

УДК 539.3

## ВПЛИВ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ ГРАНИЧНИХ І КОНТАКТНИХ ПОВЕРХОНЬ, БЛИЗЬКИХ ДО СФЕРИЧНИХ, НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТОВСТИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ПІД ДІЄЮ ТИСКУ

В.М. Неміш<sup>1</sup>,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Д.Г. Чернописький<sup>2</sup>,

доктор тех. наук, науковий співробітник

<sup>1</sup>Західноукраїнський національний університет, м. Тернопіль<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ

DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.214-222

На основі загального розв'язку рівнянь рівноваги для ізотропного середовища у сферичній системі координат у рамках другого варіанта методу збурення форми границі (МЗФГ) отримано з урахуванням перших трьох наближень розв'язку задачі про напружено-деформований стан (НДС) товстих шаруватих оболонок обертання, обмежених поверхнями з малою амплітудою відхилення від сферичних. Згідно аналітичних розв'язків отримано числові дані, які дозволили провести аналіз напружено-деформованого стану оболонок під дією постійного або змінного осесиметричного (внутрішнього і зовнішнього) тиску. Залежно від геометричних параметрів рівнянь неканонічних поверхонь оболонок показано вплив умов ідеального і неідеального контакту між шарами на перерозподіл напружень порівняно з випадком сферичної оболонки з шаруватою структурою (канонічна форма – нульове наближення).

**Ключові слова:** товсті шаруваті неканонічні оболонки, близькі до сферичних, постійний і змінний тиск.

### Вступ

Замкнуті товсті шаруваті оболонки як із сферичною так із близькою до неї неканонічною формою поверхонь мають широке застосування у вигляді резервуарів для зберігання рідин, що мають агресивні властивості. Тому актуальними є дослідження величини концентрації напружень у найбільш критичних точках оболонок зумовлених зміною кривизни неканонічної поверхні.

### 1. Постановка і методика розв'язання граничних задач про пружну рівновагу шаруваті оболонки обертання з неканонічною формою поверхонь шарів

Розглядаються товстостінні тришарові пружні оболонки з внутрішньою  $S_0$  і зовнішньою  $S_4$  поверхнями, які задані рівняннями

$$S_l \sim r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta) \quad (r_0 \equiv 1; r_l = \text{const} > 1, \quad \varepsilon \ll 1, \quad -1 \leq \omega_l \leq 1; l = \overline{0, 4}), \quad (1)$$

де  $r, \theta, \alpha$  — безрозмірні сферичні координати ( $\theta$  – кут широти,  $\alpha$  – довготи,  $\varepsilon$  — амплітуда відхилення неортогональної поверхні від сферичної ( $r_l = \text{const}$ ). Комбінація параметрів  $\omega_l$  ( $\omega_l = \pm 1; 0$ ) дозволяє отримати сімейство оболонок задежно від форми контактних і граничних поверхонь  $S_l$ . Згідно параметричного рівняння (1) отримуємо ряд варіантів форм оболонок, які приведено у табл. 1.

При осевій симетрії форми поверхонь (1) оболонок і заданих на них відповідно осесиметричних зусиллях  $\tau_{\theta l}$  і  $\tau_{r l}$ , граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr,1} n_{r0} + \sigma_{r\theta,1} n_{\theta 0})_{S_{0, I-VIII}} = \tau_{r,0}; \quad (\sigma_{r\theta,1} n_{r0} + \sigma_{\theta\theta,1} n_{\theta 0})_{S_{0, I-VIII}} = \tau_{\theta 0}; \\ (\sigma_{rr,4} n_{r4} + \sigma_{r\theta,4} n_{\theta 4})_{S_{4, I-VIII}} = \tau_{r,4}; \quad (\sigma_{r\theta,4} n_{r4} + \sigma_{\theta\theta,4} n_{\theta 4})_{S_{4, I-VIII}} = \tau_{\theta 4}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\tau_{il} = \bar{\tau}_l \cdot \bar{e}_l$  ( $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta$  — одиничні орти координатних осей). При цьому вектори зовнішніх зусиль  $\bar{\tau}_l$  ( $\tau_{r,l}, \tau_{\theta,l}$  – проекції вектора), заданих на граничних поверхнях, допускають представлення

$$\bar{\tau}_i = \pm |\tau_i| \bar{e}_{n,i}, \tag{3}$$

де знаку “+” відповідають розтягуючі зусилля, а “-” – стискаючі.

Таблиця 1

Варіанти оболонок	Рівняння внутрішньої поверхні $S_0 \sim \omega_0 = 0; \pm 1$	Рівняння зовнішньої поверхні $S_4 \sim \omega_1 = 0; \pm 1$
I	$r = 1$	$r = r_4 + \varepsilon f(\theta)$
II	$r = 1 + \varepsilon f(\theta)$	$r = r_4$
III	$r = 1$	$r = r_4 - \varepsilon f(\theta)$
IV	$r = 1 - \varepsilon f(\theta)$	$r = r_4$
V	$r = 1 + \varepsilon f(\theta)$	$r = r_4 + \varepsilon f(\theta)$
VI	$r = 1 - \varepsilon f(\theta)$	$r = r_4 - \varepsilon f(\theta)$
VII	$r = 1 + \varepsilon f(\theta)$	$r = r_4 - \varepsilon f(\theta)$
VIII	$r = 1 - \varepsilon f(\theta)$	$r = r_4 + \varepsilon f(\theta)$

Напрявні косинуси  $n_{r,l}, n_{\theta,l}$  одиничної нормалі  $\bar{e}_{n,l}$  для внутрішньої ( $\bar{e}_{n0} = n_{r0}\bar{e}_r + n_{\theta0}\bar{e}_\theta$ ) і зовнішньої ( $\bar{e}_{n4} = n_{r4}\bar{e}_r + n_{\theta4}\bar{e}_\theta$ ) поверхонь згідно [1, 3] визначаються формулами

$$\begin{pmatrix} n_{r,4} \\ n_{r,0} \end{pmatrix} = \pm r \left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-1/2}; \quad \begin{pmatrix} n_{\theta,4} \\ n_{\theta,0} \end{pmatrix} = \mp \frac{dr}{d\theta} \left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{-1/2}; \quad n_{0\alpha} = n_{4\alpha} \equiv 0 \text{ при } r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta). \tag{4}$$

Задовільнити крайовим умовам (2) безпосередньо неможливо, тому що в даній постановці задачі по крайній мірі одна із граничних поверхонь (1) є некоординатною, тому у випадку осевої симетрії розв’язки поставленої задачі для переміщень і напружень у довільному наближенні мають вигляд ( $t = r, \theta; m = r, \theta, \alpha$ )

$$u_{t,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{t,k}^{(n)} + O(\varepsilon^3), \quad \sigma_{m,l,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{m,l,k}^{(n)} + O(\varepsilon^3), \quad k = 1, 2, 3 \tag{5}$$

Припускаємо, що задані на границі зусилля і форма поверхонь оболонки  $S_0$  і  $S_4$  згідно рівнянь (1) є такими, що шукані переміщення і напруження (5) на граничних поверхнях допускають розклад у ряди Тейлора в околі  $r = 1, r = r_l (r_l > 1; l = 0, 4)$

$$(u_{t,k}, \sigma_{m,l,k})_{S_l} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{s=0}^n \frac{\omega_l^s f^s(\theta)}{s!} \left[ \frac{\partial^s}{\partial r^s} (u_{t,k}^{(n-s)}, \sigma_{m,l,k}^{(n-s)}) \right]_{r=r_l}. \tag{6}$$

Якщо згідно (1) надати змінній  $r$  у виразах (6) значення  $r = r_l + \varepsilon \omega_l f(\theta)$  і перейти до їх розкладу у ряди за степенями  $\varepsilon$ , то у довільному наближенні отримаємо згідно (4) формули для напрямних косинусів  $n_{r,l}, n_{\theta,l}$  нормалі  $\bar{e}_{n,l}$  для поверхні  $S_l$

$$n_{r,l} = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \left[ \gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right]; \quad n_{\theta,l} = -\frac{\omega_l}{r_l} \frac{df(\theta)}{d\theta} \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \gamma_{v-1,l}, \quad \gamma_{-1,l} \equiv 0, \tag{7}$$

де

$$\gamma_{m,l} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k (-1)^k \frac{k!(2k-1)!}{(k-n)!n!(2k)!!} A_l^{k-n} B_l^{k-n}, \quad k+n=m,$$

$$A_l = 2\omega_l \frac{f}{r_l}, \quad B_l = \frac{\omega_l^2}{r_l^2} \left[ f^2 + \left( \frac{df}{d\theta} \right)^2 \right].$$

Зауважимо, що згідно оцінок [3] область збіжності функціонального ряду (7) визначається через значення величин  $A_l, B_l$  залежно від геометричних параметрів рівнянь (1) щодо умов застосування МЗФГ.

Якщо вектор зовнішніх зусиль у вигляді (3) спроекувати на координатні осі

$$\bar{\tau}_l \cdot \bar{e}_r = \pm |\tau_l| \bar{e}_{nl} \cdot \bar{e}_r = \pm |\tau_l| n_{rl} = \tau_{rl}, \quad \bar{\tau}_l \cdot \bar{e}_\theta = \pm |\tau_l| \bar{e}_{nl} \cdot \bar{e}_\theta = \pm |\tau_l| n_{\theta l} = \tau_{\theta l}, \quad (8)$$

то на основі виразів (8) його компоненти можна отримати у вигляді рядів за степенями  $\varepsilon$

$$\tau_{rl} = \pm |\tau_l| \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \left[ \gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right], \quad \tau_{\theta l} = \pm |\tau_l| \left[ -\frac{\omega_l}{r_l} \frac{df(\theta)}{d\theta} \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \gamma_{v-1,l} \right], \quad (9)$$

Тоді на основі (3) і розкладів (8), (9) у довільному наближенні граничні умови отримаємо у вигляді ( $j = r, \theta$ )

$$\left\{ \sigma_{rj,k}^{(n)} + \sum_{s=1}^n \left[ D_{1l}^{(s)} \sigma_{rj,k}^{(n-s)} + D_{2l}^{(s)} \sigma_{\theta j,k}^{(n-s)} \right] \right\} \Big|_{r=r_l} = \tau_{jl}^{(n)}, \quad (10)$$

$$n \geq 1, l = 0 \sim r = 1; l = 4 \sim r = r_4.$$

Тут  $D_{1l}^{(s)}, D_{2l}^{(s)}$  – диференціальні оператори визначаються для кожної із граничних поверхонь (1) через функцію  $f(\theta)$  і у довільному наближенні для осесиметричних задач мають вигляд

$$L_l^{(s)} = \frac{\omega_l^s f^s}{s!} \frac{\partial}{\partial r^s}, \quad D_{1l}^{(s)} = \sum_{k=0}^s \left( \gamma_{v,l} + \frac{\omega_l f(\theta)}{r_l} \gamma_{v-1,l} \right) L_l^{(s-k)}, \quad D_{2l}^{(s)} = -\frac{\omega_l}{r_l} \frac{df}{d\theta} \sum_{k=1}^s \gamma_{k-1,l} L_l^{(s-k)}. \quad (11)$$

Для розв'язку поставленої вище задачі обмежимося першими трьома наближеннями. Тоді згідно з [3] вирази для переміщень і напружень відповідно мають вигляд ( $t = r, \theta; m = r, \theta, \alpha$ )

$$u_{t,k} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n u_{t,k}^{(n)} + O(\varepsilon^3), \quad \sigma_{mt,k} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \sigma_{mt,k}^{(n)} + O(\varepsilon^3) \quad (12)$$

і на неканонічних граничних поверхнях  $S_0$  і  $S_4$  та контактних поверхнях  $S_l$

$$(u_{t,k}, \sigma_{mt,k})_{S_l} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \sum_{s=0}^n \frac{\omega_l^s f^s(\theta)}{s!} \left[ \frac{\partial^s}{\partial r^s} (u_{t,k}^{(n-s)}, \sigma_{mt,k}^{(n-s)}) \right] \Big|_{r=r_l} + O(\varepsilon^3) \quad (13)$$

при  $r = 1, r = r_l$  ( $r_l > 1; l = 0, 4$ ).

Згідно (7) у перших трьох наближень отримаємо розклади за степенями  $\varepsilon$  напрямних косинусів  $n_{4r}, n_{l\theta}$  для нормалі  $\bar{e}_{4n}$  зовнішньої поверхні  $S_4$

$$n_{r4} = \cos(\bar{e}_{n4}, \bar{e}_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad n_{\theta 4} = \cos(\bar{e}_{n4}, \bar{e}_\theta) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (14)$$

де

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{\omega_1^2}{2r_1^2} \left[ \frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{\omega_1}{r_1} \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad \beta_2 = \frac{\omega_1^2}{r_1^2} f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}.$$

Вирази напрямних косинусів  $n_{r0}, n_{\theta 0}$  одиничної нормалі  $\bar{e}_{0n}$  для внутрішньої поверхні  $S_0$  отримаємо із (14) при значенні  $r_1 = 1$ , тобто

$$n_{r0} = -\cos(\bar{e}_{n0}, \bar{e}_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad n_{\theta 0} = -\cos(\bar{e}_{n0}, \bar{e}_\theta) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (15)$$

де

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\omega_0^2}{2} \left[ \frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \omega_0 \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad \beta_2 = -\omega_0^2 f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}.$$

Згідно умов (9) вважаємо, що шарові товстостінні ізотропні оболонки виду I—VIII знаходяться під дією внутрішнього  $\bar{\tau}_0$  і зовнішнього  $\bar{\tau}_1$  тиску

$$\bar{\tau}_0|_{S_0} = -\sigma_0 \bar{e}_{n0}; \quad \bar{\tau}_1|_{S_4} = -\sigma_1 \bar{e}_{n4}, \quad (16)$$

де  $\sigma_0, \sigma_1$  - величини інтенсивності.

Тоді згідно (14)-(16) представимо розклад проєкцій зусиль на зовнішній поверхні в ряди по степенях  $\varepsilon$  у вигляді

$$F_{4r} = F_{4r}^{(0)} + \varepsilon F_{4r}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{4r}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad F_{4\theta} = F_{4\theta}^{(0)} + \varepsilon F_{4\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{4\theta}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (17)$$

де

$$F_{4r}^{(0)} = -\sigma_1, \quad F_{4r}^{(1)} = 0, \quad F_{4r}^{(2)} = \frac{\omega_1^2 \sigma_1}{2r_4^2} \left[ \frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2;$$

на внутрішній поверхні

$$F_{0r} = F_{0r}^{(0)} + \varepsilon F_{0r}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{0r}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad F_{0\theta} = F_{0\theta}^{(0)} + \varepsilon F_{0\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{0\theta}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (18)$$

де

$$F_{0r}^{(0)} = \sigma_0, \quad F_{0r}^{(1)} = 0, \quad F_{0r}^{(2)} = -\frac{\omega_0^2 \sigma_0}{2} \left[ \frac{df(\theta)}{d\theta} \right]^2;$$

$$F_{0\theta}^{(0)} = 0, \quad F_{0\theta}^{(1)} = -\omega_0 \sigma_0 \frac{df(\theta)}{d\theta}, \quad F_{0\theta}^{(2)} = \omega_0^2 \sigma_0 f(\theta) \frac{df(\theta)}{d\theta}.$$

Таким чином, на основі співвідношень (10), (11), (14) і розкладів у ряди (15), (16) і (17), (18) у перших трьох наближеннях граничні умови на поверхнях оболонок різної форми (табл. 1; варіанти I–VIII) отримуємо для напружень на зовнішній поверхні у наступному вигляді:

$$\sigma_{rr,3}^{(0)}|_{r=r_4} = -\sigma_1; \quad \sigma_{rr,3}^{(1)}|_{r=r_4} = -[D_{11}^{(1)} \sigma_{rr,3}^{(0)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{r\theta,3}^{(0)}]_{r=r_4} + F_{1r}^{(1)};$$

$$\sigma_{r\theta,3}^{(1)}|_{r=r_4} = -[D_{11}^{(1)} \sigma_{r\theta,3}^{(0)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{\theta\theta,3}^{(0)}]_{r=r_4} + F_{1\theta}^{(1)};$$

$$\sigma_{rr,3}^{(2)}|_{r=r_4} = -[(D_{11}^{(1)} \sigma_{rr,3}^{(1)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{r\theta,3}^{(1)}) + D_{11}^{(2)} \sigma_{rr,3}^{(0)} + D_{21}^{(2)} \sigma_{r\theta,3}^{(0)}]_{r=r_4} + F_{1r}^{(2)};$$

$$\sigma_{r\theta,3}^{(2)}|_{r=r_4} = -[(D_{11}^{(1)} \sigma_{r\theta,3}^{(1)} + D_{21}^{(1)} \sigma_{\theta\theta,3}^{(1)}) + D_{11}^{(2)} \sigma_{r\theta,3}^{(0)} + D_{21}^{(2)} \sigma_{\theta\theta,3}^{(0)}]_{r=r_4} + F_{1\theta}^{(2)}; \quad (19)$$

на внутрішній поверхні

$$\sigma_{rr,1}^{(0)}|_{r=1} = \sigma_0; \quad \sigma_{r\theta,1}^{(0)}|_{r=1} = 0; \quad \sigma_{rr,1}^{(1)}|_{r=1} = -[D_{10}^{(1)} \sigma_{rr,1}^{(0)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{r\theta,1}^{(0)}]_{r=1} + F_{0r}^{(1)};$$

$$\sigma_{r\theta,1}^{(1)}|_{r=1} = -[D_{10}^{(1)} \sigma_{r\theta,1}^{(0)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{\theta\theta,1}^{(0)}]_{r=1} + F_{0\theta}^{(1)}; \quad (20)$$

$$\sigma_{rr,1}^{(2)}|_{r=1} = -[(D_{10}^{(1)} \sigma_{rr,1}^{(1)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{r\theta,1}^{(1)}) + D_{10}^{(2)} \sigma_{rr,1}^{(0)} + D_{20}^{(2)} \sigma_{r\theta,1}^{(0)}]_{r=1} + F_{0r}^{(2)};$$

$$\sigma_{r\theta,1}^{(2)}|_{r=1} = -[(D_{10}^{(1)} \sigma_{r\theta,1}^{(1)} + D_{20}^{(1)} \sigma_{\theta\theta,1}^{(1)}) + D_{10}^{(2)} \sigma_{r\theta,1}^{(0)} + D_{20}^{(2)} \sigma_{\theta\theta,1}^{(0)}]_{r=1} + F_{0\theta}^{(2)}.$$

Тут  $D_{1l}^{(s)}, D_{2l}^{(s)}$  ( $s=1,2; l=0,4$ ) – диференціальні оператори, які у перших трьох наближеннях мають вигляд

$$D_{1l}^{(0)} = 1; \quad D_{2l}^{(0)} \equiv 0 \quad (r_0 \equiv 1; r_4); \quad D_{1l}^{(1)} = \omega_l f(\theta) \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_{2l}^{(1)} = -\frac{\omega_l}{r_l} f'(\theta);$$

$$D_{2l}^{(2)} = \frac{\omega_l^2}{r_l} f(\theta) f'(\theta) \left( \frac{1}{r_l} - \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad f'(\theta) = \frac{df}{d\theta}. \quad (21)$$

Отже, параметрична форма представлення рівнянь поверхонь (1) і диференціальних операторів (21), коефіцієнтів розкладу зовнішніх зусиль у ряди за  $\varepsilon$  дозволило у перших трьох наближеннях отримати граничні умови та розробити загальний алгоритм розрахунку НДС ряду

ізотропних оболонок із складною геометричною формою поверхонь, що знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску.

За вихідне нульове наближення  $\sigma_{mn,k}^{(0)}$  береться точний розв'язок відповідної граничної задачі для порожнинної сфери. Згідно умов (19), (20) розв'язок задачі у першому і другому наближенні зводиться до розв'язку послідовності просторових задач для шаруватой порожнинної сфери. При цьому для побудови граничних умов у кожному із наступних наближень використовуємо розв'язки, які отримані у попередніх наближеннях. По аналогії з нульовим зберігається аналітична структура розв'язків у вищих наближеннях, які автоматично задовільняють рівнянням рівноваги. Це дозволяє ефективно застосувати МЗФГ при визначенні НДС товстих неканонічних оболонок шаруватой структури у випадках коли відповідні просторові граничні задачі допускають у сферичних координатах точні аналітичні розв'язки у нульовому наближенні для ізотропного і трансверсально ізотропного матеріалу [2].

## 2. Загальні розв'язки рівнянь рівноваги у вищих наближеннях

Зазначемо, що основна перевага варіантів МЗФГ [1,3] у розв'язку задач пружності для тіл з неканонічними поверхнями над іншими наближеними аналітичними методами полягає у збереженні вигляду структури рівнянь рівноваги при побудові розв'язків від попередніх до наступних наближень.

Вважаємо, що матеріал кожного із шарів має ізотропні властивості. Для осесиметричних задач у випадку ізотропних оболонок з осовою симетрією поверхонь відносно осі  $z$  під дією осесиметричних сил у довільному наближенні компоненти НДС згідно [2] запишемо у формі Папковича-Нейбера для компонент вектора переміщень  $u_{r,l}^{(j)}$ ,  $u_{\theta,l}^{(j)}$  ( $u_{\alpha,l}^{(j)} \equiv 0$ ),

$$u_{r,l}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{1n,l}^{(j)} n \left(\frac{r}{r_l}\right)^{n-1} - (n+1)A_{2n,l}^{(j)} r^{-n-2} - (n+1)(2-n-4\nu_l) A_{3n,l}^{(j)} \left(\frac{r}{r_l}\right)^{n+1} + n(3+n-4\nu_l) A_{4n,l}^{(j)} r^{-n}] P_n(p), \quad (22)$$

$$u_{\theta,l}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n,l}^{(j)} \left(\frac{r}{r_l}\right)^{n-1} + A_{2n,l}^{(j)} r^{-n-2} + (5+n-4\nu_l) + A_{3n,l}^{(j)} \left(\frac{r}{r_l}\right)^{n+1} + (4-n-4\nu_l) A_{4n,l}^{(j)} r^{-n}] \frac{dP_n(p)}{d\theta}.$$

Компоненти тензора напружень визначаються згідно закону Гука, наприклад

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,l}^{(j)} &= 2G_l \sum_{n=0}^{\infty} [A_{1n,l}^{(j)} n(n-1) \left(\frac{r}{r_l}\right)^{n-2} + A_{2n,l}^{(j)} (n+1)(n+2) r^{-(n+3)} + \\ &+ A_{3n,l}^{(j)} (n+1)(n^2-n-2-2\nu_l) \left(\frac{r}{r_l}\right)^n - A_{4n,l}^{(j)} n(n^2+3n-2\nu_l) r^{-n-1}] P_n(p), \\ \left(\sigma_{\theta\theta,l}^{(j)}\right) &= 2G_l \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ A_{1n,l}^{(j)} \left(\frac{-n^2}{n}\right) \left(\frac{r}{r_l}\right)^{n-2} - A_{2n,l}^{(j)} \left(\frac{(n+1)^2}{n+1}\right) r^{-(n+3)} - A_{3n,l}^{(j)} (n+1) \left(\frac{n^2+4n+2+2\nu_l}{-n+2+2\nu_l+2\nu_l}\right) \left(\frac{r}{r_l}\right)^n + \right. \right. \\ &+ A_{4n,l}^{(j)} n \left(\frac{n^2-2n+2\nu_l-1}{n+3-4\nu_l-2\nu_l}\right) r^{-(n+1)} \left. \right] P_n(p) \mp \left[ A_{1n,l}^{(j)} \left(\frac{r}{r_l}\right)^{n-2} + A_{2n,l}^{(j)} r^{-(n+3)} + A_{3n,l}^{(j)} (n+5-4\nu_l) r \left(\frac{r}{r_l}\right)^n + \right. \\ &\left. + A_{4n,l}^{(j)} (-n+4-4\nu_l) r^{-n-1} \right] \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(p)}{d\theta} \Big\}, \quad p = \cos \theta, \end{aligned}$$

де  $\nu_l, G_l$  – коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву  $l$ -го шару;  $P_n(p)$  – поліном Лежандра  $n$ -го порядку;  $A_{1n,l}^{(j)}, \dots, A_{4n,l}^{(j)}$  – невідомі, постійні, що визначаються із умов на граничних (18), (19) і контактних поверхнях.

Якщо припустити, що між шарами оболонки здійснюється повне зчеплення, то ідеальному контакту на поверхнях  $S_2$  і  $S_3$  відповідають ( $l = 1, 2, 3$ ) умови

$$\sigma_{rr,l}^{(j)}|_{S_{l+1}} = \sigma_{rr,l+1}^{(j)}|_{S_{l+1}}; \quad u_{r,l}^{(j)}|_{S_{l+1}} = u_{r,l+1}^{(j)}|_{S_{l+1}}; \quad \sigma_{r\theta,l}^{(j)}|_{S_{l+1}} = \sigma_{r\theta,l+1}^{(j)}|_{S_{l+1}}. \quad (23)$$

Якщо між шарами оболонки здійснюється неідеальне зчеплення (проковзування), то умовам контакту на поверхнях  $S_2$  і  $S_3$  відповідають ( $l = 1, 2$ )

$$\sigma_{rr,l}^{(j)}|_{S_{l+1}} = \sigma_{rr,l+1}^{(j)}|_{S_{l+1}}; \quad u_{r,l}^{(j)}|_{S_{l+1}} = u_{r,l+1}^{(j)}|_{S_{l+1}}; \quad \sigma_{r\theta,l}^{(j)}|_{S_{l+1}} = 0; \quad \sigma_{r\theta,l+1}^{(j)}|_{S_{l+1}} = 0. \quad (24)$$

Переміщення і напруження  $u_{t,l}, \sigma_{rt,l}$  шукаємо у вигляді рядів (12) за степеням малого параметра  $\varepsilon$ , а в околі  $r = r_i$  і на границях поверхонь розділу  $S_l$  визначаються рядами Тейлора (13).

Напрявні косинуси  $n_{r,l}, n_{\theta,l}$  для кожної із поверхонь  $S_l$  повністю визначаються формулами (7).

Граничні умови для оболонок обертання з ідеальним контактом шарів в  $n$ -м наближенні на основі (23) згідно (7), (10) будуть

$$\sigma_{rt,1}^{(n)}|_{r=r_1} = -\sum_{k=0}^{n-1} [D_{11}^{(k)} \sigma_{rt,1}^{(n-k)} + D_{21}^{(k)} \sigma_{\theta t,1}^{(n-k)}]|_{r=r_1} + F_{t,1}^{(n)}|_{r=r_1}, \quad (25)$$

$$\sigma_{rt,4}^{(n)}|_{r=r_4} = -\sum_{k=0}^{n-1} [D_{14}^{(k)} \sigma_{rt,3}^{(n-k)} + D_{24}^{(k)} \sigma_{\theta t,1}^{(n-k)}]|_{r=r_4} + F_{t,4}^{(n)}|_{r=r_4}, \quad t = r, \theta; \quad l = 1, 2.$$

$$(\sigma_{rt,l}^{(n)} - \sigma_{rt,l+1}^{(n)})|_{r=r_{l+1}} = -\sum_{k=0}^{n-1} [D_{l1}^{(k)} (\sigma_{rt,l}^{(n-k)} - \sigma_{rt,l+1}^{(n-k)}) + D_{2l}^{(k)} (\sigma_{\theta t,l}^{(n-k)} - \sigma_{\theta t,l+1}^{(n-k)})]|_{r=r_{l+1}}. \quad (26)$$

У випадку неідеального контакту між шарами оболонки граничні умови в  $n$ -му наближенні на основі (23) згідно (7), (10) будуть

$$\begin{aligned} (\sigma_{rt,3}^{(n)} - \sigma_{rr,i+1}^{(n)})|_{r=r_{i+1}} &= -\sum_{s=0}^{n-1} [D_{li+1}^{(n-s)} (\sigma_{rr,i}^{(s)} - \sigma_{rr,i+1}^{(s)}) + D_{2i+1}^{(n-s)} (\sigma_{r\theta,i}^{(s)} - \sigma_{r\theta,i+1}^{(s)})]|_{r=r_{i+1}}; \\ (u_{r,i}^{(n)} - u_{r,i+1}^{(n)})|_{r=r_{i+1}} &= -\sum_{s=0}^{n-1} [L_{i+1}^{(n-s)} (u_{r,i}^{(s)} - u_{r,i+1}^{(s)})]|_{r=r_{i+1}}; \\ (\sigma_{r\theta,i}^{(n)})|_{r=r_{i+1}} &= -\sum_{s=0}^{n-1} [D_{li+1}^{(n-s)} \sigma_{r\theta,i}^{(s)} + D_{2i+1}^{(n-s)} \sigma_{\theta\theta,i}^{(s)}]|_{r=r_{i+1}}; \\ (\sigma_{r\theta,i+1}^{(n)})|_{r=r_{i+1}} &= -\sum_{s=0}^{n-1} [D_{li+1}^{(n-s)} \sigma_{r\theta,i+1}^{(s)} + D_{2i+1}^{(n-s)} \sigma_{\theta\theta,i+1}^{(s)}]|_{r=r_{i+1}}. \end{aligned} \quad (27)$$

У кожному з наближень щодо невідомих  $A_{1n,l}^{(j)}, \dots, A_{4n,l}^{(j)}$  отримуємо системи алгебраїчних рівнянь 12-го порядку. Кількість таких систем залежить від номера наближення. Розроблено і реалізовано на ПЕОМ числовий алгоритм для розрахунку переміщень і напружень у тришаровій оболонці з неканонічними граничними і контактними поверхнями. Переміщення  $u_{t,i}|_{S_{i^*}}$  і напруження  $\sigma_{tj,i}|_{S_{i^*}}$  визначалися за формулами (12) або (12)' з точністю до  $O(\varepsilon^3)$ . При цьому  $S_{i^*}$  – поверхні рівня, які визначаються рівняннями  $r = r_{i^*} + \omega_i \varepsilon f_i(\theta)$  ( $r_i \leq r_{i^*} \leq r_{i+1}$ ). Для визначення переміщень і напружень на площадках  $S_l$  для яких нормаль  $\vec{e}_{n,l}$  не збігається з напрямом нормалі відповідної сферичної поверхні, необхідно скористатись виразами

$$\begin{aligned} u_{n,l} &= u_{r,l} n_{r,l} + u_{\theta,l} n_{\theta,l}; \quad u_{s,l} = -u_{r,l} n_{\theta,l} + n_{r,l} u_{\theta,l}; \\ \sigma_{nn,l} &= \sigma_{rr,l} n_{r,l}^2 + \sigma_{\theta\theta,l} n_{\theta,l}^2 + 2\sigma_{r\theta,l} n_{r,l} n_{\theta,l}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ss,l} &= \sigma_{\theta\theta,l} n_{r,l}^2 + \sigma_{rr,l} n_{\theta,l}^2 - 2\sigma_{r\theta,l} n_{r,l} n_{\theta,l}; \\ \sigma_{ns,l} &= (\sigma_{\theta\theta,l} - \sigma_{rr,l}) n_{r,l} n_{\theta,l} + \sigma_{r\theta,l} (n_{r,l}^2 - n_{\theta,l}^2), \end{aligned} \quad (28)$$

де на неканонічних поверхнях складові для переміщень і напружень у правих частинах (28) визначаються за формулами (13). При цьому нормалі  $n$  відповідають дотичні в її основи вектори  $\tau$  та  $s$ .

При числових розрахунках НДС неканонічних тіл безпосередньо отримуємо широкий діапазон зміни величин елементів (коефіцієнтів) матриць при невідомих алгебраїчних систем, отриманими із граничних умов (19), (20) згідно виразів для переміщень (23) і напружень (24). Зокрема, одна група величин елементів типу  $r^{v_{ni}+1/2}$  при  $v_{ni} > 0$  прямує до  $\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , а інша для  $v_{ni} < 0$  при  $n \rightarrow \infty$  до 0.

### 3. Числові розрахунки НДС тришарових неканонічних товстостінних оболонок під дією внутрішнього і зовнішнього тиску

Для розрахунків розглянуто оболонки в яких неканонічні граничні і контактні поверхні  $S_i$  задано рівняннями  $r = r_i + \omega_i \varepsilon_i \cos k\theta$ . Геометричні  $\omega_i = 1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ );  $\varepsilon_i = 0, 1$  і механічні параметри в розрахунках приймалися наступними:

$$G_3 / G_1 = 1; G_3 / G_2 = 5; r_2 = 1, 1;$$

$$r_3 = 2, 1; r_4 = 2, 2; k = 4.$$

Вплив на НДС умов неідеального контакту між шарами оболонки під зовнішнім постійним тиском  $q(\theta) = \tau$  (інтенсивність навантаження) і змінним тиском  $q(\theta) = \tau \cos 2\theta$  досліджено на основі розрахунків в яких коефіцієнти Пуассона шарів приймалися рівними  $\nu_i = 0,3$ . Товщина заповнювача приймалась більшою за товщину несучих шарів із модулем зсуву меншим.

На рис. 2 показано зміну напружень по товщині заповнювача у випадку постійного зовнішнього тиску  $q(\theta) = \tau$  при  $\theta = \pi / 4, k = 4$ . При такому тиску розподіл напружень у шаруватих сферичних оболонках ( $k = 0$ ) при ідеальному і неідеальному контактах шарів аналогічні (штрихпунктирні лінії). Суцільні лінії на рис. 2–4 відповідають випадку ідеального контакту (повне зчеплення), а штрихові – неідеальному (проковзування) без відшарування.

Зміну напружень на поверхнях  $S_3, S_4$  залежно від кривизни  $K^*$  при попередніх геометричних і механічних характеристиках шарів і зовнішніх  $q(\theta) = \tau \cos 2\theta$  і  $q(\theta) = \tau$  навантаженнях відповідно показано на рис. 2, 4 при  $\theta = 0$ . При

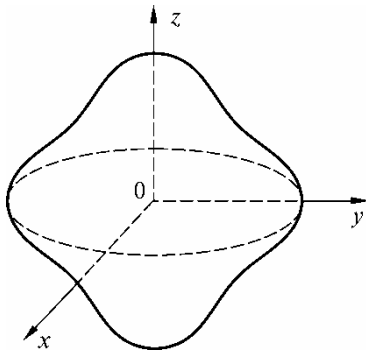


Рис. 1 ( $k = 4$ )

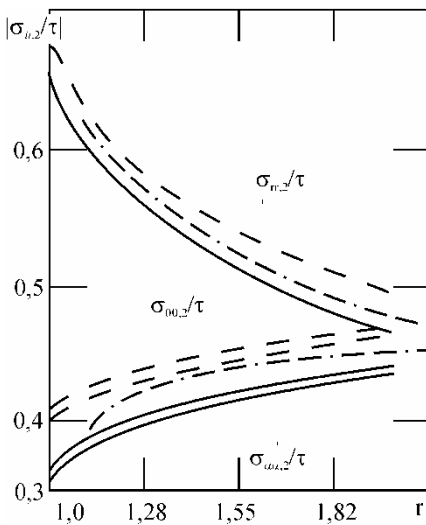


Рис. 2

цьому  $K^*$  визначалася за формулою

$$K^* = [r^2(\theta) + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)] / [r^2(\theta) + (r'(\theta))^2]^{-3/2}.$$

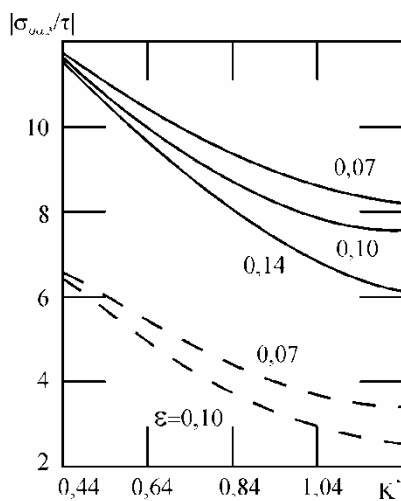


Рис. 3

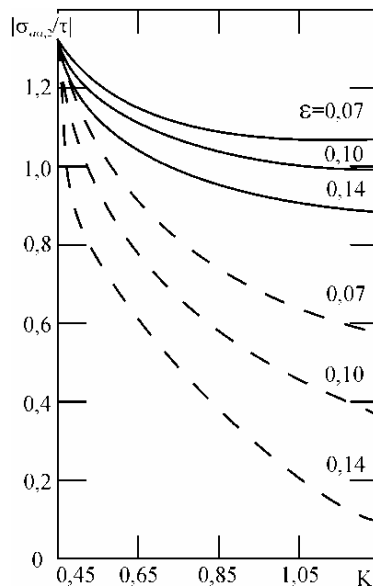


Рис. 4

Значення радіуса кривизни  $\rho^* = 1 / K^*$  поверхні від кривизни  $K^*$  приведено у табл. 2.

Таблиця 2

Значення кривизни поверхонь шарової оболонки

Рівняння поверхні		$k$			
		0	2	4	6
$S_3 \sim r = 2,1 + 0,1 \cos k\theta$	$K^*$	0,44	0,64	0,84	1,04
	$\rho^*$	2,27	1,56	1,19	0,96

Аналіз графіків на рис. 2– 4 показує, що збільшення кривизни  $K^*$  (табл.2) при зростанні частоти  $k$  осциляції випуклої неканонічної форми поверхні оболонок у полюсі  $\theta = 0$  приводить до зменшення величини напружень.

Відмітимо, значенню параметра при  $k = 4$  відповідає зовнішня поверхня шарової оболонки, яка показано на рис. 1.

Як видно із наведених результатів, вплив неідеального контакту проявляється при нерівномірному навантаженні. При рівномірному навантаженні  $q(\theta) = \tau$  значна відмінність від результатів у випадку ідеального контакту виявляється тільки із збільшенням відхилення неканонічної поверхні від сферичної.

**Висновок**

У даній статті на основі методу збурення форми границі (другий варіант) і параметричного представлення рівнянь неканонічних поверхонь для шарових товстих оболонок з граничними і контактними, близькими до сферичних, приведено вирази диференціальних операторів для побудови у довільному наближенні граничних умов. З врахуванням перших трьох наближень приведено загальний алгоритм розрахунку НДС ізотропних шарових оболонок із складною геометричною формою поверхонь, що знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску. Показано вплив неканонічної форми поверхонь з ідеальним і неідеальним контактом між шарами в залежності від виду навантажень оболонок на перерозподіл напружень порівняно з оболонками з сферичною формою поверхонь.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гузь А.Н., Неміш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Вища шк., 1989. – 352 с.
2. *Неміш Ю.Н., Неміш В.Н.* К решению пространственных задач теории упругости трансверсально-изотропной среды для неканонических областей. – Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 76–82.
3. *Неміш Ю.Н.* Элементы механики кусочно- однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. – К.: Наук. думка, 1989. – 312 с.

## REFERENCES

1. *Guz' A.N. and Yu. N. Nemish.* Metod vozmuzhenia formy hranica v mekhanike sploshnoi sredi (Boundary-Shape Perturbation Method in Continuum Mechanics [in Russian]) // Vyscha Shkola, Kiev, 1989. – 352 p.
2. *Nemish Ju.N., Nemish V.N.* K resheniju prostranstvennix zadach teorii pruzhnosti transversalno-isotropnoy sredi dla nekanonshni oblasti (Contribution on the Solution of the Elasticity Theory of a Transversally Isotropic Medium for Noncanonical Regions). // – Prikladna mekhanika. – 1976. – 12, N 12, p.76-82.
3. *Nemish. Yu. N.* Elements of Mechanics of of Piece-Wise Homogeneous Bodies with Non- Canonical Interfaces. – Kyiv: Naukova Dumka 1989 – 312 p.

Стаття надійшла 02.09.2023

*Nemish B.N., Chernopiskii D.I.*

**THE INFLUENCE OF NONCANONICAL FORM OF BOUNDARY AND CONTACT SURFACES CLOSE TO SPHERICAL, ON THE STRESS STATE OF THICK SHELLS OF ROTATION UNDER PRESSURE**

On the basis of the general solution of the equilibrium equations for an isotropic medium in a spherical coordinate system within the framework of the second variant of the method of perturbation of the shape of the boundary (MZFG), it is obtained taking into account the first three approximations of the solution of the problem of the stress-strain state (SST) of thick layered shells of rotation, limited surfaces with a small amplitude of deviation from spherical ones. According to the analytical solutions, numerical data were obtained, which made it possible to analyze the stress-strain state of the shells under the action of constant or variable axisymmetric (internal and external) pressure. Depending on the geometric parameters of the equations of the non-canonical surfaces of the shells, the effect of the conditions of ideal and non-ideal contact between the layers on the redistribution of stresses is shown compared to the case of a spherical shell with a layered structure (canonical form – zero approximation).

**Key words:** thick layered spherical-like noncanonical shells close to spherical, constant and variable pressure.

UDC 539.3

*Неміш В.М., Чернопиский Д.Г.* Вплив неканонічної форми граничних і контактних поверхонь, близьких до сферичних, на напружений стан товстих оболонок обертання під дією тиску // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 111. – С. 214-222.

*Методом збурення форми границі з врахуванням перших трьох наближень отримано аналітичні розв'язки задачі для дослідження напружено-деформованого стану товстих неканонічних шарових оболонок під дією внутрішнього і зовнішнього тиску при ідеальному і неідеальному контакті шарів.*

Табл. 2. Іл. 4. Бібліогр. 3 назв.

UDC 539.3

*Nemish V.N., Chernopiskii D.I.* **The influence of noncanonical form of boundary and contact surfaces close to spherical, on the stress state of thick shells of rotation under pressure** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles - K.: KNUBA, 2023. – Issue 111. - P. 214-222.

*The method of perturbing the shape of the boundary, taking into account the first three approximations, provides analytic solutions to the problem for studying the stress-deformed state of thick non-canonical shells under the influence of internal and external pressure.*

Tabl. 2. Fig. 4. Ref. 3.

**Автори (вчена ступень, вчене звання, посада):**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, Західноукраїнський національний університет, НЕМІШ Василь Миколайович

**E-mail:** nemish\_vm@ukr.net

доктор технічних наук, науковий співробітник Івано-Франківського національно-технічного університету нафти і газу ЧОРНОПИСЬКИЙ Дмитро Гнатович

**E-mail:** info@ndumka.kiev.ua