

УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ВИСОКОЇ ТОНКОСТІННОЇ ОБОЛОНКИ ВІД'ЄМНОЇ ГАУСОВОЇ КРИВИЗНИ

О.О. Лук'янченко,
канд. техн. наук

О.М. Палій,
старший викладач

*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; (044) 2415420, e-mail: lukianch0907@meta.ua*

Виконано чисельне моделювання стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки виду гіперболічного параболоїда при зовнішньому поверхневому тиску та осьовому стисканні. Редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості оболонки сформовані за допомогою процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Розв'язані задачі нелінійної статички модифікованим методом Ньютона-Рафсона та стійкості методом Ланцоша при дії статичної складової параметричного навантаження двох видів. Виконано модальний аналіз оболонки в лінійній постановці без урахування навантаження методом Ланцоша і в нелінійній постановці для визначення власних частот і форм коливань оболонки, яка навантажена статичною складовою параметричного навантаження двох видів. При формуванні редукованих моделей стійкості параметричних коливань оболонки при різних видах навантаження враховані особливості її статичної та динамічної поведінки.

Ключові слова: параметричні коливання, динамічна стійкість, метод скінченних елементів, висока тонкостінна оболонка, гіперболоїд.

Вступ. В будівництві широко використовуються оболонки від'ємної гаусової кривизни, в тому числі гіперболічні параболоїди [1-23]. Наприклад, на рис. 1 (а) представлена оболонкова конструкція охолоджувальної башти АЕС з бетону висотою 160 м, радіусом 37-59 м і товщиною 0,2-0,28 м. Бетонне покриття споруди зі змінною товщиною (від 0,2 м) у вигляді гіперболічного параболоїда представлено на рис. 1 (б). Особливе місце серед таких оболонок займає гіперболоїд Шухова (рис. 1 (в)). За рахунок конструкції стінки, яка є несучільною і складається зі стержнів, гіперболоїд Шухова може мати висоту у декілька сотнів метрів, невеликі радіуси і сприймати великі вітрові навантаження. Детально розроблені методи розрахунку гіперболоїда Шухова з такою стінкою [11]. На теперішній час у архітекторів і конструкторів виникає бажання створення оболонкових споруд висотою у сотні метрів з невеликими окружними радіусами виду гіперболоїда Шухова з суцільною тонкою стінкою. У зв'язку з цим, актуальним постає питання забезпечення її статичної і динамічної стійкості при різних навантаженнях, особливо при дії параметричних навантажень. Для розв'язання цієї задачі важливою є створення редукованих моделей стійкості параметричних коливань таких оболонок та інших тонкостінних оболонок від'ємної гаусової кривизни [19-23].



(a)

(б)

(в)

Рис. 1. Конструкції у вигляді гіперболічних параболоїдів:

(а) - охолоджувальна башта АЕС, (б) - покриття споруди, (в) – телевізійна вежа (Шухова)

Моделювання за допомогою чисельних методів на відміну від аналітичних дає змогу спростити розв'язання даної проблеми. Серед чисельних методів широке застосування набув метод скінченних елементів, який реалізовано в сучасних обчислювальних комплексах SCAD, ANSYS, NASTRAN та інших [24].

В роботі за допомогою чисельної методики [22,23] побудовані дві редуковані дискретні моделі стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки виду гіперболічного параболоїда при зовнішньому поверхневому тиску та осьовому стисканні. Рівняння динамічної стійкості оболонки подано у вигляді рівняння статичної рівноваги з додаванням д'Аламберових сил інерції, дисипативних сил і деяких складових незбудженого напружено-деформованого стану оболонки, що залежать від часу. Редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості оболонки сформовані за допомогою процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу NASTRAN [24]. Розв'язані задачі нелінійної статичної (Nonlinear Static) та стійкості (Buckling) при дії постійної складової параметричного навантаження двох видів. Проведений модальний аналіз тонкостінної оболонки в лінійній постановці (Normal Modes) без урахування навантаження і в нелінійній постановці для визначення власних частот коливань оболонки, яка навантажена постійною складовою параметричного навантаження (Nonlinear Static, Modes_Param) двох видів. Особливості статичної та динамічної поведінки тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни при різних видах навантаження враховані при формуванні редукованих моделей стійкості параметричних коливань. Слід відмітити, що при дослідженні статичних і динамічних характеристик оболонки форми деформування її суцільної тонкої стінки мають велику кількість півхвиль як в радіальному так і в осьовому напрямках. Таке деформування стінки у вигляді випучин і вм'ятин є більш небезпечним, ніж деформування стінки гіперболоїда Шухова, що складена особливим чином зі стержнів.

1. Чисельна методика побудови редукованої моделі параметричних коливань оболонки

В статті використана чисельна методика, яка апробована при дослідженні пологих оболонок додатної та від'ємної гаусової кривизни [20-23]. Динамічна стійкість параметричних коливань дискретної пружної системи з скінченним числом степенів вільності записана у вигляді

$$M\ddot{\vec{u}}(t) + C\dot{\vec{u}}(t) + K\vec{u}(t) + z_0 K_{G_1} \vec{u}(t) + \tilde{z}(t) K_{G_2} \vec{u}(t) = 0, \quad (1)$$

де $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ – вектор вузлових переміщень; M, K, K_{G_1} та K_{G_2} – позитивно визначені матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, C – матриця демпфірування. Тут параметричні сили $z(t)$ подані з точністю до двох множників, один з яких z_0 характеризує статичну складову параметричного навантаження, а другий $\tilde{z}(t)$ – складову, яка може бути детермінованою періодичною функцією або випадковим процесом.

Для редукування моделі (1) в роботі застосовано метод узагальнених координат. Нетривіальний розв'язок системи представлено у вигляді

$$\vec{u}(t) = V\vec{y}(t), \quad (2)$$

де V – матриця розміром $n \times m$, яка визначається системою базисних векторів $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^m$:

$$V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m), \quad (3)$$

$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_i(t), \dots, y_m(t))^T$ – вектор узагальнених координат.

Тоді система (1) набуває вигляду

$$M^* \ddot{\vec{y}}(t) + C^* \dot{\vec{y}}(t) + K^* \vec{y}(t) + z_0 K_{G_1}^* \vec{y}(t) + \tilde{z}(t) K_{G_2}^* \vec{y}(t) = 0, \quad (4)$$

де $M^*, C^*, K^*, K_{G_1}^*, K_{G_2}^*$ – відповідно редуковані матриці мас, демпфірування C^* , жорсткості, геометричної жорсткості розмірністю $m \times m$. В програмі NASTRAN [24] за базисні вектори прийняті форми власних коливань $\{\vec{\phi}_i\}_{i=1}^m$, які нормовані по матриці мас M . В цьому випадку редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* і жорсткості K^* набувають вигляду

$$M^* = \Phi^T M \Phi = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1),$$

$$C^* = \Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\varepsilon_1 \omega_1, 2\varepsilon_2 \omega_2, \dots, 2\varepsilon_i \omega_i, \dots, 2\varepsilon_m \omega_m),$$

$$K^* = \Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_m^2), \quad (5)$$

де $\Phi = \{\vec{\phi}_i\}_{i=1}^m$ – матриця форм власних коливань, $\omega_i = 2\pi\nu_i$ – кругова власна частота коливань (c^{-1}), ε_i – коефіцієнт демпфірування оболонки по i - тій власній частоті коливань, m – число врахованих власних форм коливань. Редукована матриця геометричної жорсткості K_G^* пологої

оболонки, відповідно числовій методиці [20-23], обчислюється за формулою

$$K_G^* = \Phi^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K \Phi. \quad (6)$$

Тут $\Lambda = \{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1}^m = \{q_{cr1}, q_{cr2}, \dots, q_{cr m}\}^T$ – матриця критичних значень навантаження; вектори матриці $K\Psi$ і $K\Phi$ обчислюються за допомогою процедури визначення реакції системи на задане поле переміщень у вигляді векторів власних форм коливань $\Phi = \{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^m$ і форм втрати стійкості оболонки $\Psi = \{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^m$.

Редукована модель динамічної стійкості параметричних коливань оболонки з врахуванням формул (4), (5) и (6) набуває вид системи зв'язаних рівнянь

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i^2 \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) + z(t) \sum_{j=1}^m g_{ij} y_{ij}(t) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

де g_{ij} – члени редукованої матриці геометричної жорсткості K_G^* (6).

В статтях [23, 24] представлена додаткова редукована модель стійкості параметричних коливань пологої оболонки виду гіперболічного параболоїда. В першому наближенні вона може враховувати втрату стійкості з послідуочим виходом в зону стійкості. Ця модель має вигляд системи незв'язаних рівнянь

$$\ddot{y}_i(t) + 2\varepsilon_i \omega_i^2 \dot{y}_i(t) + \tilde{\omega}_{i(z_0)}^2 y_i(t) - \tilde{z}(t) \frac{g_{ii}(z_0)}{z_0} y_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

де $\tilde{\omega}_i = 2\pi\tilde{\nu}_i$ – кругова власна частота коливань оболонки, як навантажена постійною складовою параметричного навантаження (c^{-1}); $\tilde{z}(t)$ – складова параметричного навантаження, яка залежить від часу; $g_{ii}(z_0)$ – члени редукованої матриці геометричної жорсткості $K_{G(z_0)}^*$, що відповідають i -тій власній частоті коливань оболонки і статичній складовій параметричного навантаження z_0 .

2. Аналіз впливу статичної складової параметричного навантаження на напружено-деформований стан і стійкість оболонки

Фізичні і геометричні параметри сталльної тонкостінної оболонки прийняті рівними: окружні радіуси $R = 40$ м і $r = 20$ м, висота $L = 160$ м, товщина $h = 0,02$ м, модуль пружності $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуасона $\mu = 0,3$. Поверхня оболонки змодельована у вигляді сукупності плоских прямокутних скінчених елементів зі шістьма степенями вільності у вузлах. Нижній, середній та верхній контури оболонки розбиті на 64 частини, твірна – на 48. Кількість вузлів і елементів моделі складає 3136 и 3072 відповідно. Обмежені всі лінійні і кутові переміщення вузлів моделі оболонки на нижньому та верхньому контурах, крім лінійних вертикальних переміщень вузлів верхнього контуру.

2.1. Статична поведінка оболонки при дії статичної складової поверхневого тиску

Поверхневий тиск прикладений ззовні на всі елементи оболонки. Дослідження напружено-деформованого стану оболонки виконано в нелінійній постановці. Задача статички розв'язана модифікованим методом Ньютона-Рафсона (Nonlinear Static). На рис. 2 представлена крива навантаження оболонки поверхневим тиском $z_0 = q_0 = 2000 \text{ Па}$ двох вузлів моделі, в яких спостерігаються максимальні переміщення при розтягу та стиску.

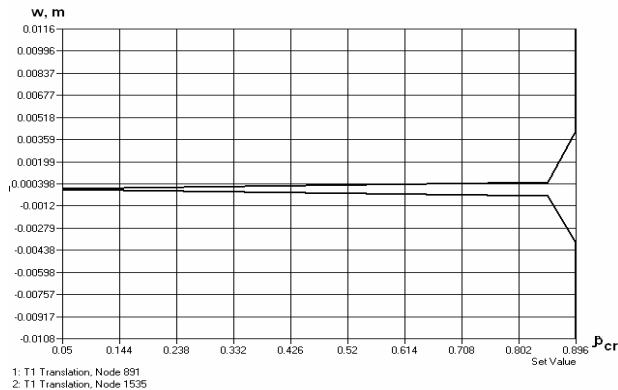


Рис. 2. Крива навантаження оболонки поверхневим тиском (Nonlinear Static).

Граничний стан оболонки відповідає значенню $q_{cr} = 0,896q_0 = 1793 \text{ Па}$. На рис. 3 представлено напружено-деформований стан оболонки для двох значень поверхневого тиску $q = 1000 \text{ Па}$ та $q_{cr} = 1793 \text{ Па}$. Максимальне переміщення відповідно склали $0,00119 \text{ м}$ та $0,0132 \text{ м}$, максимальні еквівалентні напруження – $2,741 \text{ МПа}$ та $4,997 \text{ МПа}$.

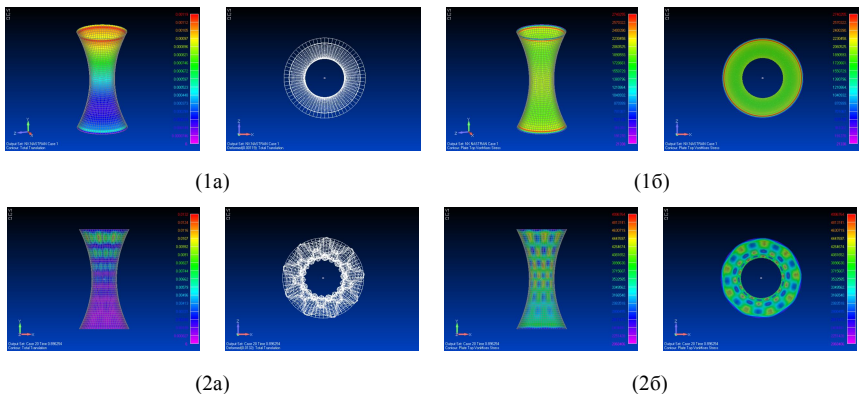


Рис. 3. Стан оболонки при зовнішньому тиску $q = 1000 \text{ Па}$ (1) та $q_{cr} = 1793 \text{ Па}$ (2):
(а) – деформація, (б) – еквівалентні напруження

Виконано розрахунок стійкості оболонки в лінійній постановці (Buckling) за допомогою розв'язання задачі на власні значення методом Ланцоша. На рис. 4 показані перші чотири форми втрати стійкості вздовж твірної і в радіальному напрямку. Відповідні цим формам критичні значення поверхневого тиску склали: $q_{cr} = [1742,73; 1771,96; 1791,98; 1876,95]$ Па.

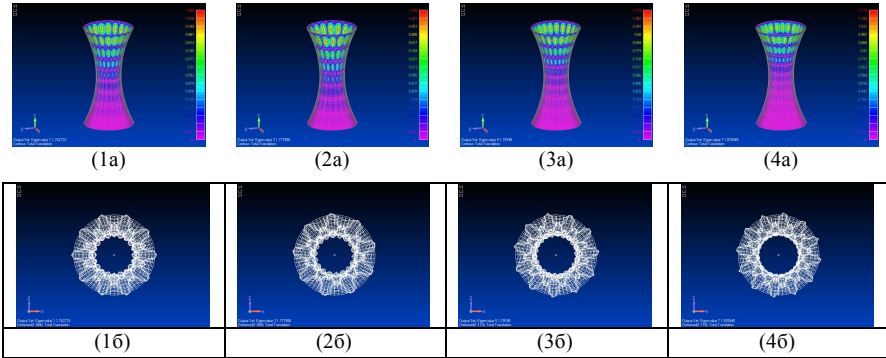


Рис. 4. Перші чотири (1-4) форми втрати стійкості оболонки при поверхневому тиску (Buckling) вздовж твірної (а) і в радіальному напрямку (б)

Дослідження статичної стійкості оболонки показало, що перше критичне значення поверхневого тиску дещо менше (0,03%) за значення, яке отримано в нелінійній постановці (Nonlinear Static). При цьому спостерігається різна кількість півхвиль вздовж твірної: 6 (рис. 3 (2a)) і 7 (рис. 4 (1a)) та в радіальному напрямку: 9 (рис. 3 (2a)) і 10 (рис. 4 (1б)).

2.2. Статична поведінка оболонки при осьовому стисканні

Стискаюче осьове параметричне навантаження діє на верхній контур оболонки і змодельоване у вигляді зосереджених сил, прикладених до вузлів її верхнього контуру. Нелінійна задача статички розв'язана модифікованим методом Ньютон-Рафсона (Nonlinear Static). На рис. 5 представлені криві навантаження оболонки двох вузлів моделі оболонки, в яких спостерігається максимальні переміщення різних знаків. До кожного з 80 вузлів верхнього контуру оболонки прикладена стискаюча осьова сила $z_0 = P_0 = 400$ кН.

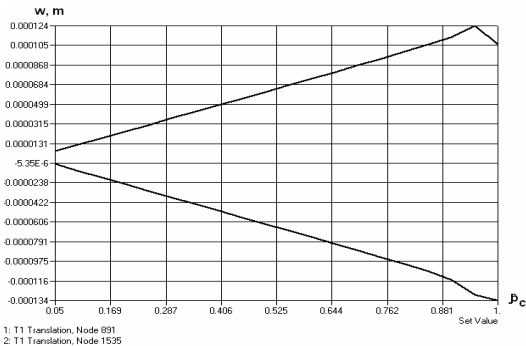


Рис. 5. Крива навантаження оболонки осьовим стисканням (Nonlinear Static)

Граничний стан оболонки спостерігається при осьовому стисканні $P_{cr} = 0,941P_0 = 376,2 \text{ кН}$. Напружено-деформований стан оболонки для двох значень осьового стискання представлено на рис. 6. При дії осьового навантаження $z_0 = P_0 = 80 \text{ кН}$ і в граничному стані при $P_{cr} = 376,2 \text{ кН}$, максимальні переміщення розподілені вздовж верхнього контуру оболонки і відповідно склали $0,00002 \text{ м}$ і $0,00629 \text{ м}$; максимальні еквівалентні напруження $24,034 \text{ кПа}$ і $9,613 \text{ МПа}$ спостерігаються в місці меншого радіуса.

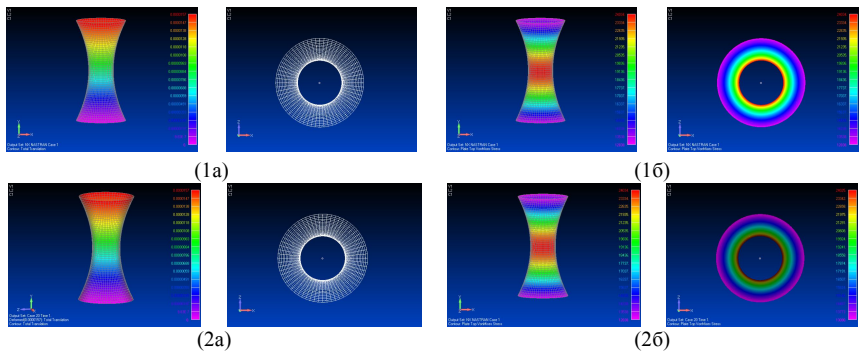


Рис. 6. Стан оболонки при осьовому стисканні $P_0 = 80 \text{ кН}$ (1) і $P_{cr} = 376,2 \text{ кН}$ (2):
(а) – деформації, (б) – еквівалентні напруження

Стійкість оболонки в лінійній постановці (Buckling) досліджена за допомогою метода Ланцоша при розв'язанні задачі на власні значення. На рис. 6 показані перші чотири форми втрати стійкості. Відповідні цим формам критичні значення осьового стискання склали: $P_{cr} = [370,64; 384,347; 394,629; 421,373] \text{ кН}$.

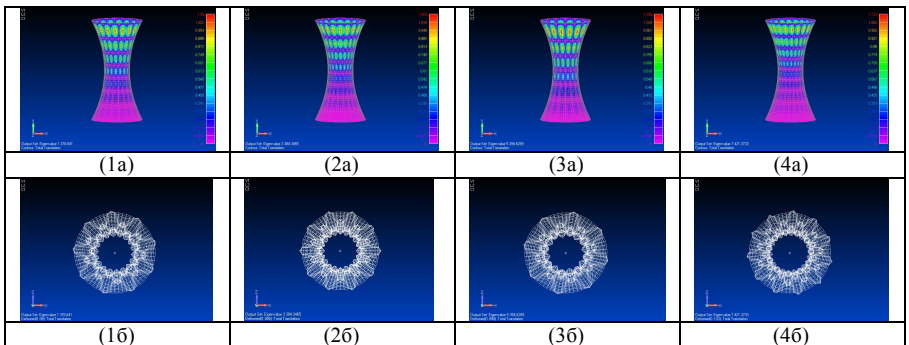


Рис. 7. Перші чотири (1-4) форми втрати стійкості оболонки при осьовому стисканні вздовж твірної (а) і в радіальному напрямку (б) (Buckling)

3. Визначення динамічних характеристик тонкостінної оболонки

3.1. Модальний аналіз оболонки

Задача на власні значення (Normal Modes) ненавантаженої оболонки розв'язана методом Ланцоша. На рис. 8 представлені перші чотири власні

форми коливань оболонки. Спектр власних частот коливань оболонки щільний (табл. 1).

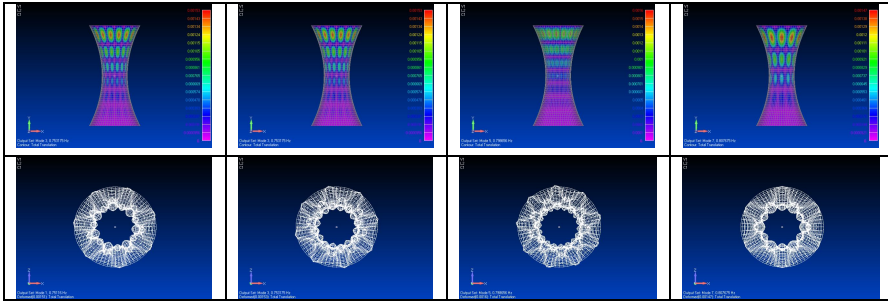


Рис. 8. Перші чотири форми власних коливань ненавантаженої оболонки (Normal Modes)

Спостерігаються як симетричні так і косиметричні власні форми коливань оболонки. Кількість півхвиль в радіальному напрямку різне від шести до дев'яти, вздовж твірної – від чотирьох до шести. Власні форми коливань гіперboloїда відрізняються від форм деформації, отриманих при розв'язку нелінійної задачі статки і лінійної стійкості при різних видах навантаження (рис. 3, 6), і від форм втрати стійкості при дії на оболонку постійної складової параметричного навантаження (рис. 4, 7). Спектр власних частот коливань оболонки щільний і представлений в табл. 1.

3.2. Модальний аналіз оболонки з урахуванням поверхневого тиску

Модальний аналіз оболонки з урахуванням поверхневого тиску виконано в нелінійній постановці за допомогою процедур Nonlinear Static і Modes_Param за допомогою модифікованого метода Ньютон-Рафсона і метода Ланцоша. Власні частоти і форми коливань оболонки, навантаженої постійною складовою параметричного навантаження $z_0 = q_0 = [100 - 2200] \text{ Па}$, представлені в табл. 1 і на рис. 9.

Таблиця 1

Власні частоти і форми коливань оболонки $\tilde{\nu}_i, \text{ Гц}$

№	Постійна складова поверхневого тиску $q_0, \text{ Па}$						
	0 (ν_i)	100	200	400	600	800	1000
1	0,75115	0,77252	0,75649	0,71619	0,66905	0,61379	0,56176
2	0,75318	0,78159	0,76042	0,72335	0,68861	0,63701	0,57663
3	0,79866	0,82589	0,81478	0,76138	0,70394	0,64909	0,6163
4	0,80768	0,84021	0,81515	0,79325	0,77072	0,70556	0,63178
5	0,87174	0,93355	0,90481	0,844367	0,77926	0,74476	0,72296
	1200	1400	1600	1750	1800	2000	2200
1	0,47005	0,42822	0,31511	0,15343	-0,0696	-0,3822	-0,6768
2	0,48602	0,44708	0,32823	0,22498	0,14116	-0,2995	0,29159
3	0,49740	0,45982	0,38259	0,22710	0,17750	0,36167	0,35439
4	0,55475	0,52191	0,39377	0,33528	0,27671	0,36171	0,59824
5	0,5675	0,54408	0,48199	0,33988	0,31326	0,58724	0,60142

При навантаженні меншому за 200 Па власні частоти коливань гіперболоїда вище за власні частоти ненавантаженої оболонки, тобто вона стає жорсткішою. При подальшому збільшенні навантаження власні частоти коливань зменшуються. При уточненому значенні навантаження $z_0 = 1776 \text{ Па}$ перша власна частота коливань стає нульовою, що відповідає втраті стійкості гіперболоїда по першій формі коливань. При $z_0 = 1862 \text{ Па}$ стає нульовою також друга власна частота коливань. Таким чином, ці значення є критичними. Значення першого критичного навантаження трохи вище за відповідне значення навантаження, отримане в лінійній постановці $1742,73 \text{ Па}$ і менше за значення 1793 Па , яке отримане при розв'язку задачі нелінійної статки. Значення другого критичного навантаження близьке до четвертого $1876,95 \text{ Па}$. Втрата стійкості гіперболоїда по третій і вище формам коливань не спостерігається.

3.3. Модальний аналіз оболонки з урахуванням осевого стискаючого навантаження.

Дослідження проводилось аналогічно дослідженню, представленою в розділі 3.2. Власні частоти і форми коливань оболонки з врахуванням постійної складової осевого навантаження $z_0 = P_0 = [0, 1 - 450] \text{ кН}$, прикладеної до кожного з 80 вузлів верхньої кромки оболонки, представлені в табл. 2 і на рис. 10.

Таблиця 2

Власні частоти і форми коливань оболонки $\tilde{\nu}_i, \text{Гц}$

№	Постійна складова осевого навантаження $P_0, \text{кН}$						
	0 (ν_i)	0,1	1	10	50	100	150
1	0,75115	0,78816	0,78746	0,78038	0,74807	0,69574	0,63524
2	0,75318	0,80212	0,80125	0,79227	0,75104	0,70543	0,65987
3	0,79866	0,83643	0,83594	0,83104	0,80647	0,74290	0,67268
4	0,80768	0,86477	0,86376	0,85356	0,80884	0,78016	0,75031
5	0,87174	0,95413	0,95384	0,94943	0,89951	0,83225	0,75819
	200	250	300	350	370	400	450
1	0,56788	0,49081	0,38535	0,21238	0,00587	-2,3445	0,23830
2	0,59343	0,50084	0,39843	0,27573	0,19707	-1,4512	0,29468
3	0,61071	0,55699	0,46125	0,29812	0,20682	-0,2872	0,53545
4	0,67500	0,57878	0,49726	0,42899	0,39237	0,25827	0,57588
5	0,71916	0,68651	0,59519	0,46005	0,39833	0,34718	0,79066

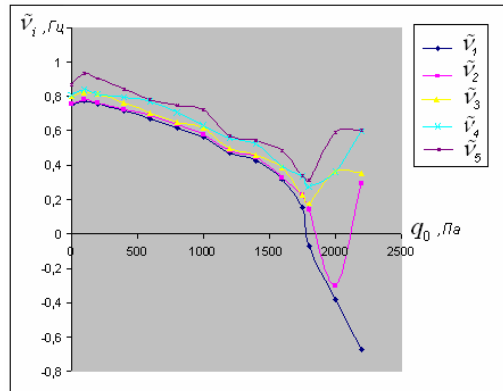


Рис. 9. Власні частоти коливань оболонки з урахуванням статичної складової поверхневого тиску

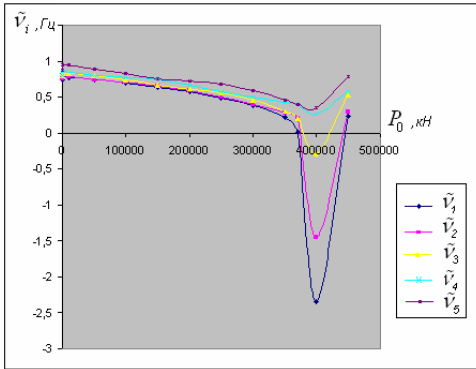


Рис. 10. Власні частоти коливань оболонки з врахуванням статичної складової осьового навантаження

При осьовому навантаженні меншому за 50 кН спостерігається збільшення жорсткості оболонки, бо значення власних частот (табл. 2) вище за частоти ненавантаженої оболонки. При збільшенні статичної складової осьового навантаження власні частоти коливань зменшуються. Втрата стійкості оболонки відбувається по першим трьом формам коливань з подальшим виходом в стан рівноваги. Уточнені значення критичних навантажень складають

$P_{cr} = [370,03; 379,12; 383,41] \text{ кН}$. Значення першого критичного навантаження $P_{cr1} = 370,03 \text{ кН}$ є дещо меншим за значення критичного навантаження, отриманого при розв'язку задачі стійкості (Buckling) $370,64 \text{ кН}$, і меншим за значення граничного навантаження, отриманого при розв'язанні нелінійної задачі статики (Nonlinear Static) $376,2 \text{ кН}$. Друге і третє критичні навантаження не перевищують друге критичне навантаження (Buckling) $384,35 \text{ кН}$. Втрата стійкості гіперболічного параболоїда по третій і вище формам коливань не спостерігається.

4. Редукована модель стійкості параметричних коливань тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни

Дослідження показали, що залежність власних частот навантаженої оболонки від статичної складової параметричного навантаження двох видів нелінійна (рис. 9, 10). Редуковану модель стійкості параметричних коливань оболонки при дії поверхневого тиску представимо у вигляді системи рівнянь (7), бо оболонка втрачає стійкість по першій формі і не повертається в стан рівноваги. Редуковану матрицю геометричної жорсткості отримаємо за формулою (6) за допомогою розв'язання оберненої задачі статики, модального аналізу ненавантаженої оболонки та задачі стійкості згідно методики [20-23].

При осьовому стисканні редуковану модель динамічної стійкості оболонки подамо у вигляді незв'язаних рівнянь для кожної постійної складової параметричного навантаження (8). Наприклад, якщо врахувати перші п'ять власних частот коливань, редукована матриця жорсткості ненавантаженої оболонки набуває вигляду (5)

$$K^* = \text{diag}(22,2736; 22,3939; 25,1799; 25,7522; 29,9989). \quad (9)$$

Редукована матриця жорсткості навантаженої оболонки $K_{(z_0)}^{**}$, наприклад, при дії статичної складової параметричного навантаження у вигляді поверхневого тиску $z_0 = q_0 = 100 \text{ Па}$ та $z_0 = q_0 = 1600 \text{ Па}$ (табл. 1), набуває вигляду

$$K_{(z_0=100)}^{**} = \text{diag}(23,5594; 24,1158; 26,9264; 27,8679; 34,4039),$$

$$K_{(z_0=1600)}^{**} = \text{diag}(3,9197; 4,2529; 5,7783; 6,1209; 9,1707). \quad (10)$$

При дії статичної складової параметричного навантаження у вигляді осьової стискаючої сили $z_0 = P_0 = 10 \text{ кН}$ та $z_0 = P_0 = 350 \text{ кН}$ (табл. 2), що прикладені до кожного з 80 вузлів верхнього контуру оболонки, редукована матриця жорсткості $K_{(z_0)}^{**}$ набуває вигляду

$$K_{(z_0=10)}^{**} = \text{diag}(24,0408; 24,7788; 27,2629; 28,7610; 35,5842),$$

$$K_{(z_0=350)}^{**} = \text{diag}(1,7805; 3,0012; 3,5083; 7,2649; 8,3548). \quad (11)$$

Редукована матриця геометричної жорсткості для конкретного значення статичної складової параметричного навантаження $K_{G(z_0)}^*$ визначається за формулою

$$K_{G(z_0)}^* = K^* - K_{(z_0)}^{**}. \quad (12)$$

Для вище розглянутих значень статичної складової параметричного навантаження матриця $K_{G(z_0)}^*$ набуває вигляду:

– для поверхневого тиску

$$K_{G(z_0=100)}^* = \text{diag}(-1,2858; -1,7219; -1,7464; -2,1158; -4,4081),$$

$$K_{G(z_0=1600)}^* = \text{diag}(18,3539; 18,1409; 19,4016; 19,6313; 20,8282), \quad (13)$$

– для осьового стискання

$$K_{G(z_0=10)}^* = \text{diag}(-1,7672; -2,3849; -2,0830; -3,0088; -5,5853),$$

$$K_{G(z_0=350)}^* = \text{diag}(20,4931; 19,3927; 21,6716; 18,4873; 21,6440). \quad (14)$$

Таким чином, в системі рівнянь (8) $g_{ii(z_0)}$ є членами редукованої матриці геометричної жорсткості $K_{G(z_0)}^*$ (13, 14). Кругова власна частота коливань оболонки обчислюється за формулою $\tilde{\omega}_i = 2\pi\tilde{\nu}_i (c^{-1})$, де $\tilde{\nu}_i$ – власна частота коливань в Gz (табл. 1, 2) для відповідних значень статичної складової параметричного навантаження z_0 .

Висновок. Представлена числова методика дозволяє побудувати редуковану модель стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни при різних видах навантаження і врахувати особливості її поведінки. Процедури програмного комплексу скінченноелементного аналізу дають можливість сформувати редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості з врахуванням особливості поведінки оболонки при втраті стійкості. При дослідженні статичних і динамічних характеристик оболонки від'ємної гаусової кривизни виявлено, що форми деформування її стінки мають велику кількість півхвиль як в радіальному, так і в осьовому напрямках. Таке деформування стінки у вигляді випучин і вм'ятин є більш небезпечним, ніж деформування стінки гіперboloїда Шухова, що складена зі стержнів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеориздат, 1956. – 419 с.
2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М., 1963. 636 с.
3. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем.- М.: Физматгиз, 1967.-784 с.
4. *Абовский Н.П., Самольянов И. И.* К расчету пологой оболочки типа гиперболического параболоида // Строит, механика и расчет сооружений. -1969, №6. - С. 7-12.
5. *Дехтярь А.С., Рассказов А.О.* Экспериментальное исследование несущей способности оболочек типа гиперболического параболоида . В сб.: Пространственные конструкции в Красноярском крае», вып. IV. Красноярск. -1969. - С. 311-321.
6. *Като В., Нишимура Т.* Покрытие, образуемое сочетанием гиперболических параболоидов. В сб.: Большепролетные оболочки. М.: Стройиздат, 1969.– С. 167-195.
7. *Рассказов А.О.* Расчет оболочек типа гиперболических параболоидов. – Киев, 1972. – 175 с.
8. *Берман Ф.И.* К расчету гиперболической оболочки при действии несимметричной гидростатической нагрузки. Сборник трудов ЦНИИЭПсельстрой, №5, 1973.-С. 106-123.
9. *Ржаницын А.Р., Эм В.В.* О расчете упругих тонких оболочек произвольной формы на основе моментной теории оболочек в прямоугольных координатах // Статика сооружений. — Киев, 1978. — С. 88-91.
10. *Баженов В.А., Гуляев В.И., Гоцуляк Е.О.* Устойчивость нелинейных механических систем. Львов, Вища школа, 1982. – 255 с.
11. *Ковалева Е.А., Ковалева Л.В., Афанасьев Д.Н.* Гиперболоидные конструкции В.Г. Шухова – применение в современном строительном производстве // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. – 2015. – № 1. – С. 157–160.
12. *Самольянов И.И.* Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида. Луцк.: Луцкий индустриальный институт, 1993. – 316 с.
13. *Журавлев А.А., Ёрж Е.Ю., Журавлев Д.А.* Деревянные конструкции гиперболических оболочек. В сб.: «Легкие строительные конструкции». — Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит, ун-т, 2000. - С. 4-56.
14. *Сунак О.П., Ужегов С.О., Пахолок О.А.* До визначення внутрішніх зусиль у пологій оболонці від'ємної гаусової кривини при дії вертикального навантаження// Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. - 2012. – Вип. 23. – С. 411-416.
15. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. – М.: Издательство „Мир“, 1978. – 336 с.
16. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1982. – 432 с.
17. *Nayfeh A.H.* The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to a parametric excitation// J. of Sound and Vibr., 1983. – vol. 88, No. 4. – p. 547-557.
18. *Гайдайчук В.В., Киричук О.А., Палій О.М.* Динаміка повздожніх коливань тонкої циліндричної оболонки// Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2007. – Вип. 81. – С. 148-153.
19. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О.* Побудова редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині// Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. – С. 11-19.
20. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.* Чисельна побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 73-87.
21. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.* Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – с.145-185.
22. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.* Об устойчивости параметрических колебаний оболочки в виде гиперболического параболоида // Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. – 2018. – Т.54. - №3. – С. 36-49.
23. *Vazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Stability of the Parametric Vibrations of a Shell in the Form of a Hyperbolic Paraboloid // International Applied Mechanics, 54(3), 274-286. DOI 10.1007/s10778-018-0880-4.
24. *Рычков С.П.* MSC.visualNASTRAN для Windows. М.: ИТ Пресс, 2004. – 552 с.

REFERENCES

1. *Volmir A.S.* Gибкие пластинки i оболочки (Flexible plates and shells). М.: Gostehtheorizdat, 1956. – 419 s.

2. *Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S.* Plastini i obolochki (plates and shells). – M., 1963. 636s.
3. *Volmir A.S.* Ustoychivost deformiruemiyh system (Stability of deformable systems).- M.: Fizmatgiz, 1967.– 784 s.
4. *Abovskiy N.P., Samolyanov I. I.* K raschetu pologoy obolochki tipa giperbolicheskogo paraboloïda (To the calculation of a shallow shell type hyperbolic paraboloid) // Stroït, mehanika i raschet sooruzheniy. -1969, №6, s. 7-12.
5. *Dehtyar A.S., Rasskazov A.O.* Eksperimentalnoe issledovanie nesuschey sposobnosti obolochek tipa giperbolicheskogo paraboloïda (Experimental study of the carrying capacity of shells of the hyperbolic paraboloid type). V sb.: Prostranstvennyie konstruksii v Krasnoyarskom krae», vyip. IV. Krasnoyarsk, 1969, – s. 311-321.
6. *Kato V., Nishimura T.* Pokrytie, obrazuemoe sochetaniem giperbolicheskikh paraboloïdov. V sb.: Bolsheproletnyie obolochki (The coating formed by the combination of hyperbolic paraboloids). M.: Stroyizdat, 1969.– s. 167-195.
7. *Rasskazov A.O.* Raschet obolochek tipa giperbolicheskikh paraboloïdov (Calculation of shells like hyperbolic paraboloids). – Kiev, 1972. –175 s.
8. *Berman F.I.* K raschetu giperbolicheskoy obolochki pri deystvii nesimmetrichnoy gidrostaticheskoy nagruzki (To the calculation of the hyperbolic shell under the action of asymmetric hydrostatic load). Sbornik trudov TsNIIEPselstroy, №5, 1973.-s. 106-123.
9. *Rzhanitsyin A.R., Em V.V.* O raschete uprugih tonkih obolochek proizvolnoy formy na osnove momentnoy teorii obolochek v pryamougolnyih koordinatah (On the calculation of elastic thin shells of arbitrary shape based on the moment theory of shells in rectangular coordinates)// Statika sooruzheniy. — Kiev, 1978. — S.88-91.
10. *Bazhenov V.A., Gulyaev V.I., Gotsulyak E.O.* Ustoychivost nelineynyih mehanicheskikh sistem (Stability of nonlinear mechanical systems). Lvov, Vischa shkola, 1982. – 255 s.
11. *Kovaleva E.A., Kovaleva L.V., Afanasev D.N.* Giperboloidnyie konstruksii V.G. Shuhova – primenenie v sovremennom stroitelnom proizvodstve (Hyperboloidal constructions by VG Shukhov - application in modern building production)// Dalniy Vostok: problemyi razvitiya arhitekturno-stroitelnoho kompleksa. – 2015. – № 1. – S. 157–160.
12. *Samolyanov I.I.* Prochnost, ustoychivost i kolebaniya giperbolicheskogo paraboloïda (Strength, stability and vibrations of a hyperbolic paraboloid). Lutsk.: Lutskiy industrialniy institut, 1993. – 316 s.
13. *Zhuravlev A.A., Yorzh E.Yu., Zhuravlev D.A.* Derevyannyye konstruksii giperbolicheskikh obolochek (Wooden construction of hyperbolic shells). V sb.: «Legkie stroitelnyie konstruksii». — Rostov-na-Donu: Rost. gos. stroit. un-t, 2000, s. 4-56.
14. *Sunak O.P., Uzhnev S.O., Pakholiuk O.A.* Do vyznachennia vnutrishnikh zusyil u polohii obolontsi vidiemnoi hausovoi kryvyny pry dii vertykalnoho navantazhennia (To the determination of internal forces in a smooth shell of a negative Gaussian curvature under the action of vertical load)// Resursoekonomni materialy, konstruksii, budivli ta sporudy. - 2012. – Vyp. 23. – s. 411-416.
15. *Shmidt G.* Parametricheskie kolebaniya (Parametric oscillations). – M.: Izdatelstvo „Mir”, 1978. – 336 s.
16. *Volmir A.C.* Nelineynaya dinamika plastin i obolochek (Nonlinear dynamics of plates and shells). M.: Nauka, 1982. – 432 s.
17. *Nayfeh A.H.* The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities to a parametric excitation// J. of Sound and Vibr., 1983. – vol. 88, No. 4. – p. 547-557.
18. *Gaydaychuk V.V., Kyrychuk O.A., Paliy O.M.* Dynamika povzdovzhnikh kolyvan tonkoi tsylindrychnoi obolonky (Dynamics of longitudinal oscillations of a thin cylindrical shell) // Opir materialiv i teoriia sporud. K.: KNUBA, 2007. - Vyp. 81. – s.148-153.
19. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtiariuk Ye.S., Lukianchenko O.O.* Pobudova redukovanoi modeli parametrychnykh kolyvan tsylindrychnoi obolonky pry chystomu zghyni (Construction of a reduced model of parametric oscillations of a cylindrical shell under clean bend) // Opir materialiv i teoriia sporud. K.: KNUBA, 2009. Vyp. 84. – s. 11-19.
20. *Bazhenov V.A., Dekhtiariuk Ye.S., Lukianchenko O.O., Kostina O.V.* Chyselna pobudova redukovanykh modelei stokhastychnykh parametrychnykh kolyvan polohykh obolonok (Numerical construction of reduced models of stochastic parametric oscillations of flat shells) // Opir materialiv i teoriia sporud. K.: KNUBA, 2011. - Vyp. 87. – s. 73-87.
21. *Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Dynamichna stiikist parametrychnykh kolyvan pruzhnykh system (Dynamic stability of parametric oscillations of elastic systems) // Opir materialiv i teoriia sporud. K.: KNUBA, 2015. - Vyp. 95. – s.145-185.

22. Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V. Ob ustoychivosti parametricheskikh kolebaniy obolochki v vide giperbolicheskogo paraboloida (On the stability of parametric vibrations of the shell in the form of a hyperbolic paraboloid) // Prikladnaya mehanika: Mezhdunar. nauchn. zhurnal. – 2018. – T. 54. - №3. – s. 36-49.
23. Bazhenov V.A., Lukianchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V. Stability of the Parametric Vibrations of the Shell in the Form of a Hyperbolic Paraboloid // International Applied Mechanics, 54(3), 274-286. DOI 10.1007/s10778-018-0880-4.
24. Rychkov S.P. MSC.visualNASTRAN dlia Windows (MSC.visualNASTRAN for Windows). M.: NT Press, 2004. – 552 s.

Стаття надійшла 19.11.2018

Lukianchenko O.O., Paliy O.M.

NUMERICAL MODELING OF THE STABILITY OF PARAMETRIC VIBRATIONS OF A HIGH THIN-WALL SHELL OF NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE

A numerical simulation of the stability of parametric vibrations of a high thin-wall shell in the form of hyperboloid under the action of the external surface pressure and axial compression was performed. The equation of dynamic stability of the shell was presented in the form of a static equilibrium equation with the addition of the D'Alembert forces of inertia, dissipative forces, and some components of the unexcited stress-strain state of the shell were depending on time. The reduced mass, damping, stiffness, and geometric stiffness matrixes of the shell were formed using the procedures of the finite element analysis software program. The problem of nonlinear statics was solved by the modified Newton-Raphson method. The stability of the shell under the action of the static component of parametric load of the two types are solved by the Lanczos method. A modal analysis of the shell without loads in a linear formulation was performed by Lanczos method. The frequencies and modes vibrations of the shell, which was loaded with the static component of the parametric load, were calculated. When were forming the models of the stability of parametric vibrations the features of the static and dynamic behavior of the thin-walled shell of negative Gaussian curvature under different types of load were taken into account. The research of the static and dynamic characteristics of the shell showed that the wall deformation shape have a large number of half-waves both in the radial and axial directions. Such a deformation of the wall in the form of bulges and dents is more dangerous than the deformation of Shukhov hyperboloid wall consisting of the rods.

Keywords: dynamic stability, parametric vibrations, finite element method, high thin-wall shell, hyperboloid.

Лукьянченко О.А., Палий О.Н.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОКОЙ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Выполнено численное моделирование устойчивости параметрических колебаний высокой тонкостенной оболочки вида гиперболического параболоида при внешнем поверхностном давлении и осевом сжатии. Редуцированные матрицы масс, демпфирования, жесткости и геометрической жесткости оболочки сформированы с помощью процедур программного комплекса конечноэлементного анализа. Решены задачи нелинейной статики модифицированным методом Ньютона-Рафсона и устойчивости методом Ланцоша при действии статической составляющей параметрической нагрузки двух видов. Выполнен модальный анализ оболочки в линейной постановке без учета нагрузки методом Ланцоша и в нелинейной постановке для определения собственных частот и форм колебаний оболочки, которая нагружена статической составляющей параметрической нагрузки двух видов. При формировании редуцированных моделей устойчивости параметрических колебаний оболочки при различных видах нагрузки учтены особенности ее статического и динамического поведения.

Ключевые слова: параметрические колебания, динамическая устойчивость, метод конечных элементов, высокая тонкостенная оболочка, гиперолоид.

УДК 539.3

Лук'янченко О.О., Палій О.М. **Чисельне моделювання стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки від'ємної гаусової кривизни** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 101. – С. 45-59.

Виконано чисельне моделювання стійкості параметричних коливань високої тонкостінної оболонки виду гіперболічного параболоїда при зовнішньому поверхневому тиску та осевому стисканні. Редуковані матриці мас, демпфування, жорсткості і геометричної жорсткості оболонки сформовані за допомогою процедур програмного комплексу скінченноелементного аналізу.

Табл. 2. Іл. 10. Бібліогр. 24 назв.

UDC 539.3

Lukianchenko O.O., Paliy O.M. **Numerical modeling of the stability of parametric vibrations of a high thin-wall shell of negative Gaussian curvature** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 101. – P. 45-59.

A numerical simulation of the stability of parametric vibrations of a high thin-wall shell in the form of hyperboloid under the action of the external surface pressure and axial compression was performed. The reduced mass, damping, stiffness, and geometric stiffness matrixes of the shell were formed using the procedures of the finite element analysis software program.

Tabl. 2. Fig. 10. Ref. 24.

УДК 539.3

Лук'янченко О.А., Палій О.Н. **Численное моделирование устойчивости параметрических колебаний высокой тонкостенной оболочки отрицательной гауссовой кривизны** // Сопrotивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вип. 101. – С. 45-59.

Выполнено численное моделирование устойчивости параметрических колебаний высокой тонкостенной оболочки вида гиперболического параболоида при внешнем поверхностном давлении и осевом сжатии. Редуцированные матрицы масс, демпфирования, жесткости и геометрической жесткости оболочки сформированы с помощью процедур программного комплекса конечноэлементного анализа.

Табл. 2. Ил. 10. Библиогр. 24 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

Робочий тел.: +38(044) 245-40-20.

Мобільний тел.: +38(067) 931-30-27.

E-mail: lukianch0907@meta.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1794-6030>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): старший викладач кафедри теоретичної механіки КНУБА, ПАЛІЙ Оксана Миколаївна.

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПАЛІЙ Оксані Миколаївні.

Робочий тел.: +38(044) 241-55-72.

Мобільний тел.: +38(067) 236-39-85.

E-mail: paliy.oxana@gmail.com

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5958-1862>.