні Землі, але ще не рухається, а раніше при появі електричного поля у силовому кільці тіла обертання. У цьому випадку з'являється пондеромоторна сила, а ще раніше, коли $P_r=P_z=0$ і $P_0=0$, пружній стан тіла був відсутній і було відсутнє поле (22) і тіло мало начальну температуру: $\theta(r,z)=A_1/2\alpha$, ураховуючи, що $A_1=const\left(\approx 20^\circ C\right)$.

Таким чином, бачимо, що температурне поле $\theta(r,z,t)$ з'явилося як наслідок виникнення пондеромоторної сили, викликаної електромагнітним полем, і є результатом деформації тіла обертання –порожнистого диска.

Зі спеціальної теорії відносності [13] відомо, що щільність релятивіської маси ρ пов’язана з щільністю маси , яка перебуває у спокої ρ_0 залежністю:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{29}$$

і формулою аналогічною для маси:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad m_0 = \rho_0 V_0. \tag{30}$$

Тут m_0 - маса тіла у системі відліку , відносно якої воно перебуває у стані спокою (r, z) . Ця величина називається власною масою або масою спокою. Величина m - є маса того самого тіла у системі відліку (r', z') , відносно якої воно рухається зі швидкістю v_z . Ця величина називається релятивістьскою масою, c - швидкість світла ; V - об’єм тіла у стані спокою.

В силу малоістотності переміщень точок самого тіла обертання відносно координатної системи (r,z), яка жорстко пов’язана з тілом , для нормального переміщення u_3 маємо:

$$u_3 \approx Z(t)$$

і для швидкості тіла отримаємо:

$$u_3 \approx Z_{1t}(t) = V_z.$$

Перемножуючи рівняння руху диска

$$P_T(t) - P_z(t) + (\rho_{3,t}),_t = 0$$

для одиниці об’єма на об’єм покоя V_0, отримаємо :

$$\begin{gathered} V_0 \left(\rho v_Z\right),_t = V_0 P_Z\left(t\right) - m_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}, \\ \rho V_0 = \frac{\rho_0 V_0}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} = m \end{gathered} \tag{31}$$

і рівняння вертикального руху тіла , як точки, набуває вигляду:

$$\left(m v_z\right),_t = V_0 P_z(t) - m_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}. \tag{32}$$

Коли тіло рухається зі швидкістю значно меншою, ніж швидкість світла $V \ll c$, то $m = m_0$ і будемо мати для прискорення:

$$a_z = v_{z,t} = \frac{V_0}{m_0} P_z(t) - m_0 g_0 \frac{R^2}{Z^2(t)}. \tag{33}$$

Висновки. Розглянуто напружено-деформований стан та рівняння вертикального руху тіла обертання – порожнистого диска під дією температурного поля та об’ємних сил. Коли на диск не накладені механічні в'язі, які перешкоджають його руху, то під дією пондеромоторних сил він рухатиметься, якщо сила тяжіння не дорівнюватиме пондеромоторній силі і в рівновазі (невагомість тіла), коли вони будуть рівними. Отримані рішення свідчать про те, що дія пондеромоторних сил приводить до появи температурного поля, яке є результатом дослідження розглянутого тіла обертання. Для визначення прискорення і швидкості порожнистого диска, який рухається, необхідно знати конкретний вираз для вертикальної складової пондеромоторної сили, яка буде знайдена з розв'язку рівнянь Максвела і буде запропонована в наступному дослідженні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Партон В.З., Перлый П.И.* Методы математической теории упругости. – М. : Наука, 1981. – 428 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М. : Наука, 1976. – т. I. – 483 с.
3. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.
4. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560с.
5. *Яворский Б.М., Пинский А.А.* Основы физики. – М.: Наука, 1981. –т.1 –396с.
6. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными полями. – М.: Физматгиз, 1982. – 167с.
7. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Физматгиз, 1982. – т.1 –411с.
8. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. – К.: Наукова думка,1972. – 501с.
9. *Рябов А.Ф., Федоренко Ю.М.* Об одном методе решения задачи теории упругости для тел вращения // Мат. методы и физико–механические поля. – 1988. – Вып. 28. – с. 58 – 62.
10. *Гревцев А.К.* Решение задачи термоупругости для вращающихся аксиальных тел переменной толщины // Строительство и архитектура. Новосибирск, 1991. – №4. – с.33 – 37.
11. *Гревцев О.К.* Про один метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітого обертового диска змінної товщини //Опір матеріалів і теорія споруд. – 1998. – Вип. 64. – С. 76-86.
12. *Гревцев О.К., Харченко С.З.* Про один метод розв'язання температурної задачі теорії термопружності для нерівномірно нагрітих тіл обертання// Опір матеріалів і теорія споруд. – 2003. – Вип. 73. – С. 65-72.
13. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: Физмагиз, 1961. – 292 с.

REFERENCES

1. *Parton V., Pearlyi P.* Metodyi matematicheskoy teorii uprugosti (Methods of the mathematical theory of elasticity). - M.: Nauka, 1981. - 428 p.
2. *Sedov L.* Mehanika sploshnoy sredy (Continuum Mechanics). - M.: Science, 1976. - Vol. I. - 483 p.
3. *Germain P.* Kurs mehaniki sploshnyh sred (Course in the mechanics of continuous media). - Moscow: Higher School, 1983. - 399 p.
4. *Timoshenko S., Goudier J.* Teoria uprugosti (Theory of Elasticity). - Moscow: Nauka, 1979. - 560 p.
5. *Yavorsky B., Pinsky A.* Osnovy fiziki (Basics of physics). - Moscow: Nauka, 1981.-1. -396c.
6. *Melan E., Parkus G.* Temperaturnye napriazhenia, vyzyvaemye stacionarnymi potokami (Temperature stresses caused by stationary fields). - Moscow: Fizmatgiz, 1982. – 167 s.
7. *Saveliev I.* Kurs obschey fiziki (The course of general physics). - Moscow: Fizmatgiz, 1982. - Vol.1 -411s.
8. *Timoshenko S.* Kurs teorii uprugosti (Course of the theory of elasticity). - K .: Naukova Dumka, 1972. - 501s.
9. *Ryabov A., Fedorenko Y.* Ob odnom metode reshenia zadachi teorii uprugosti dlia tel vraschenia (A method for solving the elasticity problem for bodies of revolution, Mat. methods and physical-mechanical fields). - 1988. - Issue. 28. - p. 58 - 62.
10. *Grevtsev A.* Reshenie zadachi termouprugosti dlya vraschauschihsia aksial'nyh tel peremennoy tolschiny (Solution of the problem of thermoelasticity for rotating axial bodies of variable thickness). // Construction and architecture. Novosibirsk, 1991. - № 4. - p.33 - 37.
11. *Grevtsev A.* Pro odyn metod rozv'iazannia osesymetrychnoi zadachi teorii pruzhnosti dlia nerivnomirno nagritogo obertovogo dyska zminnoi tovschiny (About one method of solving an axisymmetric problem of elasticity theory for an unevenly heated rotating disk of variable thickness). // Resistance of materials and theory of structures. - 1998. - Vip. 64. - P. 76-86.
12. *Grevtsev A.*, *Kharchenko S.* Pro odyn metod rozv'iazannia osesymetrychnoi temperaturnoi zadachi teorii termopruzhnosti dlia nerivnomirno nagrityh til obertannia (About one method for solving the temperature problem of the theory of thermoelasticity for unevenly heated bodies of rotation). // Resistance of materials and theory of constructions. - 2003. - V. 73. - P. 65-72.

13. *Madelung E.* Matematicheskiy apparat fiziki (Mathematical apparatus of physics). - Moscow: Fizmatgiz, 1961. - 292 p.

Стаття надійшла до редакції 12.03.2018 р.

Grevtsev O., Selivanova N.

STRESS-STRAIN STATE AND EQUATION OF THE VERTICAL MOVEMENT OF THE CORED BODY OF ROTATION – DISC UNDER ELECTROMAGNETIC FIELDS

Investigeted the problem of the theory of thermoelasticity and electromagnetoelasticity for solid of revolution, in particular a cored disk of variable thickness, loaded by an axisymmetric temperature field and volume forces: gravity forces, ponderomotive forces (mechanical forces acting per unit volume of the conducting medium) and inertia forces is considered.

The problem of determining the equilibrium or motion of a continuous bounded medium is a complex problem. For solving it is necessary to first solve the equations mechanics of continue together with the equations of electrodynamics into account the thermomechanical interaction of the environment as a result the deformation. While investigating the stress state of an electrically conductive body in an electromagnetic field, it is assumed that the body is in a magnetic field created by an electric current in the body itself, where an electric current flows and electric charges are generated. Under the influence of its own electromagnetic impulse field, the body must move independently. In circuits in which an alternating current flows in magnitude and constant in direction, Newton's law is not valid (the equilibrium condition of the ponderomotive forces the mechanical forces acting on the body from the side of the electromagnetic field). These forces will also cause the motion of the body of revolution.

As a result of the research, differential equations were obtained for the determination of displacements and the equation for the vertical motion of a body of revolution of variable thickness.

The conditions for the movement of the cored disk under the action of its own electromagnetic pulse field are determined. The stress state of the rotating body is investigated. It was shown that the tangential, axial and radial stresses in the body of the cored disk are absent, that is they are equal to zero. The only voltage other than zero is the circumferential tension. It is shown that the temperature field appears when the ponderomotive forces caused by the electromagnetic field arise and is the result of deformation of the body of rotation - a cored disc.

Key words: thermoelasticity, electromagnetoelasticity, electromagnetic impulse field, axisymmetric stress, axisymmetric deformation, inertia force, gravity force, ponderomotive forces, temperature field, relativistic mass.

Гревцев А.К., Селиванова Н.Ю.

УПРУГО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И УРАВНЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ - ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрена пространственная задача теории термоупругости и электромагнитоупругости для тел вращения, в частности полого диска переменной толщины, нагруженного осесимметрично температурным полем и объемными силами: силами тяжести, пондоромоторными силами (механические силы, действующие со стороны электромагнитного поля на единицу объема проводящей среды) и силами инерции. В результате исследований были получены дифференциальные уравнения для определения перемещений и уравнения вертикального движения. Определены условия движения полого диска под действием собственного электромагнитного импульсного поля. Проведено исследование напряженного состояния рассматриваемого тела вращения. При этом показано, что касательные, осевые и радиальные напряжения в теле полого диска отсутствуют, т.е. равны нулю. Единственным напряжением, отличным от нуля, будет окружное напряжение. Показано, что температурное поле появляется при возникновении пондоромоторных сил, вызванных электромагнитным полем, и является результатом деформации тела вращения – полого диска.

Ключевые слова: термоупругость, электромагнитоупругость, электромагнитное импульсное поле, осесимметричная нагрузка, осесимметричная деформация, сила инерции, силі тяжести (гравитации), пондеромоторные силы, температурное поле, релятивистская масса.

УДК 539.3
Гревцев О.К., Селіванова Н.Ю. **Напружено-деформований стан і рівняння вертикального рухупорожнистого тіла обертання – диска під дією електромагнітних полів** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 102. – С. 109-120.

Розглянута просторова задача термопружності та електромагнітопружності для тіла обертання, зокрема для полого диска змінної товщини, навантаженого осесиметрично температурним полем і об'ємними силами: силами тяжіння, пондеромоторними силами і силами інерції. Були отримані диференціальні рівняння для знаходження переміщень і рівняння вертикального руху розглянутого тіла обертання. Визначені умови руху полого диска під дією власного електромагнітного імпульсного поля. Проведені дослідження пружного стану розглянутого тіла обертання.
Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр. 13 назв.

UDC 539.3
Hrevtsev O., Selivanova N. **Stress-strain state and equation of the vertical movement of the cored body of rotation – disc under electromagnetic fields** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 102. - P. 109-120. – Ukr.

The spatial problem of thermoelasticity and electromagnetic elasticity for a body of rotation is considered, in particular for a hollow disk of variable thickness, loaded axially by a temperature field and volumetric forces: gravity, ponderomotive forces and forces of inertia. Differential equations were obtained for finding displacements and the equation of the vertical motion of the considered body of rotation. The conditions of the motion of a hollow disk are determined under the action of their own electromagnetic pulsed field. The study of the elastic state of the considered body of rotation has been carried out.
Tabl. 0. Fig. 3. Ref. 13.

УДК 539.3
Гревцев А.К., Селиванова Н.Ю. **Напряженно-деформированное состояние и уравнение вертикального движения полого тела вращения - диска под действием электромагнитных полей** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 012. - С. 109-120.

Рассмотрена пространственная задача термоупругости и электромагнитоупругости для тела вращения, в частности для полого диска переменной толщины, нагруженного осесимметрично температурным полем и объемными силами: силами тяжести, пондеромоторными силами и силами инерции. Были получены дифференциальные уравнения для нахождения перемещений и уравнения вертикального движения рассматриваемого тела вращения. Определены условия движения полого диска под действием собственного электромагнитного импульсного поля. Проведены исследования упругого состояния рассматриваемого тела вращения.
Табл. 0 Ил. 3. Библиогр. 13 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Старший науковий співробітник Державного підприємства «Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна» ГРЕВЦЕВ Олексій Кімович*
Адреса робоча: *03113, Україна, м. Київ, пр. Перемоги, 57, ГРЕВЦЕВУ Олексію Кімовичу*
Робочий тел.: *+38 044 242 75 96*

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Старший викладач Національного транспортного університету, СЕЛІВАНОВА Нінель Юріївна*
Адреса робоча: *01010, Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, СЕЛІВАНОВІЙ Нінель Юріївні*
Робочий тел.: *+38 044 280 38 19*
Мобільний. тел.: *+38 063 315 65 87*
E-mail: nel_s@i.ua