

UDC 539.3

## COMPUTER SIMULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF PLATES WITH REINFORCED ELONGATE RECTANGULAR HOLES OF VARIOUS ORIENTATIONS

**E.L. Hart<sup>1</sup>,**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**V.S. Hudramovich<sup>2</sup>,**

Doctor of Technical Science, Professor

<sup>1</sup>*Oles Honchar Dnipro National University,  
Gagarin Ave., 72, Dnipro, 49010, Ukraine*<sup>2</sup>*Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
and the State Space Agency of Ukraine,  
Leshko-Popel st., 15, Dnipro, 49005, Ukraine*

DOI: 10.32347/2410-2547.2022.108.77-86

The results of numerical investigation of the stress-strain state of elastic rectangular plates with reinforced elongated holes under the action of axisymmetric tensile forces are presented. The holes have different orientations relative to the direction of forces, the materials of the plate and reinforcements are different too. Computer modeling was carried out using the finite element method. The influence of mechanical and geometrical parameters of plates and reinforcements, orientation of holes (angle of rotation relative to the direction of action of forces) on the stress-strain state of the plate are studied. The dependence of the change in the stress concentration factor in the plate on the orientation of the hole, the ratio of the elastic modulus of the plate materials and reinforcements (the elastic modulus of the reinforcement material is 3 times greater (or less) than the elastic modulus of the plate material) has been established. Plates with holes located at angles of 60°, 45° and 30° in the direction of the load are modeled. It is shown that a good choice of geometric and stiffness characteristics of the parameters of reinforcement, plate and elongate hole orientation can significantly reduce the stress concentration in the plate. Patterns of stress intensity distribution in the plate sections passing along one of the hole sides and stress concentration in the vicinity of the corner points of the holes are constructed. The results obtained in this work can be used to solve the problems of optimization of thin-walled rectangular plates with elongated holes, having strip reinforcement along the edges.

**Keywords:** plate, elongated hole, reinforcement, stress-strain state, stress concentration factor, finite element method.

**Introduction.** The problems of deformation of mechanical systems with various inhomogeneities – structural, technological, or operational (holes, cavities, cracks, inclusions, etc.) are components of a wide class of problems in the mechanics of thin-walled structures. The presence of discontinuities, geometric imperfections (pores, cracks) and various inclusions has a significant impact on the processes of deformation and destruction of solids and structures [1–9].

The study of the effect of holes, particularly reinforced, on the stress-strain state was begun by S.P. Timoshenko and al. [1–3], who reduced the problem of determining the stresses at the hole to the problem of finding the stresses in a curved beam that is loaded along the outer contour. There are also significant

achievements in this area associated with the researches of domestic scientists [10–14].

For the tasks of studying inclusions of the canonical form, it is possible to use analytical methods. But in the case of bodies of complex shape, the presence of inclusions of various configurations and orientations, the use of analytical methods is most often impossible. Therefore, it is advisable to use numerical methods [15, 16].

The question of the possibility of reducing the stress concentration in the vicinity of the corner points of a rectangular plate hole due to its reinforcement with triangular overlays was studied in [6]. At the same time, a computer simulation of the deformation of the plate was carried out depending on the orientation of the hole, the mechanical properties of the material and the size of the overlays. The selection of the optimal parameters of reinforcement can reduce stress concentration.

In this work, a computer simulation of the deformation process of rectangular plates with reinforced holes of different orientations relative to the direction of the tensile force is carried out on the basis of the finite element method. The aim of the study is to identify the influence of the orientation of the holes on the decrease in the intensity of stresses and deformations in the plate.

**Problem statement.** Consider an elastic square plate of size  $a \times a$ , with a reinforced elongated rectangular hole  $b \times c$  ( $c = 3b$ ) of various orientations relative to the direction of action of a uniaxial tensile force  $q$  applied from two opposite sides of the plate (Fig. 1). We neglect the mass forces.

The study of the stress-strain state of the plate is carried out, taking into account the influence of reinforcements and the orientation of the holes. Reinforcement is modeled by inclusions located in the plane of the plate, and at the boundaries of which with the matrix there are specified conditions of rigid adhesion. Plates with holes are modeled, which are located at angles of  $60^\circ$  (Fig. 1 (a)),  $45^\circ$  (Fig. 1 (b)) and  $30^\circ$  (Fig. 1 (c)) with respect to the direction of the load. The intensity of the load is selected in such a way that the stress does not cross the elastic boundary.

**Analysis of the results obtained.** Here are the calculation results. In Fig. 2 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in a plate with a rectangular hole facing  $30^\circ$  relative to the direction of the tensile force (Fig. 1(c)).

For the purpose of a more visual representation of the results, a part of the plate is shown in an enlarged form (Fig. 2 (b)). With this hole location, the stress concentration factor (SCF) is 14.5.

In order to reduce the stress concentration in the plate, the hole was reinforced with inclusions from a different material.

In Fig. 3 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$ , in section A–B for the plate shown in Fig. 1 (e) at angle between section and direction of tensile forces  $30^\circ$  ( $E_n$  is the modulus of elasticity of the plate,  $E_e$  is the modulus of elasticity of the inclusion).

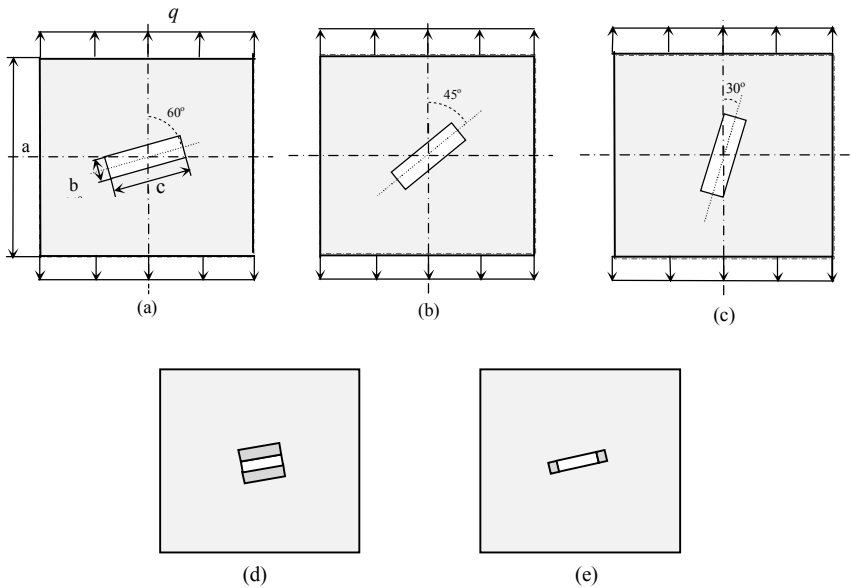


Fig. 1. Plate load diagram (a)–(c) and reinforcement options (d), (e)

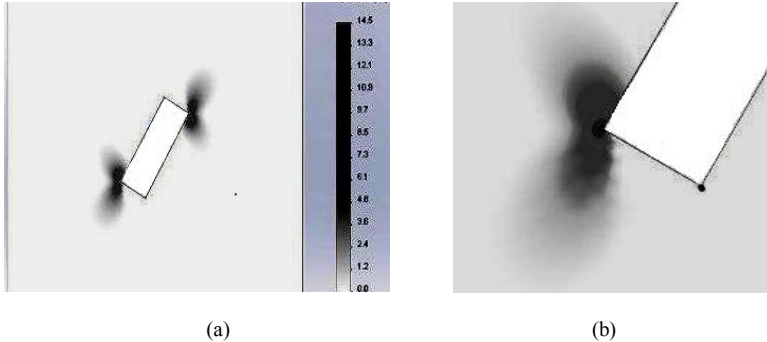


Fig. 2. Distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  for the case shown in Fig. 1 (c):  
 (a) the distribution of the relative stress intensity;  
 (b) an enlarged image of the area of stress concentration

Let us carry out a comparative analysis of the calculation results for various ratios of the elastic modulus of the plate and reinforcements.

The presence of inclusions less rigid than the base material (with the ratio of their elastic modulus  $E_n : E_0 = 3:1$ ) in the case under consideration led to a decrease in the SCF by  $\sim 49\%$ .

Consider a model of a plate with a hole located at an angle of  $45^\circ$  relative to the direction of the load (Fig. 1 (b)). In Fig. 4 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in a plate with a hole without the use of reinforcements.

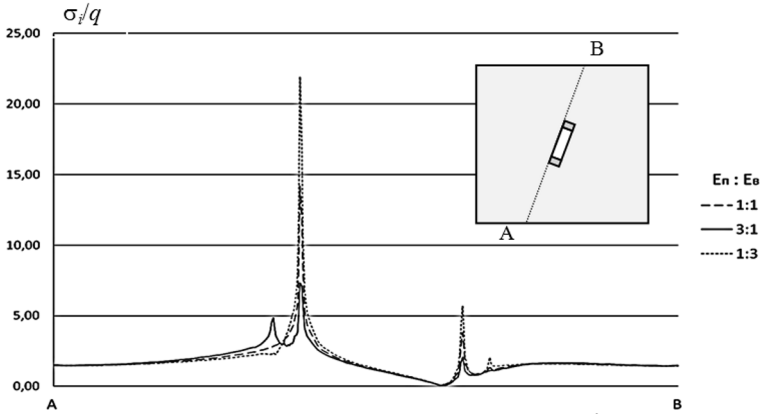


Fig. 3. Distribution of  $\sigma_i/q$  in section A–B at  $30^\circ$

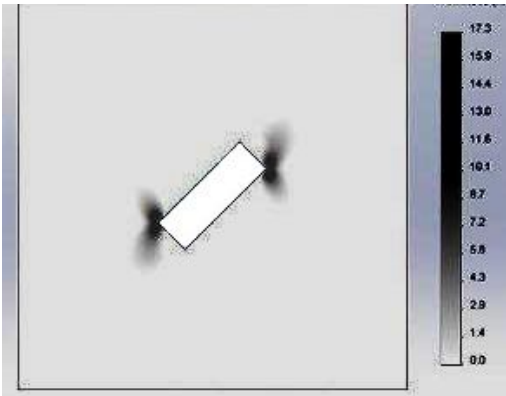


Fig. 4. Distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  for the case shown in Fig. 1 (b)

This angle of rotation of the hole increased the SCF to 17.2 in comparison with the results shown in Fig. 2.

Let us carry out a comparative analysis of the calculation results for the plate shown in Fig. 1 (e).

In Fig. 5 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in section A–B. The presence of inclusions less rigid than the base material in the case under consideration led to a decrease in the SCF by ~

52%. But with this hole arrangement, the SCF increased by ~ 20% compared to the results shown in Fig. 3.

In Fig. 6 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in a plate with a rectangular hole without reinforcement (Fig. 1 (a)). With this arrangement, the SCF is 17.2.

The values of the maximum stresses have hardly changed compared to the result shown in Fig. 4.

Let us compare the calculation results for a plate with a reinforced hole by varying the ratio of the elastic moduli of the plate and reinforcements. The plate model is shown in Fig. 1, there is.

In Fig. 7 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in the section A–B. Here, the SCF almost did not change in comparison with the case, the calculation results of which are shown in Fig. 5. The stresses near the corner points of the reinforcements decreased, but the values of the maximum stresses

did not change. The smallest stresses in the places of concentration arise when orienting the reinforced hole shown in Fig. 1 (e) at  $60^\circ$ .

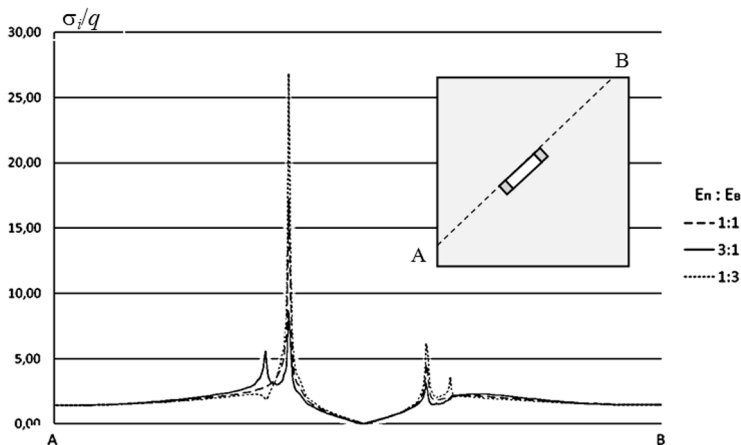


Fig. 5. Distribution of  $\sigma_i/q$  in section A–B at  $45^\circ$

Let us consider the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in section A–B for the plate model shown in Fig. 1,d at  $30^\circ$ .

In Fig. 8 it can be seen that with this orientation of the hole and the parameters of the reinforcements, the SCF is  $\sim 20\%$  less than in the case, the results of which are shown in Fig. 3. The presence of reinforcements made of other material reduced the SCF by  $\sim 57\%$ .

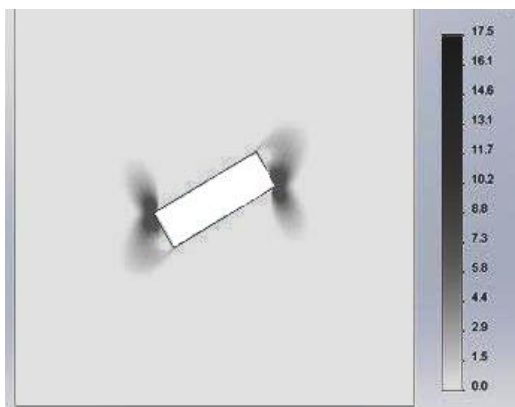
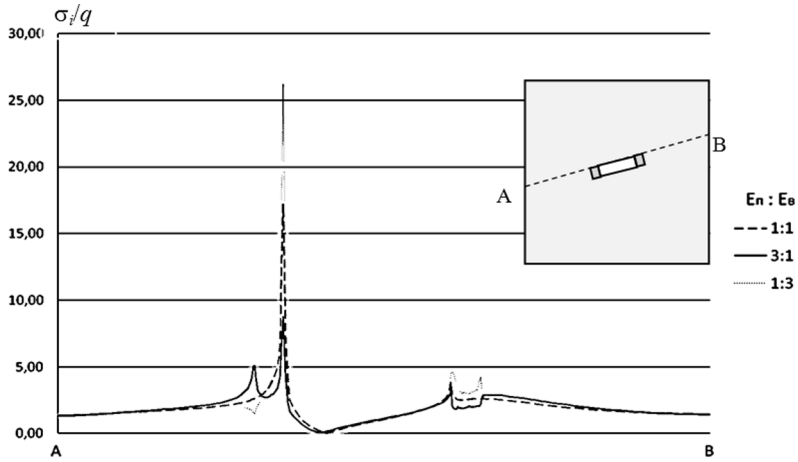
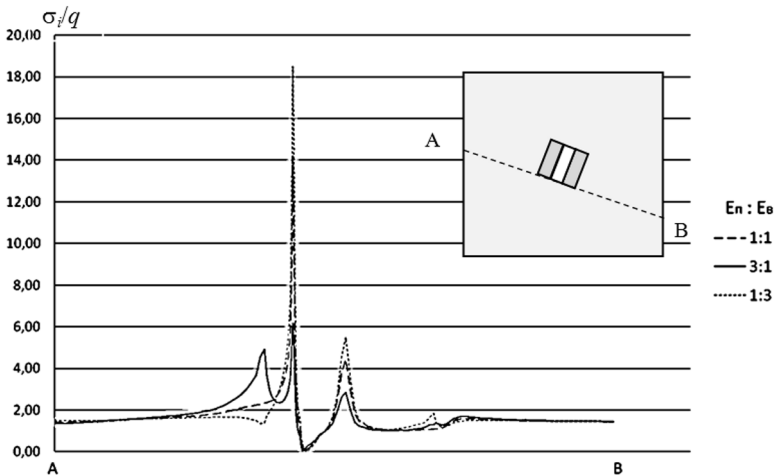


Fig. 6. Distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  for the case shown in Fig. 1 (a)

Let us compare the calculation results for the plate shown in Fig. 1 (d) at  $45^\circ$ . In Fig. 9 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in section A–B.

Comparing the results shown in Fig. 9, with the results in Fig. 8, it can be noted that the maximum stresses have increased. This may be due to the fact that the length of the hole in the direction perpendicular to the direction of the load is greater than in the case shown in Fig. 8.

Consider the calculation results for the plate shown in Fig. 1 (d) at  $60^\circ$ . In Fig. 10 shows the distribution of the relative stress intensity  $\sigma_i/q$  in section A–B.

Fig. 7. Distribution of  $\sigma_x/q$  in section A–B at  $60^\circ$ Fig. 8. Distribution of  $\sigma_x/q$  in section A–B at  $30^\circ$ 

**Conclusion.** The analysis of the influence of the orientation of the reinforced hole relative to the direction of the load action in a rectangular plate is carried out. As a result of comparing the results obtained for all considered cases, it was revealed:

- The best of the three options for the orientation of the hole relative to the direction of the load (Fig. 1 (a) – Fig. 1 (c)) from the point of view of stress reduction, we can note the option shown in Fig. 1 (c).
- Variants of the location of reinforcements, which are shown in Fig. 1 (d) gave a better result than the options shown in Fig. 1 (e).
- From the point of view of reducing stresses, the best of the considered options turned out to be the option shown in Fig. 1 (d) at  $30^\circ$ . As a result of the use of reinforcements from a less "rigid" material, the SCF decreased by  $\sim 57\%$ .

• Variants of hole orientation, which are shown in Fig. 1 (a) and in Fig. 1 (b), give almost the same results.

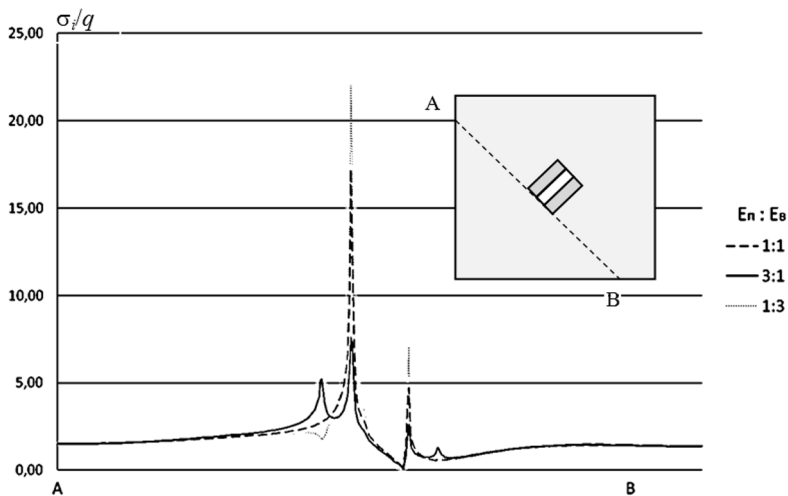


Fig. 9. Distribution of  $\sigma_i/q$  in section A–B at  $45^\circ$

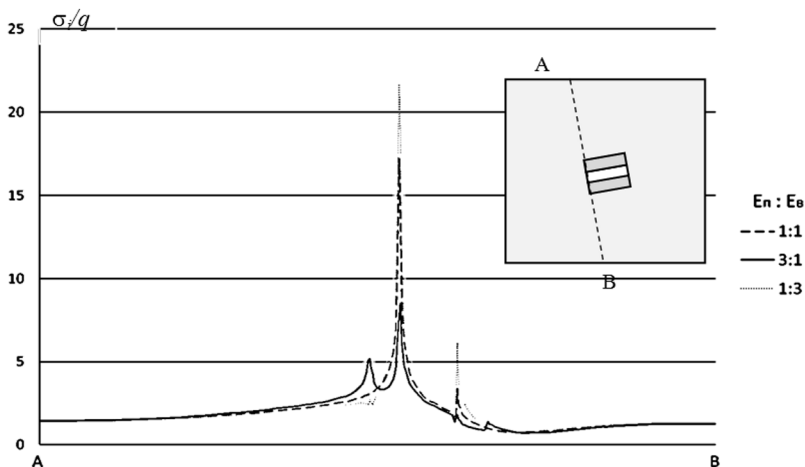


Fig. 10. Distribution of  $\sigma_i/q$  in section A–B at  $60^\circ$

So, by varying the orientation of the hole with respect to the direction of the load, as well as when using inclusions from a different material, it is possible to significantly reduce the stress in the plate in the places of their concentration. With a decrease in the angle of rotation of the hole relative to the direction of action of the load, the maximum stresses decrease.

The developed calculation methodology can be extended to various relationships between physical, mechanical and geometric parameters of the considered system and other types of loading.

## REFERENCES

1. *Timoshenko S.P.* Statically and dynamically problems of the theory of elasticity. – Kiev: Naukova dumka, 1975. – 564 pp.
2. *Timoshenko S.P.* On stresses in a plate with a circular hole // Journal of the Franklin Institute. – 1924. – Vol. 197, No. 4. – P. 505–516.
3. *Timoshenko S.P., Lessell's J.M.* Prikladnaya teoriya uprugosti (Applied theory of elasticity). – Leningrad: Gostekhizdat, 1931. – 392 p.
4. *Vaynberg D.V.* Kонтсентрати́сиа напрыажені́й в пластінах око́ло отверсті́й і выкружек (Concentration of stresses in plates near holes and fillets). – Kiev: Tekhnika, 1969. – 220 pp.
5. *Hart E.L., Beytsun V.S.* Napruzhenno-deformovanyy stan u dvofaznomu kompozytsiynomu materialі z urakhuvannyam vplyvu perekhidnoho шарu mizh vкlyuchennyam і matrytsеу (Stress-strain state in a two-phase composite material, taking into account the effect of the transition layer between the inclusion and the matrix) // Problemy obchyslyval'noy mekhaniky і mіtsnosti konstruktsey: zb. nauk. prats' – Dnipro: Lira, 2018. – Vol. 28. – P. 34–44.
6. *Hart E.L., Panchenko S.V.* Chislennyy analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plastiny s pryamougol'nym otverstiyem, podkreplennym treugol'nymi nakladkami (Numerical analysis of the stress-strain state of a plate with a rectangular hole, reinforced by triangular overlays) // Visnyk Dnipropetrovs'koho un-tu Ser.: Mekhanika. – 2015. – Vol. 24, t. 2. – P. 39–47.
7. *Hudramovich V.S.* Vliyaniye otverstiy na predel'nyye sostoyaniya elementov tonkostennykh metallicheskikh obolochечно-plastinchatykh konstruktsey (Influence of holes on the limiting states of elements of thin-walled metal shell-plate structures) // Visnyk Dnipropetrovs'koho un-tu Ser.: Mekhanika. – 2014. – Vol. 18, t. 2. – P. 47–60.
8. *Hudramovich V.S., Hart E.L., Marchenko O.A.* Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure // Strength of Materials. – 2021. – Vol. 52, No. 6. – P. 832–842. DOI: 10.1007/s11223-021-00237-7
9. *Gudramovich V.S., Gart E.L., Strunin K.A.* Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Science. – 2017. – Vol. 52, iss. 6. – P. 768–774. DOI: 10.1007/s11003-017-0020-z.
10. *Bazhenov V.A., Herashchenko O.V., Honcharenko M.V.* Variatsiyni pryntsypy budivel'noy mekhaniky: istoriya stanovlennya ta rozvytku (Variational principles of the building mechanics: history of the formation and development). – Kyiv: Karavela, 2015. – 764 pp.
11. Metody rascheta obolochek: V 5-ti t. / A.N. Guz', I.S. Chernyshenko, Val.N. Chekhov і dr.; Pod obshch. red. A.N. Guzya. – T. 1. Teoriya tonkikh obolochek, oslablennykh otverstiyami (Methods of calculation of shells: In 5 volumes. Vol. 1. The theory of shells weakened by holes). – Kiev: Naukova dumka, 1980. – 636 pp.
12. *Lizin V.T., Pyatkin V.A.* Proyektirovaniye tonkostennykh konstruktsey (Design of thin-walled structures). – Moscow: Mashinostroyeniye, 1994. – 384 pp.
13. *Mossakovskyy V.I., Kvasha O.M.* Konstruktseyta ta rozrakhunok lyukiv, yaki ne vyklykayut' kontsentratsiyi napruzhen' u sferychnykh obolonkakh (Construction and calculation of hatches that do not cause stresses concentration in spherical shells) // Pрыkladna mekhanika. – 1959. – Vol. 5, No. 4. – P. 371–378.
14. *Preobrazhenskiy I.N., Tsurpal I.A.* Vyrezy v nesushchikh konstruktseyakh (Cut-outs in the load-bearing structures). – Moscow: Mashinostroyeniye, 1984. – 112 p.
15. *Oden J.T.* Finite elements of nonlinear continua. – New York: Dover Publications, 2013. – 448 pp.
16. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method for solid and structural mechanics. – New York: Elsevier, 2005. – 632 pp.

Стаття надійшла 18.12.2021

Гарт Е.Л., Гудрамович В.С.

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИН З ПІДКРІПЛЕНИМИ ВИДОВЖЕНИМИ ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ РІЗНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ**

Розроблено схеми для комп'ютерного розрахунку напружено-деформованого стану пружних прямокутних пластин з підкріпленими видовженими отворами при дії віссиметричних розтягувальних сил. Отвори мають різну орієнтацію щодо спрямування



зусиль, матеріали пластини і підкріплень також різні. Комп'ютерне моделювання проведено методом скінченних елементів. Досліджено вплив механічних та геометричних параметрів пластин і підкріплень, орієнтації отворів (кут повороту відносно напрямку дії сил) на напружено-деформований стан пластини. Залежність зміни коефіцієнта концентрації напружень в пластині від орієнтації отвору, співвідношення модуля пружності матеріалів пластини та підкріплення (модуль пружності підкріплювального матеріалу в 3 рази більший, ніж модуль пружності матеріалу пластини). Моделюються пластини з видовженими отворами, розташованими під кутами  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  і  $30^\circ$  відносно напрямку дії навантаження. Показано, що вдалий вибір геометричних та жорсткісних параметрів підкріплень, орієнтації видовженого отвору може значно зменшити концентрацію напружень у пластині. Побудовано схеми розподілу інтенсивності напружень у перерізах пластини, що проходять вздовж однієї зі сторін отвору, та концентрації напружень в околі кутових точок отворів. Отримані в цій роботі результати можуть бути використані для розв'язання задач оптимізації тонкостінних прямокутних пластин з видовженими отворами, що підкріплюються по краях.

**Ключові слова:** пластина, видовжений отвір, підкріплення, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, метод скінченних елементів.

*Гарт Э.Л., Гудрамович В.С.*

### **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ УДЛИНЕННЫМИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ**

Разработаны схемы для компьютерного расчета напряженно-деформированного состояния упругих прямоугольных пластин с подкрепленными удлинёнными отверстиями при действии осесимметричных растягивающих сил. Отверстия имеют различную ориентацию относительно направления усилий, материалы пластины и подкреплений также различны. Компьютерное моделирование проведено методом конечных элементов. Исследовано влияние механических и геометрических параметров пластин и подкреплений, ориентации отверстий (угол поворота относительно направления действия сил) на напряженно-деформированное состояние пластины. Изучена зависимость изменения коэффициента концентрации напряжений в пластине от ориентации отверстия, соотношения модулей упругости материалов пластины и подкрепления. Моделируются пластины с удлинёнными отверстиями, расположенными под углами  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $30^\circ$  относительно направления действия нагрузки. Показано, что при определенном выборе геометрических и жесткостных параметров подкреплений, ориентации удлинённого отверстия можно значительно уменьшить концентрацию напряжений в пластине. Построены графики распределения интенсивности напряжений в сечениях пластины, проходящих вдоль одной из сторон отверстия, и концентрации напряжений в окрестности угловых точек отверстий. Полученные в этой работе результаты могут быть использованы для решения задач оптимизации тонкостенных пластин с удлинёнными отверстиями, которые подкрепляются по краям.

**Ключевые слова:** пластина, удлинённое отверстие, подкрепление, напряженно-деформированное состояние, коэффициент концентрации напряжений, метод конечных элементов.

УДК 539.3

*Гарт Е.Л., Гудрамович В.С.* Комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану пластин з підкріпленнями видовженими прямокутними отворами різної орієнтації // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 108. – С. 77-86. Англ.

*На основі методу скінченних елементів проведено комп'ютерне моделювання впливу механічних та геометричних параметрів підкріплювальних елементів на напружено-деформований стан пластини з видовженими прямокутними отворами різної орієнтації відносно напрямку дії сил розтягу.*

Табл. 0. Іл. 10. Бібліогр. 16 назв.

UDC 539.3

*Hart E.L., Hudramovich V.S. Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2022. – Issue 108. – P. 77-86.*

*On the basis of the finite element method, a computer simulation of the influence of mechanical and geometric parameters of reinforcing elements on the stress-strain state of the plate with elongated rectangular holes of different orientation relative to the direction of action of tensile forces has been carried out.*

Tabl. 0. Fig. 10. Ref. 16.

УДК 539.3

*Гарт Э.Л., Гудрамович В.С. Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния пластин с подкрепленными удлинёнными прямоугольными отверстиями различной ориентации / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУБА, 2022. – Вып. 108. – С. 77-86. - Англ.*

*На основе метода конечных элементов проведено компьютерное моделирование влияния механических и геометрических параметров подкрепляющих элементов на напряженно-деформированное состояние пластины с удлинёнными прямоугольными отверстиями разной ориентации относительно направления действия сил растяжения.*

Табл. 0. Ил. 10. Библиогр. 16 назв.

**Автор (науковий ступень, вчене звання, посада):** доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара ГАРТ Етері Лаврентіївна

**Адреса:** 49010, Україна, м. Дніпро, проспект Гагаріна, 72, Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки,

ГАРТ Етері Лаврентіївна

**Мобільний тел.:** +38(050) 146-88-43

**E-mail:** [hart@ua.fm](mailto:hart@ua.fm)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-6075-2269>

**Автор (науковий ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України, завідувач відділу міцності і надійності механічних систем Інституту технічної механіки НАН України і Державного космічного агентства України ГУДРАМОВИЧ Вадим Сергійович

**Адреса:** 49005, Україна, м. Дніпро, вул. Лешко-Попеля, 15, Інститут технічної механіки НАН України і Державного космічного агентства України, ГУДРАМОВИЧ Вадим Сергійович

**Мобільний тел.:** +38(067) 634-83-75

**E-mail:** [hudramovich@i.ua](mailto:hudramovich@i.ua)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-0852-9622>